

Cashflows von Versicherungsverträgen in der Lebensversicherung

Martin Frohn

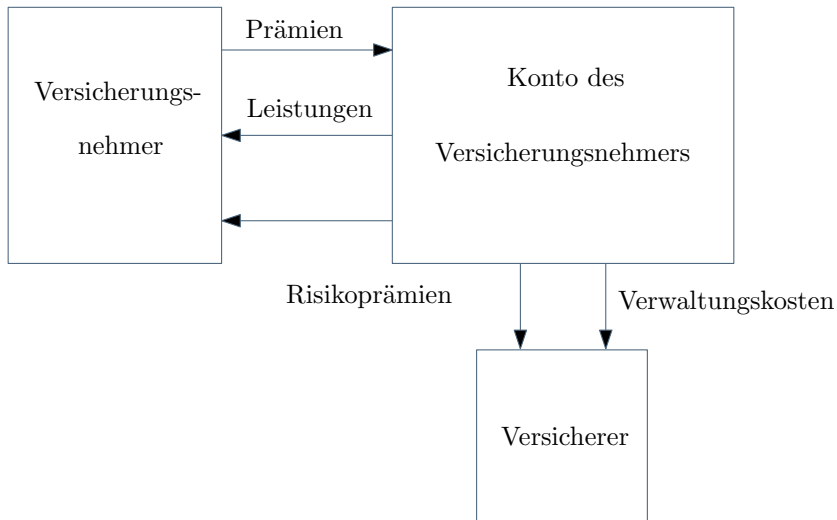
Mathematisches Institut

5. Juni 2015



- Geschäftsmodell der Lebensversicherung
- Produkte der Lebensversicherung
- Zahlungsströme unter Unsicherheit
- Deckungsrückstellung
- Entstehung von Überschüssen
- Funktionsweise der Überschussbeteiligung
- Reservegleichungen
- Modellierung von Lebensversicherungsprodukten





Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG)

- Solvenzanforderungen
- Deckungsrückstellungsverordnung
- Kapitalanlageverordnung
- Überschussbeteiligung

⇒ Äquivalenzprinzip: $\text{Prämien} = \text{Leistungen} + \text{Kosten}$

Gleichbehandlungsgrundsatz: faire Risikoprämien



Klassifikation von Verträgen

festgelegt	teilweise festgelegt
Beiträge	sichere Leistungen ⇒ Überschüsse entstehen ⇒ Leistungen erhöhen
Beiträge und Leistungen	
sichere Leistungen ⇒ Überschüsse entstehen	Beiträge ⇒ Beiträge senken



Produkte der Lebensversicherung

Einfaches Modell:

- Einmalige Leistung: Kapitalversicherung
 - Risikolebensversicherung
 - gemischte Versicherung
- Mehrfache Leistung: Rentenversicherung
 - temporäre oder lebenslängliche Rente
 - konstante oder variable Rente

Erweiterte Modelle:

- Versicherungen auf mehrere Leben
- Berufsunfähigkeitsversicherung
- Erwerbsunfähigkeitsversicherung



Verzinsung

- effektiver Jahreszins: i
- unterjährlicher Zins: $\frac{i^{(k)}}{k} = (1 + i)^{\frac{1}{k}} - 1$
- Zinsintensität:

$$r := \lim_{k \rightarrow \infty} i^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot ((1 + i)^{\frac{1}{k}} - 1) = \ln(1 + i)$$

- Diskontierungsfaktor: $v = \frac{1}{1+i}$



Diskrete Barwerte

konstante Zahlung über n Jahre: $Z \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^k$

m Jahre aufgeschoben: $v^m \cdot Z \cdot \sum_{k=0}^{n-1} v^k$

variabler Zahlungsstrom: $\sum_{k=0}^{n-1} Z_k \cdot v^k$



Übergangswahrscheinlichkeiten: einfache Ordnung

- Zeitpunkt des Todes: s
- technisches Alter zum Todeszeitpunkt: $X_1 := s - s_0$
- Überlebenszeit im Alter x : $T := X_1 - x$
- Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeit:

$${}_tq_x := P(\{X_1 \leq x + t\} | \{X_1 > x\})$$

$${}_tp_x := 1 - {}_tq_x$$



de Moivre's Sterbegesetz

- höchstmögliches Alter: ω
- Sterbefunktion: $S(x) = \frac{x}{\omega}$

$${}_tq_x = P[\{X_1 \leq x + t\} | \{X_1 > x\}] = \frac{S(x + t) - S(x)}{1 - S(x)} = \frac{t}{\omega - x}$$

$$\Rightarrow {}_tp_x = 1 - \frac{t}{\omega - x}$$

- Sterbeintensität:

$$\mu(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P[X_1 < x + \Delta x | X_1 > x] = \frac{S'(x)}{1 - S(x)} = \frac{1}{\omega - x}$$



Übergangswahrscheinlichkeiten: zusammengesetzte Ordnung

- technisches Alter bei Eintritt der Invalidität: X_2
- ${}_tq_x^a := P(X_1 \leq x + t | X_1 > x, X_2 > x)$
- ${}_tq_x^{aa} := P(X_1 \leq x + t, X_1 < X_2 | X_1 > x, X_2 > x)$
- ${}_tq_x^{ai} := P(X_2 \leq x + t, X_1 \geq X_2 | X_1 > x, X_2 > x)$
- ${}_tq_x^i := P(X_1 \leq x + t | X_1 > x, X_2 \leq x)$
- $P(\text{„58-jähriger Aktiver stirbt vor dem 60. Geburtstag“})$

$$= {}_1q_{58}^a + {}_1p_{58}^{aa} \cdot {}_1q_{59}^a + {}_1p_{58}^{ai} \cdot {}_1q_{59}^i$$



Zahlungsströme unter Ungewissheit

- konstante Rentenzahlung Z für n Jahre:

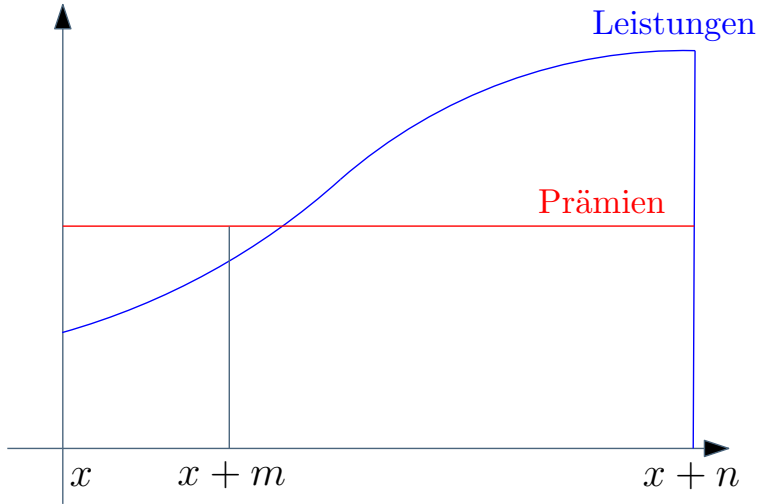
$$Z \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} := Z \cdot \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot v^t$$

- allgemeiner Leistungsbarwert für h Leistungen:

$$A_x := \sum_{t \geq 0} \left({}_t p_x \cdot v^t \cdot \sum_{i=1}^h q_{x+t}^{(i)} \cdot L_{x+t}^{(i)} \right)$$



Äquivalenzprinzip: $P \cdot \ddot{a}_{x, \overline{n}|} \stackrel{!}{=} A_x$



Deckungsrückstellung

- Deckungskapital prospektiv für jeden VN:

$$V_x = \sum_{t \geq 0} {}_t p_x \cdot v^t \cdot E[{}_t L_x - {}_t P_x] \geq 0$$

- Rückstellung zu Beginn:

$${}_0 V_x = A_{x, \overline{n}|} - P_{x, \overline{k}|} \ddot{a}_{x, \overline{k}|} = 0$$

- Nach m Jahren:

$${}_m V_x = A_{x+m, \overline{n-m}|} - P_{x, \overline{k}|} \ddot{a}_{x+m, \overline{k-m}|}$$



Beispiel: Reserve

- Vertragstyp: gemischte Versicherung

Alter $x = 80$, Laufzeit $n = 5$

Versicherungssumme $b(n) = 2000$

- Weitere Annahmen:

Zinssatz $i = 4\%$

Das de Moivre'sche Gesetz gilt für $\omega = 100$

- Prämie gem. Versicherung: $\pi = 400,97$
- Prämie Risikolebensversicherung: $\pi^1 = 106,37$



Beispiel: Reserve

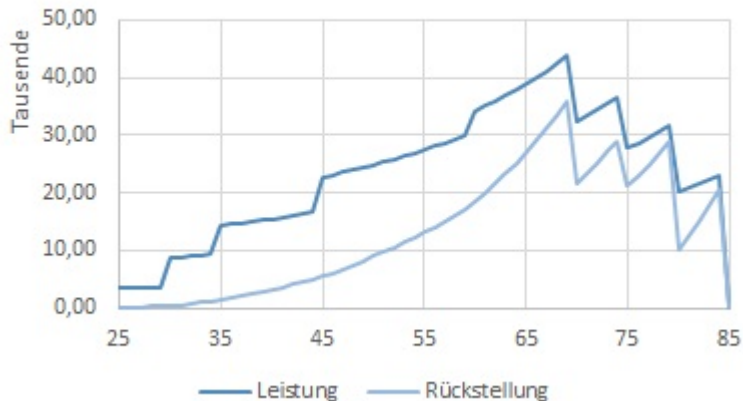
m	Barwert $\ddot{a}_{80+m, \overline{5-m} }$	gem. Ver. $A_{80+m, \overline{5-m} }$ $\times 2000$	Reserve ${}_mV_{80}$ $\times 2000$	Risiko. Ver. $A^1_{80+m, \overline{5-m} }$ $\times 2000$	Reserve ${}_mV^1_{80}$ $\times 2000$
0	4,1851	1678,07	0	445,18	0
1	3,4868	1731,79	333,69	382,09	11,19
2	2,7299	1790,00	695,38	308,34	17,95
3	1,9049	1853,46	1089,63	221,89	19,25
4	1,0000	1923,08	1522,11	120,19	13,82

$$({}_4V_{80, \overline{5}|} + \pi) \cdot 1,04 = (1522,11 + 400,97) \cdot 1,04 = 2000,0032$$

$${}_4V^1_{80} + \pi^1 = A^1_{84, \overline{1}|}$$



Portfolio für 7 gemischte Versicherungen



Risikoprämien

$$\begin{aligned} {}_{m+1}V_x \cdot P(\{X_1 > x + m + 1\}) &= \\ ({}_mV_x + E[{}_mP_x - {}_mL_x]) \cdot P(\{X_1 > x + m\}) \cdot (1 + i) \\ \Rightarrow E[{}_mP_x] &= \underbrace{{}_{m+1}V_x \cdot v - {}_mV_x}_{\text{Sparprämien}} + \underbrace{q_{x+m} \cdot (1 - {}_{m+1}V_x) \cdot v}_{\text{Risikoprämien}} \end{aligned}$$

- Sparprämien > 0 : Rückstellung erweitern
- Sparprämien < 0 : Rückstellungskapital abbauen
- Risikoprämien > 0 : zu deckende Versicherungsleistungen
- Risikoprämien < 0 : Überschuss erwirtschaftet



Überschussverteilung

- Natürliche Beteiligung: nach dem Beitragssatz
 - fair: entstehungsgerecht
 - nicht transparent: Bezugsgrößen unbekannt
- Mechanische Beteiligung: nach dem Risiko
 - transparent: feste Quote
 - unfair: Gesamtvertrag unberücksichtigt
- Mischformen



Überschussbeteiligung

Zeitpunkt der Verteilung:

- verbindlich: laufende Überschussanteile
- unverbindlich: Schlussüberschussanteile

Zeitliche Stabilität:

- Rückstellung für Beitragsrückerstattungen (RfB)
 - gebundene RfB: deklarierte Überschüsse
 - freie RfB
- Direktgutschrift



Überschussbeteiligung

- Mindestzuführungsverordnung (MindZV):

90% der Zinsgewinne

90% der Risikogewinne

50% der sonstigen Gewinne

- Beispiel:

96% der Zinsgewinne

92% der Risikogewinne

50% der sonstigen Gewinne



Beispiel: Überschussbeteiligung

- Vertragstyp: gemischte Versicherung

Alter $x = 80$, Laufzeit $n = 5$

Versicherungssumme $b(n) = 107$

- Annahmen:

Zinssatz $i = 3\%$

Das de Moivre'sche Gesetz gilt für $\omega = 100$

- Prämie $\pi = 21,45$
- Portfolio: 10 solcher Verträge



Beispiel: Überschussbeteiligung

Situation nach einem Jahr:

- 3% Garantieverzinsung: $21,45 \cdot 1,03 = 22,10$
- Reserve: 178,52
- reale Daten:
Zinssatz $i = 4\%$
Alle VN leben $\Rightarrow \frac{1}{40}$ der Sterblichkeit
- erwirtschaftete Überschüsse:
2,2 aus Zinsen, 35,7 aus Risiko
- gebundene RfB: $2,11 + 32,84 = 34,95$
 $\Rightarrow$ freie RfB: $0,09 + 2,86 = 2,88$
- 2% Beteiligung: $21,45 + 34,95 \cdot 0,02 = 22,15$



Anhang: Reservegleichungen



Kontinuierliche Barwerte

- variables diskontieren: $v(t, n) := e^{-\int_t^n r(s) ds}$
- Leibrente:

$$E[v(t, s) \cdot b(s)] = \int_t^n v(t, s) \cdot b(s) \cdot p(t, s) ds$$

- Prämienbarwert:

$$\Pi(t) = \int_t^n v(t, s) \cdot \pi \cdot p(t, s) ds$$

- Todesfall:

$$E[v(t, s) \cdot b^{ad}] = \int_t^n v(t, s) \cdot b^{ad} \cdot p(t, s) \cdot \mu(s) ds$$

- Erlebensfall:

$$v(t, n) \cdot b(n) \cdot p(t, n)$$



Reservevergleich

- Integralgleichung des Deckungskapitals (gem. Vers.):

$$V(t) = E[v(t, s)b^{ad}] + v(t, n)b(n)p(t, n) - \Pi(t)$$

- Thiele's Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dt}V(t) = r(t)V(t) + \pi - \underbrace{\mu(t)(b^{ad} - V(t))}_{=:R(t)}$$

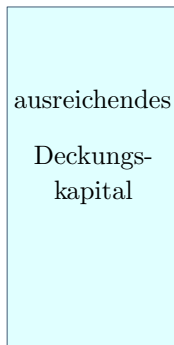
$$V(0) = \pi(0)$$

$$V(n) = b(n)$$

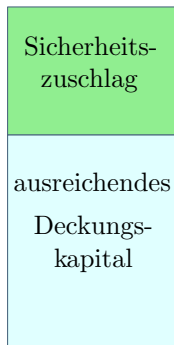


Vollständiges Deckungskapital

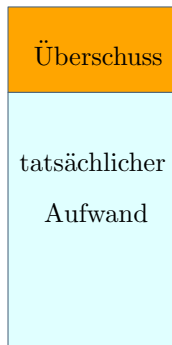
1. Ordnung



2. Ordnung



3. Ordnung



Technische Reserve 2.Ordnung

- Basis 2.Ordnung (r^δ, μ^δ) : aus Erfahrung

$$\frac{d}{dt} V^*(t) = r^\delta(t) V^*(t) + \pi - \mu^\delta(t) R^*(t)$$

- RGL 2.Ordnung:

$$V^*(t) = E^\delta[v(t, s) b^{ad}] + V^*(n) \cdot E^\delta[v(t, n)] - \Pi^\delta(t)$$

$$V^*(t) = E^\delta[v(0, s)(\pi - b^{ad} \mu^\delta(s))]$$

- Cashflow zum Zeitpunkt $t < n$:

$$E[CF_t] = p(0, t)(\pi - b^{ad} \mu^\delta(t))$$



Technische Reserve 1.Ordnung

- Basis 1.Ordnung (r^*, μ^*) : sichere Bewertung
- Ausschüttungsquote (Gewinn aus Sicherheit):

$$\delta(t) := (r^\delta - r^*(t))V^*(t) + (\mu^*(t) - \mu^\delta(t))R^*(t)$$

- RGL 1.Ordnung:

$$V^*(t) = E^*[v(t, s)b^{ad}] + \textcolor{red}{b(t)} \cdot E^*[v(t, n)] - \Pi^*(t)$$

$$V^*(t) = E^*[v(0, s)(\pi - b^{ad}\mu^*(s) + \textcolor{red}{\delta(s)})]$$

- Cashflow zum Zeitpunkt $t < n$:

$$E[CF_t] = p(0, t)(\pi - b^{ad}\mu^*(t) + \delta(t))$$



Unverteilte Überschüsse

- reale Basis (r, μ) : gesamte Reserve $U(t)$
- Beitragssatz (tatsächliche Gewinnbeteiligung):

$$c(t) := (\textcolor{red}{r}(t) - r^*(t))V^*(t) + (\mu^*(t) - \textcolor{red}{\mu}(t))R^*(t)$$

- Überschüsse:

$$X(t) := U(t) - V^*(t) = E[v(0, s)(c(s) - \delta(s))]$$

$$X(n) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow X(t) = E[v(t, s)(\delta(s) - c(s))]$$

- Cashflow zum Zeitpunkt $t < n$:

$$E[\text{CF}_t] = p(0, t)(c(t) - \delta(t))$$



Anhang: diskrete Modellierung



temporäre, konstante Rentenversicherung

Kommutation 1. Ordnung:

$$D_x := P(\{X_1 > x\}) \cdot v^x$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot v^t &= \sum_{t=0}^{n-1} P(\{X_1 > x+t\} | \{X_1 > x\}) \cdot v^t \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{P(\{X_1 > x+t\})}{P(\{X_1 > x\})} \cdot \frac{v^{x+t}}{v^x} \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_x}\end{aligned}$$



temporäre, konstante Rentenversicherung

Kommutation 2. Ordnung:

$$N_x := \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t}$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{n-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} &= \frac{1}{D_x} \cdot \left(\sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t} - \sum_{t=n}^{\omega-x-1} D_{x+t} \right) \\ &= \frac{1}{D_x} \cdot \left(\sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t} - \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+n+t} \right) \\ &= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$



Risikolebensversicherung

Kommutation 1. Ordnung:

$$C_x := D_x \cdot q_x \cdot v$$

$$\begin{aligned} A_x &= \sum_{t \geq 0} ({}_t p_x \cdot v^t \cdot q_{x+t} \cdot v) \\ &= \sum_{t \geq 0} \left(\frac{D_{x+t}}{D_x} \cdot q_{x+t} \cdot v \right) \\ &= \sum_{t \geq 0} \frac{C_{x+t}}{D_x} \\ &= \frac{M_x}{D_x} \end{aligned}$$



Gemischte Versicherung

Todesfall:

$$A_{x,\overline{n}|}^1 = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot v^t \cdot q_{x+t} \cdot v = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Erlebensfall:

$${}_n E_x = p_{x+n} \cdot v^n = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Barwert der Versicherung:

$$A_{x,\overline{n}|} = A_{x,\overline{n}|}^1 + {}_n E_x$$



Versicherungen für Paare

- Verbindungsrente:

Überlebenszeit: $T(2) = \min\{X_{1,1} - x_1, X_{1,2} - x_2\}$

$$\Rightarrow \ddot{a}_{x_1, x_2} = \sum_{t \geq 0} {}_t p_{x_1} \cdot {}_t p_{x_2} \cdot v^t$$

- Überlebensrente:

$$\ddot{a}_{x_1, x_2}(c; a, b) = a \cdot \ddot{a}_{x_1} + b \cdot \ddot{a}_{x_2} + (c - a - b) \cdot \ddot{a}_{x_1, x_2}$$



Invalidenversicherung

- Risikoversicherung ohne Erlebensfallkapital
- Invalidierungswahrscheinlichkeit:

$$i_x := {}_1p_x^{ai} + {}_1q_x^{ai} = P(\{X_1 \leq \min\{x+1, X_2\}\} | X_1 > x, X_2 > x)$$

- Leistungsbarwert:

$$A_x = \sum_{t \geq 0} \left({}_tp_x \cdot v^t \cdot (i_{x+t} \cdot L_{x+t}^i \cdot v + q_{x+t}^{aa} \cdot L_{x+t}^d \cdot v) \right)$$

- Unfallversicherung: temporäre Erwerbsunfähigkeit
⇒ Anteil am Einkommensverlust
- Berufsunfähigkeitsversicherung: lebenslänglich

