

# LSMC - Die moderne Antwort auf das Nested Stochastics Problem

Carolin C. Alberti<sup>1</sup>

Mathematisches Institut  
Weyertal 86-90  
50931 Köln

27. Juni 2015

---

<sup>1</sup>[calberti@smail.uni-koeln.de](mailto:calberti@smail.uni-koeln.de)



# Inhaltsverzeichnis

## 1. Motivation

SCR

## 2. Nested Stochastics

## 3. Least Squares Monte Carlo

Algorithmus

Risikofaktoren

Fitting Szenarien

Konfiguration der Regressionsfunktion

Validierung der Schätzfunktion

Berechnung des SCR

Konvergenz

## 4. Vorteile von LSMC



## Solvency II

- Projekt der EU zur Reform des Versicherungsaufsichtsrechts
- Ziele:
  - Schaffung eines einheitlichen Versicherungsmarktes
  - Schutz des Versicherungsnehmers
- 3-Säulen-Ansatz
  - Säule I: Kapitalanforderungen
  - Säule II: Risikomanagementsystem
  - Säule III: Berichterstattungspflichten

## Solvency II

- Projekt der EU zur Reform des Versicherungsaufsichtsrechts
- Ziele:
  - Schaffung eines einheitlichen Versicherungsmarktes
  - Schutz des Versicherungsnehmers
- 3-Säulen-Ansatz
  - Säule I: Kapitalanforderungen,  
u.a. an das Zielsolvenzkapital  
(Englisch: Solvency Capital Requirement, kurz SCR)

# Motivation

## Solvency Capital Requirement (SCR)

- Menge an Eigenkapital, das ein Unternehmen halten muss, um nach einem Jahr mit Wahrscheinlichkeit  $x$  solvent zu sein.
- Regelung soll **Insolvenzrisiko** von Versicherern **senken**.
- Zwei Methoden zur Berechnung des SCR:

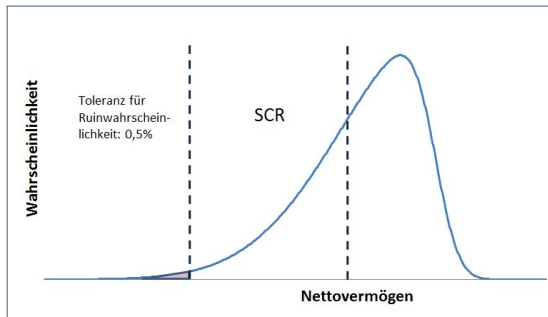
| Internes Modell                                                                                                                                          | Standardformel                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"><li>- Überprüfung durch Aufsichtsbehörde</li><li>- Implementierung oft über ineffiziente numerische Methoden</li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li>- Annahme normalverteilter Einzelrisiken kritisch</li><li>- Unterschätzt systematisch den tatsächlichen Kapitalbedarf</li></ul> |

- Beide Ansätze bisher nicht zufriedenstellend - was ist die Alternative?
- Kreieren eines neuen internen Modells mit schnellerer Laufzeit.



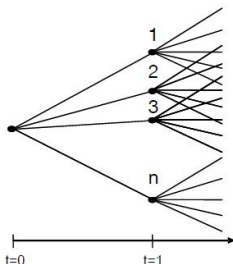
# Nested Stochastics

- Stochastische Modellierung: Mathematischer Prozess  
z. B. zur Beschreibung von Finanzprodukten
- "Nested": Modell im Modell
- Anweisung durch Solvency II: 99,5% Value at Risk (VaR)
- VaR Berechnung über Verteilungsfunktion des firmeneigenen Nettovermögens



# Nested Stochastics

- Gewinnung der Verteilungsfunktion ist ein Nested Stochastics Problem
- Schritt 1: Einjahres real-world Simulation  
Schritt 2: Simulation von risikoneutralen Szenarien für jedes gewonnene Szenario



## Beispiel

- 1000 real-world Simulationen
- 1000 risikoneutrale Szenarien pro real-world Szenario

⇒ 1 Mio. Simulationen

# Least Squares Monte Carlo (LSMC)

- Kombination aus **Monte Carlo Simulation** und **Least Squares Regression** reduziert die Anzahl der benötigten Simulationen erheblich
- **Anforderungen** an Approximationsmodell: Korrekte Abbildung der Verbindlichkeiten, Einbeziehung aller relevanten Risiken, schnelle Ausführung
- Formel für das verfügbare Kapital (AC) nach einem Jahr:

$$AC_1 = ANAV_1 + V_1 + X_1$$

$ANAV_1$ : Angepasster Nettovermögenswert

$V_1$ : Erwartungswert aller zukünftigen Gewinne

$X_1$ : Gewinn im ersten Jahr





$$AC_1 = ANAV_1 + V_1 + X_1$$

- Schwierigkeiten  $V_1$  zu berechnen, da definiert als *bedingter* Erwartungswert:

$$V_1 = \mathbb{E}^{\mathcal{Q}} \left[ \sum_{t=2}^T \exp \left( - \int_1^t r_u du \right) X_t | (Y_1, D_1) \right]$$

$\mathcal{Q}$ : risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß

$r_t$ : risikofreier Zinssatz zum Zeitpunkt  $t$

$(Y_1, D_1)$ : Markov'sche Zustandsvariablen

- Lösung:
  - Ersetze Term der bedingten Erwartung durch eine **Linearkombination** von Basisfunktionen
  - **Simuliere Pfade** für Jahresendkapital mit Monte Carlo
  - **Approximiere** Linearkombination durch Least Squares Regression

# Algorithmus zur Berechnung des SCR

- Festlegen der **Form der Wertfunktion** durch Wahl der Risikofaktoren
- Erstellen der **Fitting Szenarios**
- Wahl der **Regressionsmethode** und der **Basisfunktionen**  $f_k$

$$V_1 \approx \hat{V}_1^{(M)} = \sum_{k=1}^M \alpha_k f_k.$$

- **Approximierung** der real-world Realisationen durch Monte Carlo
- **Diskontierung** der Cash Flows auf den Zeitpunkt  $t_0$
- **Schätzung** der Regressionskoeffizienten und Einsetzen in  $\hat{V}_1^{(M)}$
- Berechnung der **Realisationen** von  $AC_1$
- **Validierung** der approximierten Funktion
- Berechnung von real-world Szenarien mit Hilfe der neuen Funktion, woraus die **Verteilungsfunktion** des Jahresendvermögens abgeleitet werden kann
- Ermittlung des SCR



# Risikofaktoren

- Annahme: Wertfunktion existiert, ist stetig und an jeder Stelle auswertbar.
- In der Realität haben eine große Menge von Risikofaktoren Einfluss auf den Jahresendwert:
  - Zinssätze
  - Eigenkapital
  - Volatilitäten
  - Ausfallraten von Unternehmensanleihen
  - Sterberaten
  - Abbruchquoten
  - Ausgaben



## Zinsrisiko

- Änderungen in der risikoneutralen Zinskurve haben direkten Einfluss auf die Beteiligungen eines Versicherungsunternehmens
- Jeder Terminkurs könnte Risikofaktor darstellen.  
⇒ Reduzierung nötig
- Two-Factor Short-Rate Model: Simuliert mögliche real-world Zinskurve
- Zwei Faktoren, die sämtliche Strukturänderungen in einem Jahr beschreiben  
→ Kandidaten für Verbindlichkeitsfunktion
- Vorteile:
  - Zinsrisiko wird direkt und eindeutig abgebildet
  - keine neuen Faktoren für Schätzfunktion nötig
  - hohe Genauigkeit in der Verbindlichkeitsfunktion
- Hauptkomponentenanalyse: 2-3 Zinsrisikofaktoren  
→ Verschiebung, Steigung und Krümmung

## Volatilitäten

- Beeinflussung der Kapitalanlagen durch marktplizierte Volatilitäten
- Auftreten von Volatilitätsrisikofaktoren in verschiedenen Dimensionen und Komplexitäten  $\Rightarrow$  auch hier Reduzierung möglich und nötig
- Modell anwendbar für real-world sowie risikoneutralen Aufbau  $\Rightarrow$  Faktoren für Wertfunktion übernehmbar

- Änderung des Anlagewertes  $S_t$  für deterministische Volatilität  $\sigma$ :

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma dW_t),$$

$\mu_t$ : Trend,  $W_t$ : Brown'sche Bewegung

Parameter  $\sigma$  als Volatilitätsargument in Approximationsfunktion

- Methode zur Berechnung der real-world Verteilung der Volatilitäten benötigt  
 $\rightarrow$  Hinzufügen eines externen korrelierten Risikofaktors
- Falls Volatilität stochastisch, ersetze  $\sigma$  durch  $\sqrt{v_t}$ , wobei

$$dv_t = \alpha(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dW_t$$

mit spezifischen Parametern  $\alpha, \theta, \xi$ , die  $v_t$  festlegen.

# Risikofaktoren

## Eigenkapitalrisiko

- Reduzierung auf einen Faktor möglich: Entweder Jahreswert aller Beteiligungen oder dessen relative Veränderung
- Einfaktormodell für Situation von verschiedenen Beteiligungsklassen
- Maximal zwei Faktoren, falls Portfolio in in- und ausländische Positionen geteilt werden soll

## Marktunabhängige Risiken

- Sterberate
- Stornoquote
- Anzahl der in Anspruch genommenen Optionen
- Reduzierung und Auswahl so, dass Faktoren für Wertfunktion passend



# Risikofaktoren - Auswahl der Variablen

- Akaikes Informations Kriterium (AIC)
- Mallows' Komplexitätsparameter ( $C_p$ ) für Homoskedastizität
- Mallows' verallgemeinerter Komplexitätsparameter ( $GC_p$ ) für Heteroskedastizität

## AIC

Annahme: Es gibt ein statistisches Modell, das die Daten beschreibt.

$$AIC := 2k - 2\ln(L)$$

$L$ : maximaler Wert der Likelihoodfunktion für unser Modell

$k$ : # geschätzter Parameter

- belohnt Güte des Fits
- bestraft hohe Anzahl von Parametern



# Fitting Szenarien

- Fitting Szenarien liefern approximierte Werte für die verschiedenen Risikofaktoren → Kalibrierung der Wertfunktion
- Mehrdimensionales Intervall für jeden Risikofaktor
- Erstellen der „äußeren Fitting Szenarios“ innerhalb der festgelegten Intervalle (quasi-zufällig und mehrdimensional)

## Beispiel

### Eigenkapitalrisikofaktor

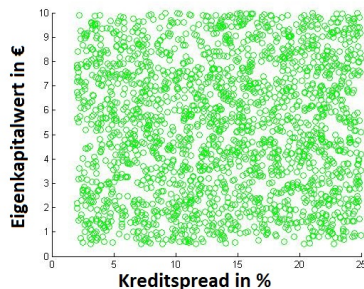
Anfangswert: 3 (€)

Intervall:  $[0.5, 10]$

### Kreditspreadrisiko

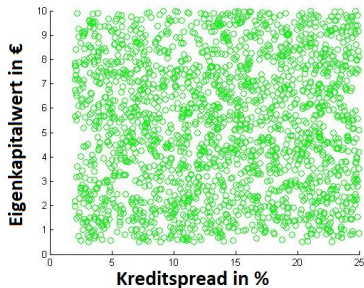
Anfangswert: 6 (%)

Intervall:  $[2, 25]$

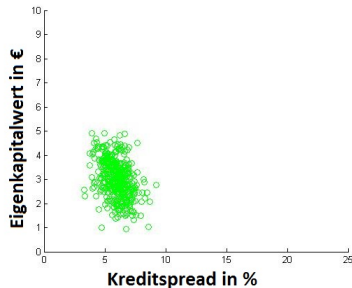




# Fitting Szenarien



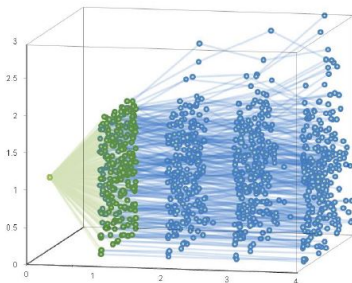
- gleichverteilte Positionen der Risikofaktoren Eigenkapital und Kreditspread
- Fitting Werte



- real-world Realisationen
- für Auswertungszwecke

# Fitting Szenarien

- Simulation der „inneren Fitting Szenarien“ auf Grundlage der erhaltenen äußeren Szenarien
- Größter Unterschied zu Nested Stochastics: Eine **kleine (!)** Anzahl risikoneutraler Simulationen pro real-world Simulation
- Typisch: 10.000 äußere Szenarien und jeweils zwei innere
- Bei jeweils zwei risikoneutralen Szenarien: Antithetische Stichprobenvarianz Technik reduziert Variabilität bei der Regression auf die Wertfunktion



- Diskontierung der erhaltenen Werte auf den Zeitpunkt  $t_0$
- Mittelung der Diskontwerte  
⇒ 1 Wert pro äußeres Szenario
- Werte einzeln enthalten großen Stichprobenfehler
- Werte zusammen liefern korrektes Ergebnis

# Konfiguration der Regressionsfunktion

- Ungenaue Szenariowerte als Fitting Daten
- Was ist die passende Form für die Regressionsfunktion?  
→ Viele geeignete Möglichkeiten - eine davon: **Polynome**
- Vorteile: - Flexibilität  
- Schnelle Auswertung  
- Genauigkeit
- Einfachste Methode: Gewöhnliche Polynome

## Beispiel

Zwei Risikofaktoren,  
Grad 3 für die einzelnen Faktoren, Grad 4 für die zusammengesetzten Terme

$$\begin{aligned} L(R_1, R_2) = & \underbrace{\alpha_1}_{\text{Konstante}} + \underbrace{\alpha_2 R_1 + \alpha_3 R_1^2 + \alpha_4 R_1^3}_{\text{Terme von Risikofaktor 1}} + \underbrace{\alpha_5 R_2 + \alpha_6 R_2^2 + \alpha_7 R_2^3}_{\text{Terme von Risikofaktor 2}} + \underbrace{\alpha_8 R_1 R_2}_{\text{Grad 2, gemeinsam}} \\ & + \underbrace{\alpha_9 R_1^2 R_2 + \alpha_{10} R_1 R_2^2}_{\text{Grad 3, gemeinsam}} + \underbrace{\alpha_{11} R_1^3 R_2 + \alpha_{12} R_1 R_2^3 + \alpha_{13} R_1^2 R_2^2}_{\text{Grad 4, gemeinsam}}. \end{aligned}$$



# Konfiguration der Regressionsfunktion

- Besser geeignet als gewöhnliche Polynome:  
*Legendre, Laguerre, Jacobi* oder *Chebyshev* Polynome  
→ Orthogonalität → numerische Stabilität

## Beispiel

Die Wertfunktion bspw. bei Chebyshev Polynomen ist dann von der folgenden Gestalt:

$$P(x) = \sum_{k=0}^M \alpha_k P_k(x),$$

wobei

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = 2x^2 - 1, \dots$$

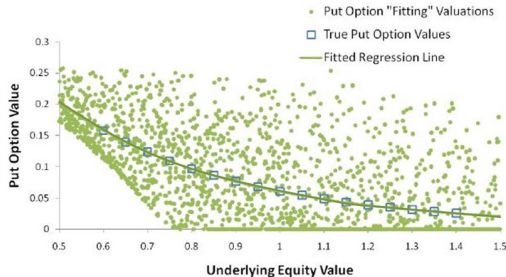
$$P_{n+1}(x) = 2xp_n(x) - p_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$



# Konfiguration der Regressionsfunktion

$$P(x) = \sum_{k=0}^M \alpha_i P_i(x)$$

- Nach formalem Aufbau der Schätzfunktion führen wir eine **OLS** (ordinary least squares) Regression auf die Basisfunktionen durch.
- Wir erhalten **Schätzwerte** für  $\alpha_i, i=\{1, \dots, 13\}$ .
- **Stichprobenfehler** der ungenauen Simulationswerte werden **geglättet**.



## Beispiel

- Regression von simulierten Werten einer europäischen Put
- Polynom vierten Grades
- Gefittete Funktion trifft wahre Optionswerte sehr genau.

# Konfiguration der Regressionsfunktion

$$P(x) = \sum_{k=0}^M \alpha_i P_i(x)$$

- Ist die Anzahl der simulierten Szenarien ausreichend?
  - Schätze Stichprobenfehler und seinen Einfluss auf das SCR.
  - Erhöhe ggf. die Anzahl der Szenarien, falls Fehler zu groß.
- In der Praxis ist die Anzahl der Risikofaktoren und Dimensionen weit größer als im obigen Beispiel.
- **Einzelterme** wachsen **linear** mit der Anzahl der Risikofaktoren.
- **Gemischte Terme** wachsen **viel schneller** und können mehr Koeffizienten erfordern, als Fitting Szenarien verfügbar sind.
- Deshalb **Reduzierung** der Regressionsfunktion nötig.
  - AIC findet Terme mit signifikantem Einfluss auf den Jahresendwert der Verbindlichkeiten.
  - Terme ohne Einfluss werden „bestraft“ und können aus der Funktion gestrichen werden.



# Validierung der Schätzfunktion

Zwei Möglichkeiten, die Güte der geschätzten Wertfunktion zu überprüfen:

- Methode A: **Berechnung** der wahren Verbindlichkeitswerte für eine kleine Anzahl **zentraler Punkte** durch Monte Carlo Simulation
  - **Neuberechnung** des Schrittes „Simulation **innerer Szenarien**“
  - Große Anzahl von risikoneutralen Simulationen (anstatt 2 wie oben)
    - viel höhere Genauigkeit
  - **Vergleich** der genauen Werte mit denen der Schätzfunktion
    - ggf. Anpassung der Schätzfunktion
- Methode B: Schätzt **Standardfehlerbalken** um die Schätzfunktion
  - **Wiederholung** des **Fitting** Schrittes mit Teilmengen der Simulationsdaten
  - Jeder neue Fit liefert neue Schätzfunktion
  - Neue Schätzfunktionen bilden **Konfidenzintervall** um ursprüngliche Funktion



# Berechnung des SCR

- Nach Validierung der Wertfunktion: Berechnung des SCR
- Übergabe realer Werte der Risikofaktoren an die Schätzfunktion
- Bestimmung der Verteilung möglicher Verbindlichkeitswerte
- Der SCR für Jahr 1 ist die kleinste reelle Zahl  $x$ , die folgende Ungleichung erfüllt:

$$P(AC_1 \geq 0 | AC_0 = x) \stackrel{!}{\geq} 99.5\%$$





# Konvergenz

- Wie gut trifft der Algorithmus den wahren Wert des Jahresendvermögens?
- Longstaff und Schwartz: Konvergenzbeweis der LSMC Methode für amerikanische Optionen → hier findet Algorithmus die optimale Stoppzeit
- Behauptung 1: Der wahre Wert  $V(X)$  der amerikanischen Option und die Werte, die der LSMC Algorithmus ausgibt, erfüllen folgende Ungleichung:

$$V(X) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i(M, K), \quad (1)$$

$L_i(\cdot)_{i=\{1, \dots, N\}}$ : diskontierte Cash Flows bei  $K - 1$  möglichen Ausübezeitpunkten  
 $M$ : Anzahl Basisfunktionen

- Idee dahinter:
  - Links: Wert der Option definiert durch Stoppzeit, die Optionswert maximiert
  - Rechts: Werte, die durch die LSMC Stoppregeln erzielt werden.  
Beste Stoppregel - falls gefunden - liefert Ergebnis genauso gut wie  $V(X)$ .  
Durchschnitt aller Ergebnisse mit LSMC Stoppregeln kleiner oder gleich  $V(X)$ .



# Konvergenz

$$V(X) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i(M, K) \quad (1)$$

- Mit wachsender Anzahl  $M$  der Basisfunktionen wächst die rechte Seite von (1).
- Wächst sie nicht mehr, ist ein ausreichend großes  $M$  gefunden.
- Behauptung: Für  $M$  groß genug und  $N \rightarrow \infty$  gibt der LSMC Algorithmus einen Wert in der  $\epsilon$ -Umgebung des wahren Wertes.
- Unter bestimmten Annahmen gibt es für beliebiges  $\epsilon > 0$  ein  $M < \infty$ , sodass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|V(X) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i(M, K)| > \epsilon) = 0.$$



# Konvergenz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|V(X) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N L_j(M, K)| > \epsilon) = 0$$

- Annahmen: - Option abhängig von Zustandsvariable  $X$  auf  $(0, \infty)$   
- zwei Ausübungszeitpunkte,  $t_1$  und  $t_2$

$$\int_0^\infty e^{-X} L^2(t_1) dX < \infty, \int_0^\infty e^{-X} L_X^2(t_1) dX < \infty \quad (2)$$

- Falls Ungleichungen in (2) erfüllt, konvergiert  $L_X(t_1)$  nach  $L(t_1)$ .
- Maximaler Schätzfehler der bedingten Erwartung und maximaler Pricingfehler sind beschränkt.



# Vorteile von LSMC

- Kleine Anzahl von benötigten Szenarien → schnelle Durchführung
- Konvergenz zum wahren Funktionswert
- Alle bekannten Risiken und deren gemeinsames Verhalten abbildbar
- Reduzierung der Risikofaktoren automatisch anhand von statistischen Kriterien
- Wahl der Polynome und Fitting Punkte automatisiert
- Fitting Prozess automatisch und schnell durchführbar
- Schnelle Auswertung der Schätzfunktion mit realen Risikofaktorwerten
- Ergebnisse übersichtlich und leicht präsentierbar

⇒ LSMC Methode fortschrittliche und stabile Methode zur Berechnung von Kapitalanforderungen.



# Quellen



A. Koursaris, *A Least Squares Monte Carlo Approach to Liability Proxy Modelling and Capital Calculation*, 2011.



L. Stentoft, *Convergence of the Least Squares Monte Carlo Approach to American Option Valuation*, Management Science, Vol. 50, No. 9, 2004.



F.A. Longstaff and E.S. Schwartz. *Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach*. The Review of Financial Studies, 2001.



S. Beak, F. Kraman, and H. Ahn. *Variable selection for heteroscedastic data through variance estimation*. Communications in Statistics, Simulation and Computation, 2005.



M. Stone. *The Generalized Weierstrass Approximation Theorem*. Mathematics Magazine 21 (21), 167-184 and 21 (5), 237-254, 1948.



The Proxy Working Party: C. Hursey et al.. *Heavy Models, Light models and Proxy Models*, 2014.



S. Hu. *Akaike Information Criterion*, 2007.



Vielen Dank für Ihre  
Aufmerksamkeit!

