Curve Fitting und Replicating Portfolios

Robin Weber

27. Juni 2015

Gliederung

- Curve Fitting (CF)
  - Allgemein
  - Regression
  - Interpolation
    - Interpolationsproblem
    - Lineare Interpolation
    - Kubische Splines
  - Beispiel
  - Regression vs. Interpolation

Gliederung

- Bestimmung des SCR
  - Allgemein
  - Bestimmung des SCR mittels CF
    - Verfahrensablauf
    - SCR-Berechnung
    - Genauigkeit
    - Probleme
  - Warum werden Verfahren wie CF und RP benutzt?
- Replicating Portfolios (RP)
  - Grundidee
  - Fazit

Curve Fitting

Allgemein

Allgemein

- Verfahren zum Konstruieren einer mathematische Funktion, an eine Reihe von Datenpunkten
- Lösungsansätze:
  - Interpolation, welches zu einer exakten Anpassung der Daten führt
  - Regression, in welcher eine Funktion konstruiert wird, welche die Datenpunkte approximiert
- Hilfsmittel zur Datenvisualisierung, um auf Werte einer Funktion in denen keine Daten vorliegen zu schließen
- Hauptsächlich wird es im Vereinigten Königreich angewendet, in Deutschland wird es selten benutzt

Regression

Kleinste Quadrate

Kleinste Quadrate

- Möglichkeit eine Funktion zu finden, welche die gegebenen Daten approximiert
- Die Regressionsanalyse wurde bereits in einem vorherigen Vortrag behandelt

Interpolation

Interpolationsproblem

Interpolationsproblem

- Es wird eine Funktion gesucht, deren Graph durch bestimmte Punkte (x_i,y_i) ,$i=0,...,n$,verläuft

- Die x_i werden Knoten oder Stützstellen, die y_i Stützwerte genannt

- Der Einfachheit halber: Stützstellen sind paarweise verschieden

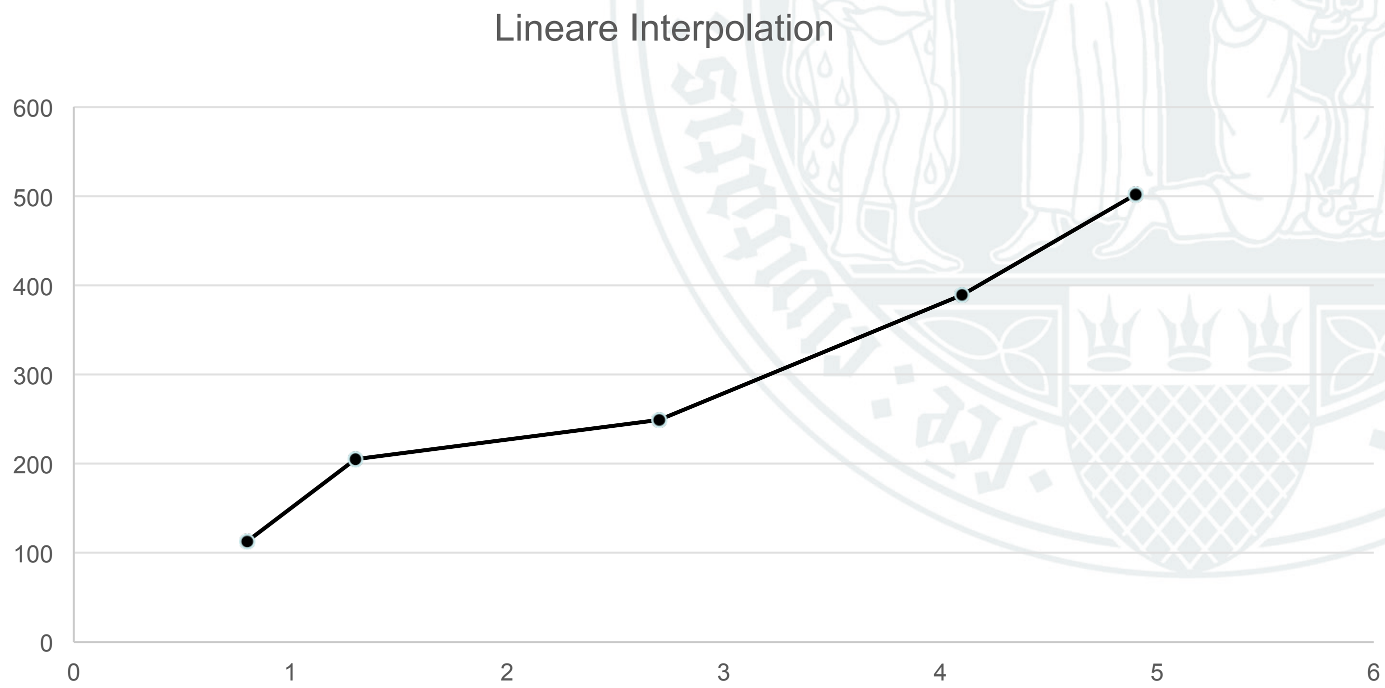
Interpolation

Lineare Interpolation

Lineare Interpolation (1/2)

- Die Punkte werden durch eine gerade Linien verbunden
- Die Funktion die sich daraus ergibt ist:
  - $f(x)\uparrow = y0 + y1 - y0 / x1 - x0 * (x - x0)$
- Vorteil: Werte sind leicht zu berechnen
- Große Nachteil: Stützstellen sind nicht differenzierbar

Lineare Interpolation (2/2)



Interpolation

Kubische Splines

Kubische Splines (1/3)

- Glatte Kurve, also zweimal stetig differenzierbar
- Zwischen je zwei Punkten wird mit einer kubische Parabel $a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$ interpoliert
- Stützstellen der Kurve stellen Nahtstellen zwischen den Teilkurven dar
- Funktionswerte, erste und auch zweite Ableitung der zusammentreffenden Teilkurven sollen übereinstimmen

Kubische Splines (2/3)

- Die Näherungspolynome müssen die folgenden Anschluss- und Randbedingungen erfüllen:
- **1) Spline enthält die Stützstellen:**
  - $p_1(x_0) = y_0$, $p_i(x_i) = y_i$ für $i=1,\dots,n$
- **2) Stetigkeit an den Stützstellen:**
  - $p_i(x_i) = p_{i+1}(x_i)$ für $i=1,\dots,n-1$
- **3) Gleiche Steigung:**
  - $p_i'(x_i) = p_{i+1}'(x_i)$ für $i=1,\dots,n-1$
- **4) Gleiche Krümmung:**
  - $p_i''(x_i) = p_{i+1}''(x_i)$ für $i=1,\dots,n-1$

Kubische Splines (3/3)

- Randbedingungen:
- **1) Natürliche Randbedingungen:**
  - $p''(x_0) = 0 \qquad p''(x_n) = 0$
- **2) Vorgabe von Randableitungen:**
  - $p'(x_0) = c \qquad p'(x_n) = d$
- **3) Periodizitätsforderung:**
  - $p(x_0) = p(x_n) \qquad p'(x_0) = p'(x_n) \qquad p''(x_0) = p''(x_n)$

Beispiel

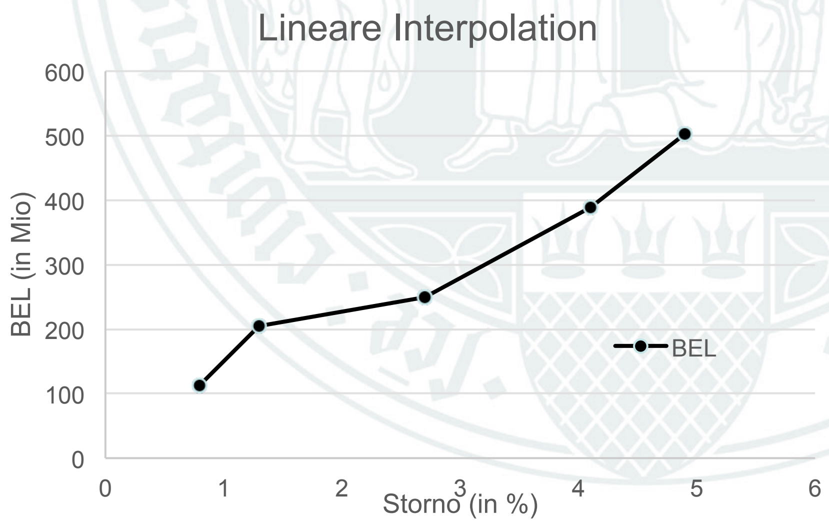
BEL in Abhängigkeit der Stornorate
Interpolation vs. Regression

Beispiel (1/5)

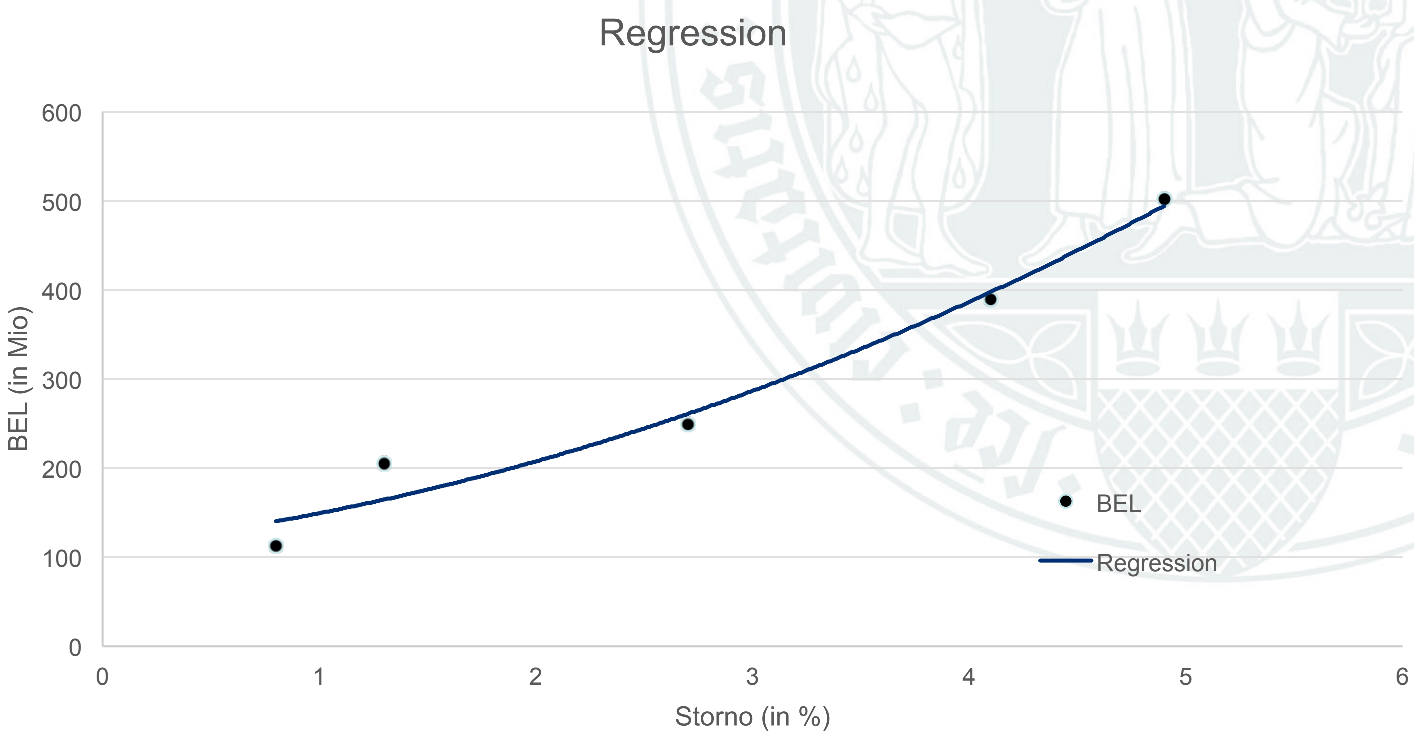
- Wie genau finden diese Verfahren in der Praxis nun Anwendung?
- Z.B. möchte man die Auswirkung des Stornoverhaltens von Versicherten auf die BEL bestimmen
- Mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen werden einige wenige Punkte exakt berechnet
- Mit diesen Punkten wird nun eine Regression oder Interpolation durchgeführt

Beispiel (2/5)

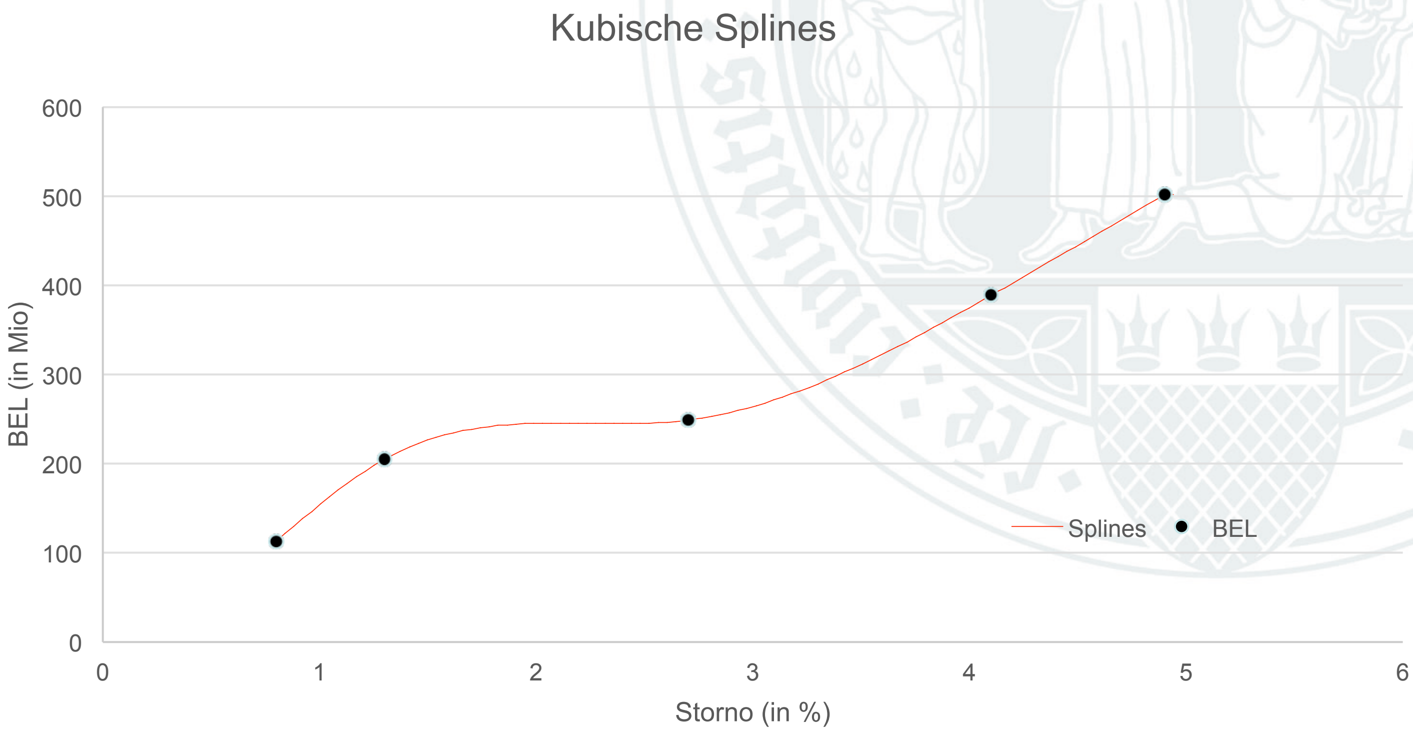
Messpunkte	Stornorate (%)	BEL (Mio)
1	0,8	113
2	1,3	205
3	2,7	249
4	4,1	389
5	4,9	502



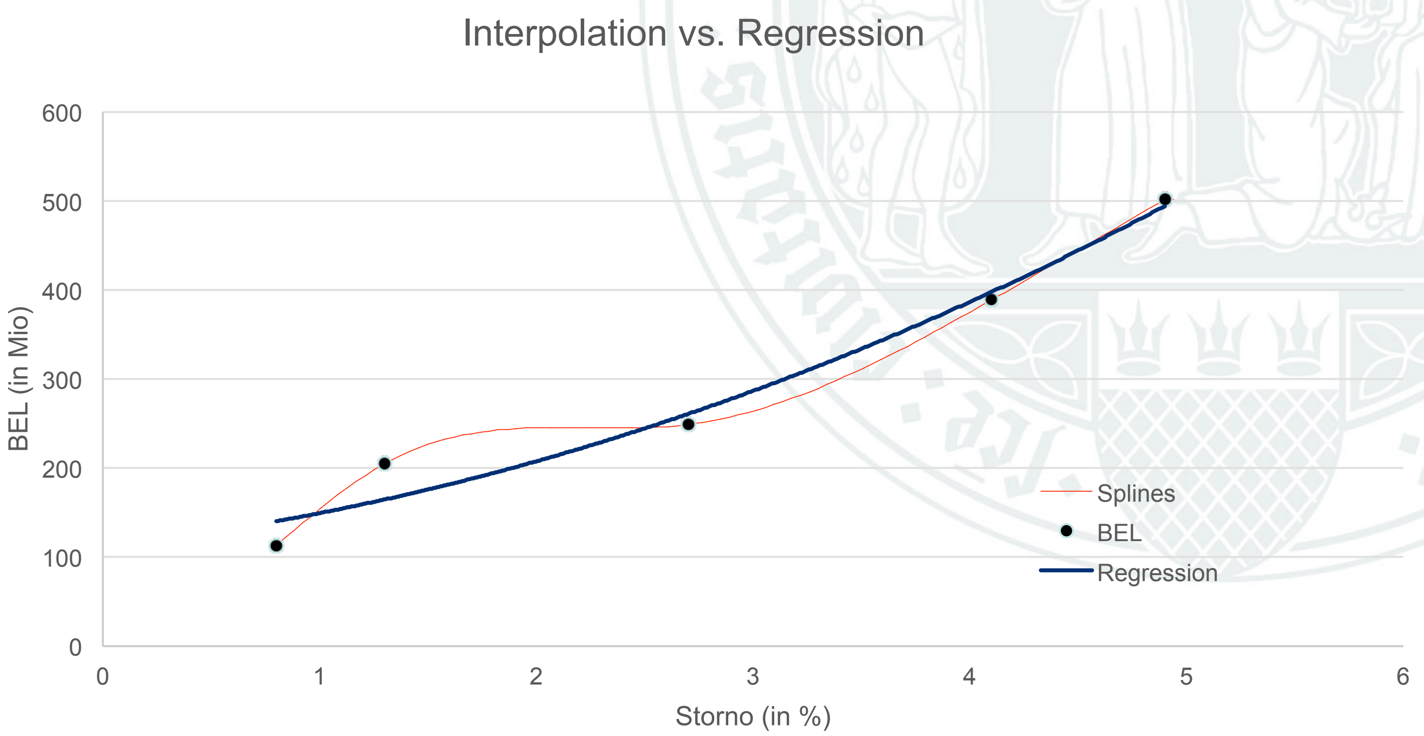
Beispiel (3/5)


Regression
600
500
400
300
200
100
0
BEL (in Mio)
0
1
2
3
4
5
6
Storno (in %)
BEL
Regression

Beispiel (4/5)


Kubische Splines
600
500
400
300
200
100
0
BEL (in Mio)
0
1
2
3
4
5
6
Storno (in %)
Splines
BEL

Beispiel (5/5)



Interpolation vs. Regression
600
500
400
300
200
100
0
BEL (in Mio)
0
1
2
3
4
5
6
Storno (in %)
Splines
BEL
Regression

Regression vs. Interpolation

- Regression:
  - Bei vielen Punkten kleine Fehler, die sich aber ausgleichen
  - Am Rand weicht die Funktion oft stark von den eigentlichen Werten ab
- Lineare Interpolation:
  - Trends zwischen Punkten kann nicht erfasst werden
  - Kein realistischer Trend am Rand vorhersagbar
- Spline-Interpolation:
  - Am genausten aber sehr rechenaufwendig
  - Es gibt mehrere Polynome
- In der Praxis wird oft Regression oder lineare Interpolation benutzt
- Splines werden eher selten benutzt

Bestimmung des SCR

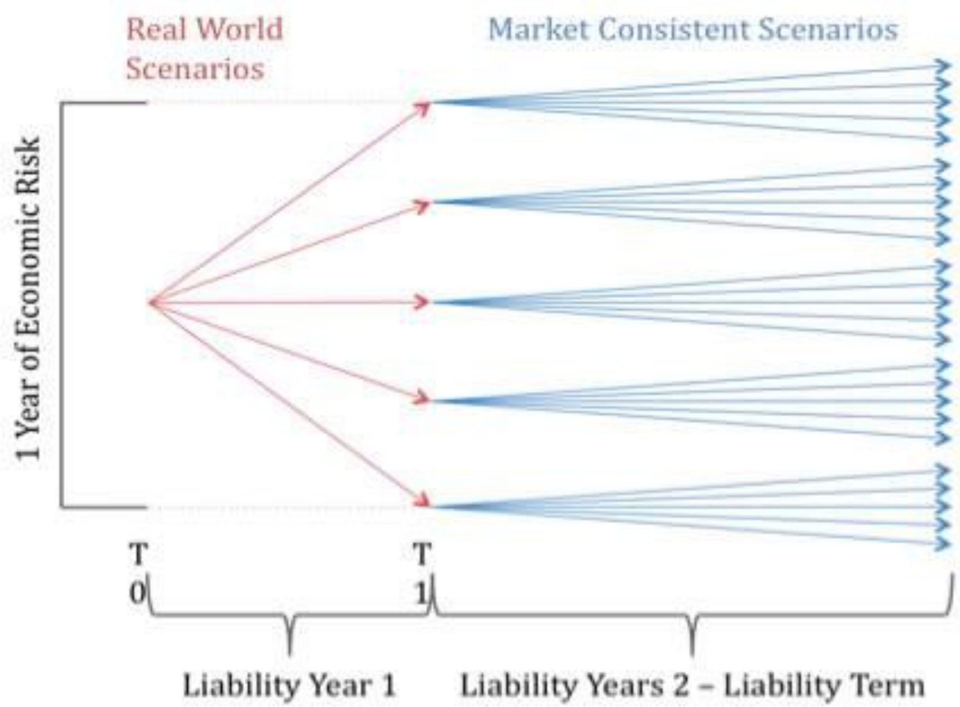
Allgemein

SCR - Allgemein

- Das Solvency Capital Requirement, SCR, ist eine Sollgröße für das Eigenkapital

- **Nested Stochastic:**
  - Es wird eine große Anzahl von real-world Szenarien generiert
  - Am Ende des ersten Jahres werden die Werte für die Aktiva und Passiva von dem Unternehmen berechnet

SCR – Nested Stochastic



Quelle: Calculating the solvency capital requirement, part 2

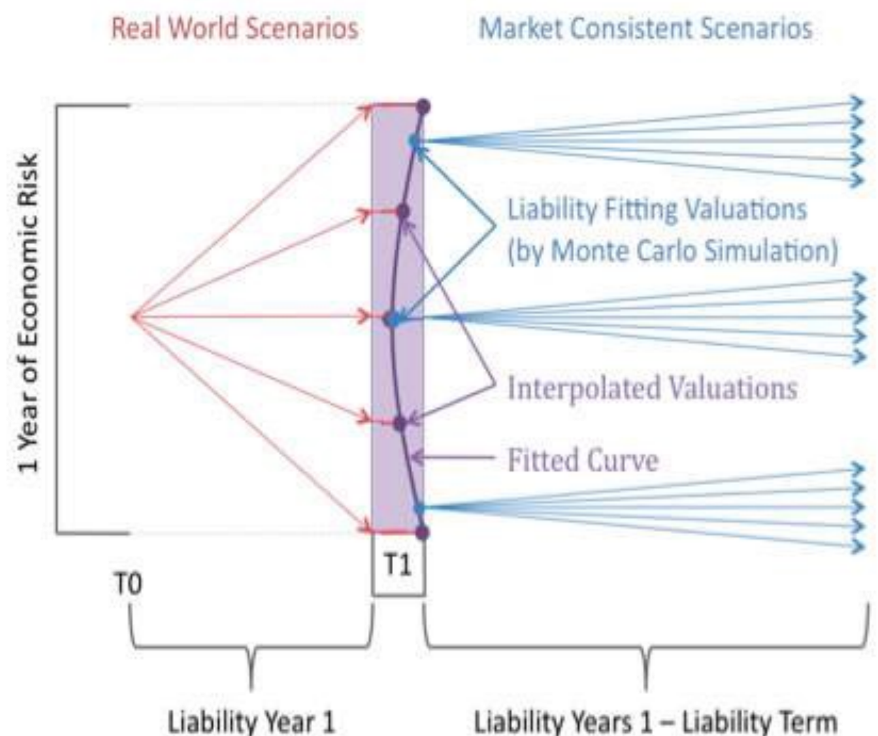
SCR mit Curve Fitting

Verfahrensablauf

SCR - Verfahrensablauf

- Grundidee: Nested stochastic Kalkulierung beschleunigen mithilfe von Interpolation bzw. Regression
- Mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen werden einige wenige Punkte exakt berechnet (Unterschied zum LSMC)
- Interpolation bzw. Regression durch die berechneten Punkte
- Punkte wegschmeißen und Funktion zur Berechnung benutzen

SCR - Verfahrensablauf



Quelle: Calculating the solvency capital requirement, part 2

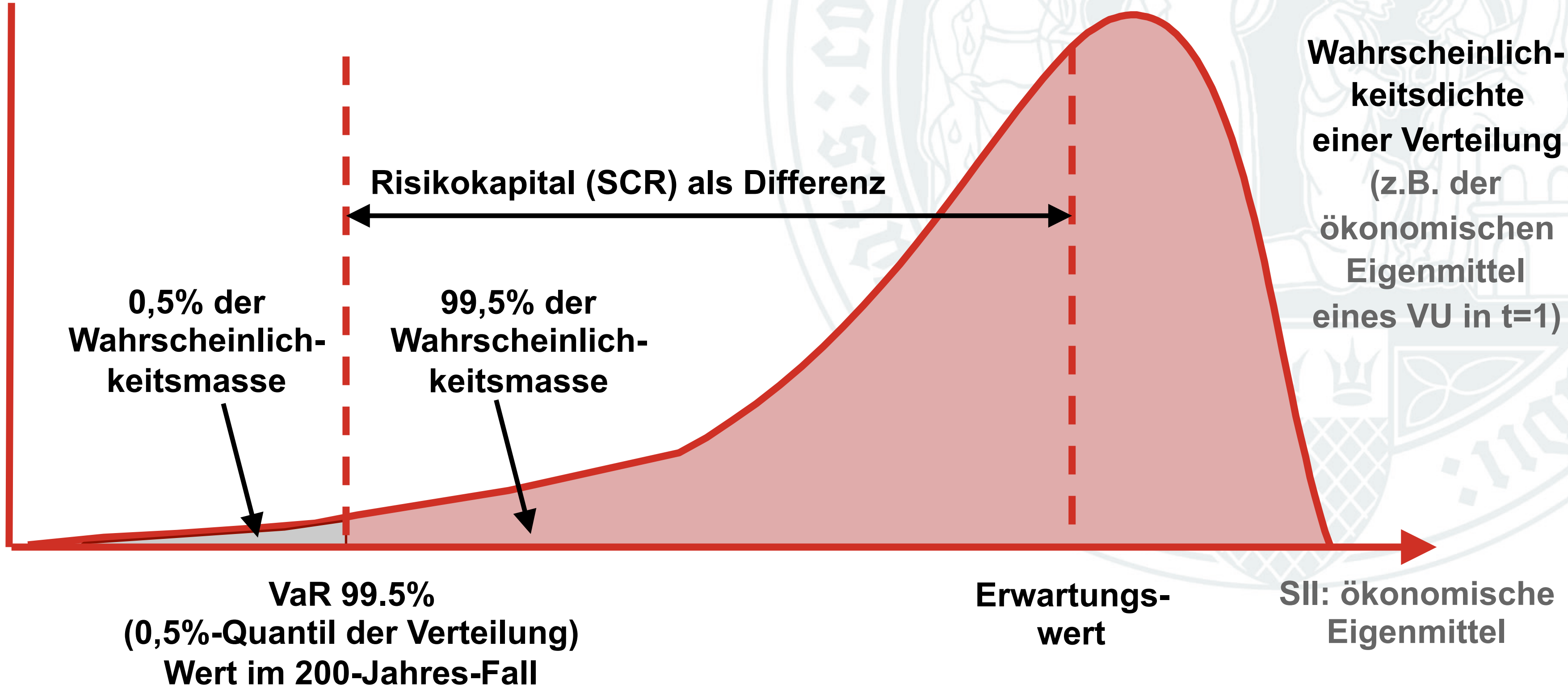
SCR mit Curve Fitting

SCR Berechnung

SCR Berechnung

- Kalkulation: nutzen der approximierten Kurve
- Benötigte Kapital: Erwartetes Eigenkapital subtrahiert mit dem 99,5% schlechteste Resultat

SCR Bestimmung



Quelle: Generali Solvency-2-Schulungskonzept

SCR mit Curve Fitting

Genauigkeit

SCR – Genauigkeit (1/2)

- Versicherungsportfolien haben viele Typen von Risiken
- Angenommen, dass unsere Verbindlichkeiten, L, ein Standard Polynom von Grad 3 mit Risikotreibern R_1 und R_2 ist
- Dieses Polynom sieht folgendermaßen aus:

$$L(R_1,R_2) = \underbrace{a_0}_{\text{Constant}} + \underbrace{a_1R_1 + a_2R_1^2 + a_3R_1^3}_{\text{Terms in risk 1}} + \underbrace{a_4R_2 + a_5R_2^2 + a_6R_2^3}_{\text{Terms in risk 2}} + \underbrace{a_7R_1R_2}_{\text{Power 2 cross terms}} + \underbrace{a_8R_1^2R_2 + a_9R_1R_2^2}_{\text{Power 3 cross terms}}$$

Quelle: Calculating the solvency capital requirement, part 2

SCR – Genauigkeit (2/2)

- Erhöhung der Anzahl der Risikotreiber oder des Grades des Polynoms würde die Genauigkeit der Approximation verbessern
- Allerdings erhöht sich so die Anzahl der Terme der Funktion, die Anzahl der Koeffizienten und die Anzahl der Nebenrechnungen
- Annahme: weniger wichtige Koeffizienten sind 0
- Dadurch wird Zeit bei der Kalkulierung gespart

SCR mit Curve Fitting

Probleme

SCR - Probleme

- Laufzeit
- Stichprobenfehler
- Auswählen der Szenarien
- Die approximierte Funktion
- Schätzfehler

SCR mit Curve Fitting

Warum werden solche Verfahren benutzt?

SCR – Warum werden solche Verfahren benutzt?

- Die Berechnung mit der Pricing-Maschine ist sehr zeitaufwendig
- CF/RP sollen die Pricing-Maschine ersetzen
- Das Polynom kann schnell und einfach ausgewertet werden

Replicating Portfolios

Grundidee

Grundidee (1/2)

- Replikation: Methode zur Bewertung von Optionen oder anderen schwer zu bewertenden Kontrakten

- Ein Replikationsportfolio ist die Nachbildung der Auszahlungsstruktur eines Versicherungsportfolios durch eine Kapitalanlage

Grundidee (2/2)

- Idee: Bildung eines Replikationsportfolios welches
  - Gleiche generierte Werte liefert
  - Leichter zu berechnen ist

- Ein RP kann wie folgt aussehen:
  - $RP = a_1*ZCB_1 + a_2*ZCB_2 + a_3*Put_1 + a_4*Call_1 + \ldots$

Replicating Portfolios

Fazit

Fazit

- RP verwenden Kapitalmarktinstrumente zur Replikation der Cashflows aus Versicherungsverträgen
- Für Zinsgarantien und Beitrags-Cashflows plausibel aber für Sterblichkeiten und Invalidität nicht möglich
- Markt- und Kreditrisiken werden durch Kapitalmarktinstrumente repliziert
- Die versicherungstechnischen Risiken werden ähnlich wie in der Standardformel behandelt
- CF und LSMC dagegen behandeln alle Risikofaktoren

Quellen

- https://sofsdav.uni-koeln.de/public/z/znikolic/LSMC-Literatur/Adam/A%20primer%20in%20replicating%20portfolios%20_%20InsuranceERM.pdf
- https://sofsdav.uni-koeln.de/public/z/znikolic/LSMC-Literatur/Adam/Using%20replicating%20portfo...pdf
- https://sofsdav.uni-koeln.de/public/z/znikolic/LSMC-Literatur/Adam/Calculating%20the%20solvency...part1.pdf
- https://sofsdav.uni-koeln.de/public/z/znikolic/LSMC-Literatur/Adam/Calculating%20the%20solvency...part2.pdf
- https://sofsdav.uni-koeln.de/public/z/znikolic/LSMC-Literatur/Adam/Calculating%20the%20solvency...part3.pdf
- HEAVY MODELS, LIGHT MODELS AND PROXY MODELS by Christopher Hursey*, Matthew Cocke, Cassandra Hannibal, Parit Jakhria, Iain MacIntyre and Matthew Modisett presented in London: 24 February 2014
- Generali Solvency-2-Schulungskonzept

ENDE