Universität zu Köln
Mathematisches Institut
Dr. S. Riedel, T. Seifert

Wintersemester 2016/17

Stochastische Analysis

12.Übungsblatt

Besprechung in der Übung am 3. Februar.

Aufgabe 1:
Sei $b\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig und es gelte

$$\sup_{t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^d} |b(t,x)| < \infty.$$

Zeigen Sie, dass eine schwache Lösung von

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + dB_t \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

existiert, wobei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung ist.

Aufgabe 2:
Beweisen Sie Lemma 3.12 aus der Vorlesung: Sei $(M_t)_{t \in [0,t_0]}$ ein lokales Martingal, welches nichtnegativ ist und $M_0 = 1$ erfüllt. Dann gilt

a) M ist ein Supermartingal.

b) M ist genau dann ein Martingal, wenn gilt $\mathbb{E}[M_{t_0}] = 1$.

Aufgabe 3:
Sei $f \in L^2([0,1], \lambda)$ und $B\colon [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Brownsche Bewegung. Für jedes $t \in [0,1]$ ist das Wiener Integral $\int_0^t f(s)dB_s$ definiert (siehe Übungsblatt 7, Aufgabe 3). Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass $t \to \int_0^t f(s)dB_s =: M_t^f$ ein lokales Martingal ist.

a) Zeigen Sie, dass die quadratische Variation von M^f gegeben ist durch

$$< M^f >_t = \int_0^t f(s)^2 ds$$

b) Zeigen Sie, dass M^f ein echtes Martingal ist und dass

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,1]} |M_t^f|^p\right] < \infty$$

ist für alle $p \in [1, \infty)$.

c) Beweisen Sie, dass

$$Z_t = \exp\left\{\lambda \int_0^t f(s)dB_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t f(s)^2 ds\right\}$$

ein echtes Martingal ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Hinweis zu a): Eine Möglichkeit ist es für alle $t \in [0,1]$ die stärkere Aussage

$$\sum_{t_i \in \Delta} (M^f_{t_{i+1}} - M^f_{t_i})^2 \xrightarrow{L^2(\mathbb{P})} \int_0^t f(s)^2 ds$$

für $|\Delta| \to 0$ zu zeigen, wobei Δ Partitionen von $[0,t]$ sind.

Aufgabe 4:
Beweisen Sie: Ist $f \in \mathscr{C}^1([0,1])$ mit $f(0) = 0$ und $(X_t)_{0 \le t \le 1}$ eine $\mathbb{R}$-wertige Brownsche Bewegung bezüglich eines Maßes Q, so ist

$$B_t := X_t - f(t)$$

eine Brownsche Bewegung bezüglich des Maßes P, welches gegeben ist durch

$$\frac{dP}{dQ} = \exp\left\{\int_0^1 f'(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(s)|^2 ds\right\},$$

wobei $\int_0^1 f'(s)dB_s$ das Wiener-Integral ist.

Hinweis: Sie dürfen die Aussagen von Aufgabe 3 verwenden auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben.

Bemerkung: Das Theorem gilt noch allgemeiner, nämlich für alle f im Sobolevraum $H^1_0([0,1])$. Das Theorem heißt auch Cameron-Martin-Theorem.