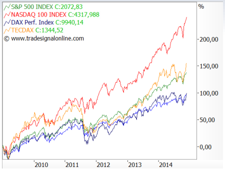


Optionspreistheorie

Seminar

Stochastische Unternehmensmodelle

Lukasz Galecki
Mathematisches Institut
Universität zu Köln

1. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

Definition einer Option 1/2

Eine *Option* ist ein Vertrag, der dem Inhaber das Recht, aber nicht die Pflicht gibt, einen

1. nach Qualität und Volumen spezifizierten Finanztitel
2. zu vorher festgelegten Zeitpunkten
3. zu einem festgelegten Ausübungspreis
4. zu kaufen (*Call*) oder zu verkaufen (*Put*).

Definition einer Option 2/2

$$\begin{array}{llll} \textit{Notation}: & S_t & \widehat{=} & \text{Kurs des Finanztitels („\textit{Underlying}“),} \\ & K & \widehat{=} & \text{Ausübungspreis („\textit{Strike}“).} \\ & C_t & \widehat{=} & \text{Call-Preis zum Zeitpunkt } t \\ & P_t & \widehat{=} & \text{Put-Preis zum Zeitpunkt } t \\ & t & \widehat{=} & \text{Zeitpunkt in bestimmter Periode} \end{array}$$

Übersicht über Optionen 1/3

		Optionsposition	
		Long (Kauf)	Short (Verkauf)
Art der Option	Call	Long Call	Short Call
	Put	Long Put	Short Put

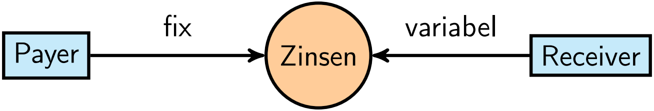
Übersicht über Optionen 2/3

Des Weiteren:
Aufspaltung in amerikanische und europäische Optionen.
Unterschied:

1. Amerikanische Optionen können jederzeit bis zum Verfallsdatum ausgeübt werden.
2. Europäische Optionen hingegen dürfen nur am Verfallsdatum ausgeübt werden.

Übersicht über Optionen 3/3

Zins-Swaps: Austausch von Zinsen gleicher Währung auf einen bestimmten Basisbetrag zwischen zwei Vertragsparteien.



Swaption: Option, zu einem festgelegten Zeitpunkt in einem zuvor festgelegten Zins-Swap einzutreten.

Beispiel 1/3

Situation(in $t = 0$):
Kauf eines europäischen *Call* auf den Erwerb von 100 eBay-Anteilen mit

$$
\begin{aligned}
K &= 100\,€ \\
S_0 &= 98\,€ \\
C_0 &= 5\,€/\text{Schein} \\
&\Rightarrow \text{ Anfangsinvestition: } 500\,€
\end{aligned}
$$

Europäische Option $\Rightarrow$ Nur am Verfalltag ausübbar.

Beispiel 2/3

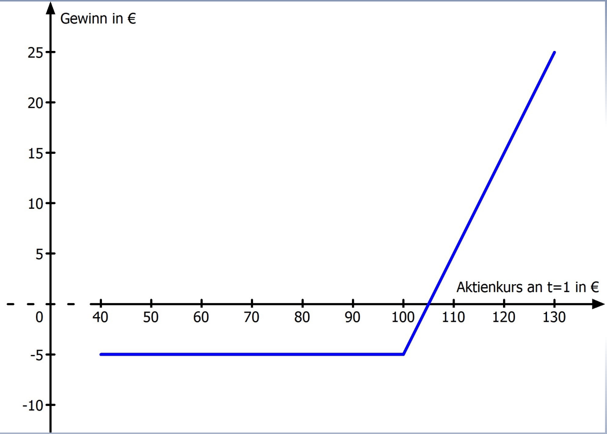


Abbildung: Gewinn bei einer Long Call-Position.

Beispiel 3/3

Situation(in $t = 1$):

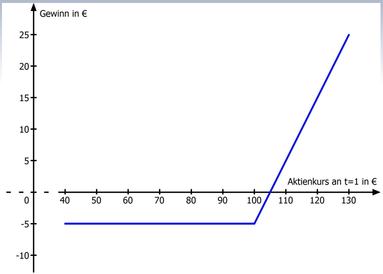
$$S_1 = 115\,€.$$

Kluges Verhalten des Anlegers:
Ausübung der Kaufoption und anschließender Weiterverkauf, da

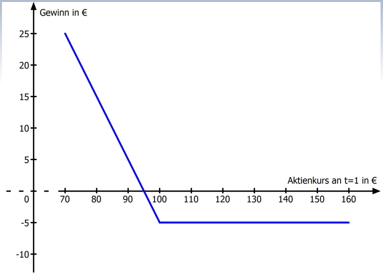
$$\begin{aligned}\text{Gewinn} &= \text{Anzahl Scheine} \cdot \max\left(S_1 - K, 0\right) - \text{Anfangsinvestition}\\ &= 100 \cdot 15\,€ - 500\,€\\ &= 1000\,€,\end{aligned}$$

wobei $\max\left(S_1 - K, 0\right) \mathrel{\widehat{=}}$ Auszahlungsfunktion des europäischen *Call* zum Zeitpunkt $t = 1$.

Folgerung 1/2



(a) Gewinn bei einer Long Call-Position.



(b) Gewinn bei einer Long Put-Position.

Abbildung: Gewinn bei einer Long-Position.

Folgerung 2/2

Optionen sollten i. d. R. dann ausgeübt werden, wenn der Anleger

1. in der Long Call-Position oder Short Put-Position steht und $S_1 > S_0$,
2. in der Long Put-Position oder Short Call-Position steht und $S_1 < S_0$.

Welche Methoden/ Modelle gibt es?

1. Cox-Ross-Rubinstein-Modell (Binomialmodell diskreter Ansatz)
2. Black-Scholes-Modell (Binomialmodell stetiger Ansatz)
3. Merton-Modell (zufällige Sprünge)
4. Heston-Modell (keine konstante Volatilität)
5. Bates-Modell (Kombination aus Merton und Heston)

Grundlage der meisten Modelle:
Geometrisch Brownsche Bewegung

Gemeinsame Annahmen der Modelle

Ausgegangen wird von folgenden Annahmen:

- Arbitragefreiheit (kein risikoloser Gewinn)
- Keine Transaktionskosten
- Existenz von risikofreiem Zins r

Beispiel zur Berechnung eines Put im Einperioden-Fall 1/4

Ang. $K = 100\,€$, $S_0 = 100\,€$, $r = 0{,}1$ und es seien die folgenden zwei Szenarien gegeben:

up: $S_1(u) = 125\,€ \Rightarrow P(u) = 0\,€$

$S_0 = 100\,€$

down: $S_1(d) = 80\,€ \Rightarrow P(d) = 20\,€$

Frage: Wie viel ist der *Put* zum Zeitpunkt $t = 0$ Wert?

Beispiel zur Berechnung eines Put im Einperioden-Fall 2/4

Einzige Annahme: Keine Arbitragemöglichkeiten!
Betrachtet wird ein Portfolio bestehend aus

1. Long-Position in einer Verkaufsoption und in x Aktien

Szenario 1 (up) tritt ein $\Rightarrow$ Gesamtwert Portfolio: $125x$

Szenario 2 (down) tritt ein $\Rightarrow$ Gesamtwert Portfolio: $80x + 20$

Beispiel zur Berechnung eines Put im Einperioden-Fall 3/4

Portfolio ist risikolos, falls

$$
\begin{aligned}
125x &= 80x + 20. \\
\Rightarrow \quad x &= \frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

Risikoloses Portfolio:
Long : 1 Option (*Put*) und $\frac{4}{9}$ Aktien
Wert des Portfolios zum Zeitpunkt $t = 1$: $\frac{500}{9}$ €

Beispiel zur Berechnung eines Put im Einperioden-Fall 4/4

$$\text{Rendite risikoloses Portfolio} \stackrel{!}{=} \text{risikoloser Zinssatz}$$

Wert des Portfolios heute (diskrete Abzinsung):

$$\begin{aligned} & y &=& \frac{500}{9}\frac{1}{1+r} &=& 50{,}51\,€ \\ \Rightarrow & & & S_0 x + P_0 &=& y \\ \Leftrightarrow & & & P_0 &=& 6{,}06\,€ \end{aligned}$$

Allgemein im Einperioden-Fall 1/3

Für die zwei Szenarien ist der Wert des Portfolios bei

$$\begin{aligned} &\textbf{Anstieg} \text{ von } S_0: && S_0 u x + P(u)\,, \\ &\textbf{Fall} \text{ von } S_0: && S_0 d x + P(d)\,, \end{aligned}$$

wobei $u - 1$ und $1 - d$ $\widehat{=}$ relativer Anstieg/ relative Abnahme des Kurses S_0 $(u > 1, d < 1)$.

Allgemein im Einperioden-Fall 2/3

Bildung des risikolosen Portfolios:

$$
\begin{aligned}
& & S_0ux + P(u) &= S_0dx + P(d) \\
&\Leftrightarrow & x &= \frac{P(d) - P(u)}{S_0u - S_0d}
\end{aligned}
$$

Gesamtwert Portfolio (heute):

$$\frac{S_0dx + P(d)}{1 + r}$$

Allgemein im Einperioden-Fall 3/3

Kosten für Bildung des Portfolios:

$$S_0 x + P_0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{S_0 dx + P(d)}{1+r} &= S_0 x + P_0 \\
\Leftrightarrow \quad P_0 &= \frac{S_0 dx + P(d)}{1+r} - S_0 x \\
&= \frac{1}{1+r} \left[p^* P(u) + (1-p^*) P(d) \right],
\end{aligned}$$

da $x = \frac{P(d)-P(u)}{S_0 u - S_0 d}$ und $p^* := \frac{1+r-d}{u-d}$.

Allgemein im n-Perioden-Fall 1/2

Für dem 2-Perioden-Fall ergibt sich daraus:

$$
\begin{aligned}
P(u) &= \frac{1}{1+r}\left[p^* P(u,u) + (1-p^*) P(u,d)\right] \\
P(d) &= \frac{1}{1+r}\left[p^* P(d,u) + (1-p^*) P(d,d)\right] \\
\Rightarrow \quad P_0 &= \frac{1}{1+r}\left[p^* P(u) + (1-p^*) P(d)\right]
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{(1+r)^2}\left[{p^*}^2 P(u,u) + 2p^*(1-p^*) P(u,d) + (1-p^*)^2 P(d,d)\right]
$$

Allgemein im n-Perioden-Fall 2/2

Per vollständiger Induktion folgt der n-Perioden Fall:

$$P_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{n-k} P(u(k), d(n-k))$$

Analog zu der Herleitung folgt für den Preis des *Call* in $t = 0$:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{n-k} C(u(k), d(n-k))$$

Bemerkung:

1. Optionspreise $\sim$ Bin(n,k).
2. Cox-Ross-Rubinstein-Modell.
3. Black-Scholes-Modell bei stetigen Zeitschritten (stetiger Verzinsung)

Bewertung amerikanischer Optionen

Berechnung amerikanischer Optionen schwierig, da

- kein eindeutiges Verfallsdatum
- keine explizite Formel mit Standardfunktionen

$\Rightarrow$ **Lösungsansatz:** numerische Approximationen

Risikoneutrale Bewertung 1/5

Interpretation der Variable p^*:

Ang.	p^*	$\widehat{=}$ Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung.
$\Rightarrow$	$1 - p^*$	$\widehat{=}$ Wahrscheinlichekit einer Abwärtsbewegung
$\Rightarrow$	P_0 bzw. C_0	$\widehat{=} \mathbb{E}\left[P_T\right]$ bzw. $\mathbb{E}\left[C_T\right]$ diskontiert mit r,
	T	$\widehat{=}$ betrachteter Zeitpunkt

Risikoneutrale Bewertung 2/5

Bezeichne nun p^* die Wahrscheinlichkeit des Kursanstiegs.

$$\Rightarrow \qquad \mathbb{E}\left[S_T\right] = p^* S_0 u + (1 - p^*)\, S_0 d$$
$$= p^* S_0 \,(u - d) + S_0 d$$

Aus $p^* = \frac{(1+r)^T - d}{u-d}$ folgt

$$\mathbb{E}\left[S_T\right] = S_0 \,(1 + r)^T . \tag{1}$$

Risikoneutrale Bewertung 3/5

$$\Rightarrow \quad p^* \mathrel{\widehat{=}} \text{Wahrscheinlichkeit Aufwärtsbewegung}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Rendite Aktie} = r$$

Risikoneutrale Bewertung 4/5

In einer *risikoneutralen Welt*

1. sind Individuen gleichgültig gegenüber Risiken,
2. gilt $\mathbb{E}\left[\rho\right] = r$, wobei $\rho \mathrel{\widehat{=}} \text{Rendite}, (1)$
3. entspricht p^* der Wahrscheinlichkeit einer Aufwärtsbewegung,
4. gilt $\text{Optionswert} = \mathbb{E}\left[\text{Option}_T\right](1+r)^{-T}$.

$\Rightarrow$ **Allgemeines Prinzip der Optionsbewertung:**
Risikoneutrale Bewertung

Risikoneutrale Bewertung 5/5

Aussagen des Prinzips:

1. Für die Bewertung einer Option können wir annehmen, die Welt sei *risikoneutral*.
2. Der auf diesem Weg erhaltene Preis ist nicht nur in der risikoneutralen Welt, sondern auch in der realen Welt korrekt.

Ende

Quelle : `http://www.br.de/radio/bayern2/programmkalender/sendung302770.html`

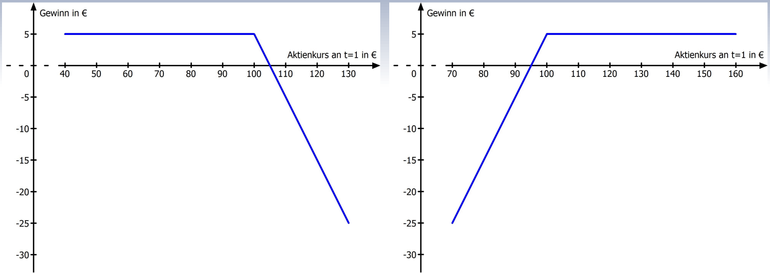
Noch Fragen?

Optionsbereiche

In vielen Bereichen wird mit Optionen gehandelt:

1. Aktien
2. Indizes (z. B. DAX)
3. Währungen
4. Anleihen
5. Rohstoffe
6. elektrische Energie etc.

Gewinn bei Short-Positionen



(a) Gewinn bei einer Short Call-Position.

(b) Gewinn bei einer Short Put-Position.

Abbildung: Gewinn bei einer Short-Position.