
Financial Mathematics in Insurance

Stochastische Unternehmensmodelle – wie und wofür Mathematiker ein ganzes Unternehmen in einer Software abbilden

Insight Vortragsreihe: Putting theory into practice

24. Oktober 2016 Universität Bonn

Dr. Zoran Nikolić, Aktuar, Dozent Deutsche Aktuarakademie
Dr. Christian Weiß, Aktuar, Dozent Technische Hochschule Köln

Agenda

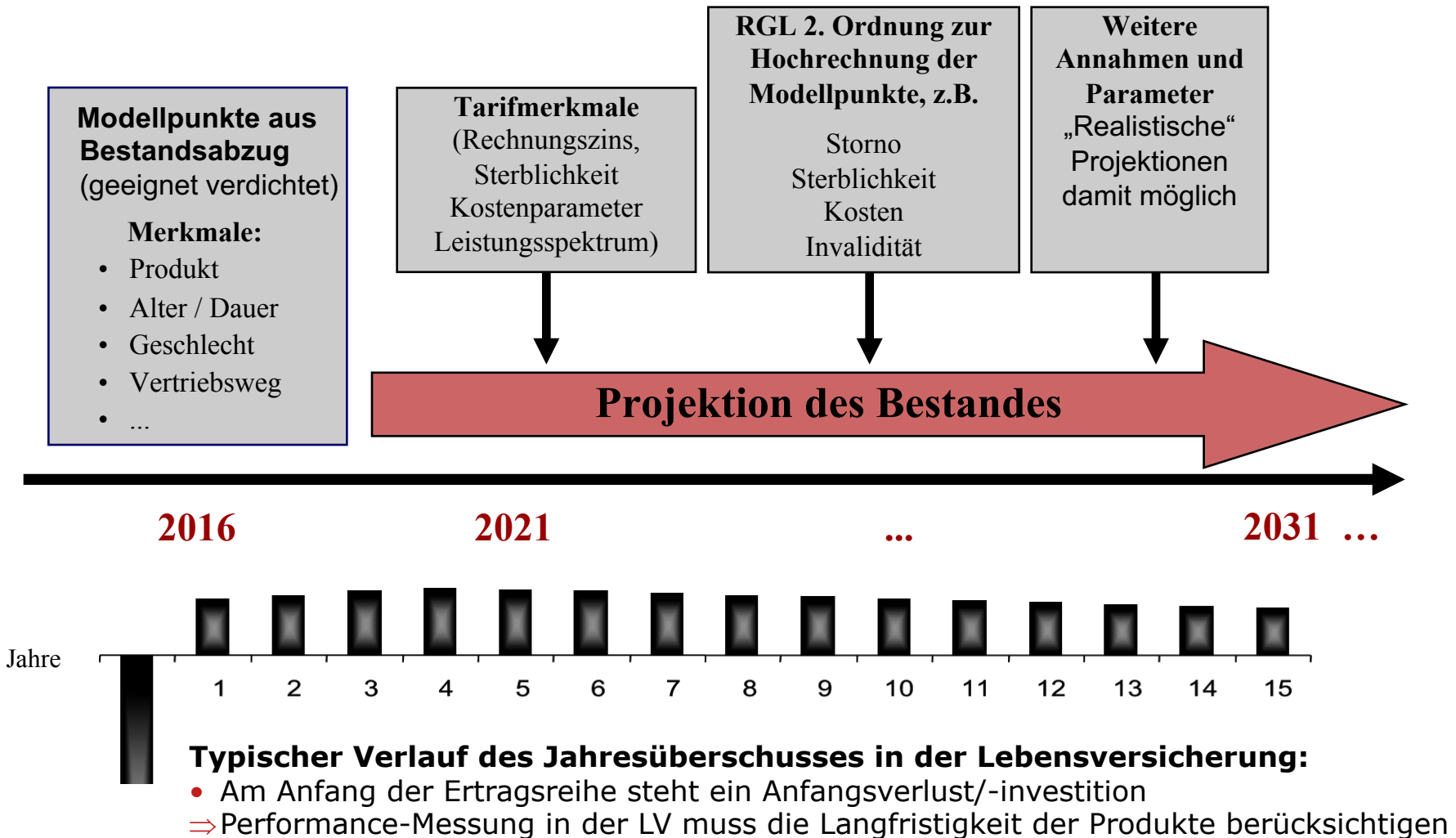
- **Projektionsmodelle in der Personenversicherung**
- Garantien und Optionen
- Stochastisches Unternehmensmodell
- Bestimmung des SCR unter Solvency II

- Least Squares Monte Carlo (LSMC) Methodik
- Stetigkeit und Konvergenz der Unternehmenswert-Funktion
- Algorithmus zur Herleitung von Polynomen

- Zusammenfassung
- Informationen zur Karriere als Aktuar

Deutsches Leben- bzw. Krankengeschäft ist langfristig. Ob sich ein Vertrag die Versicherung gelohnt hat, wird erst nach Jahrzehnten bekannt

Zu Beginn Abschlusskostenbelastung



Die Dividendenauszahlungen hängen von der Kapitalmarktentwicklung ab; der Wert des Unternehmens wird als Wert eines „Derivats“ verstanden

Das Konzept des PVFP = Present Value of Future Profits

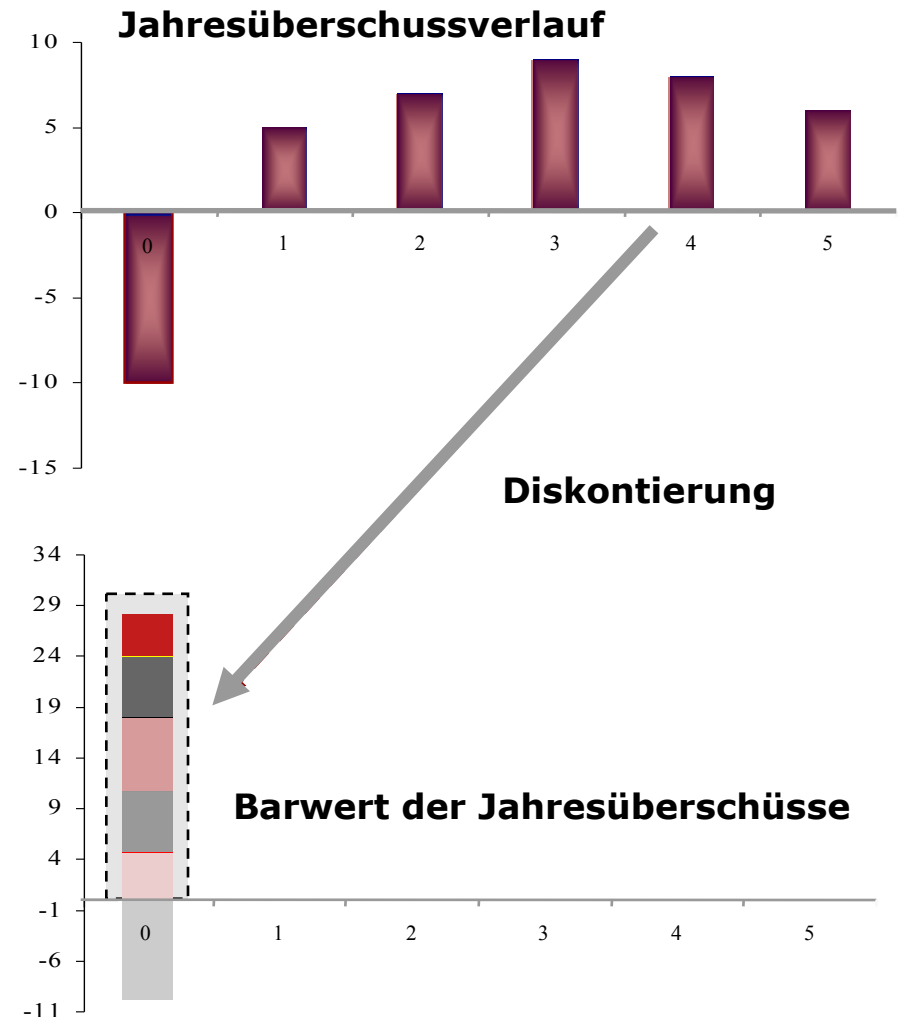
- Abwicklung des Bestandes und Projektion der GuV und Bilanz (für vorgegebenen Projektionszeitraum)
- Diskontierung zukünftiger Jahresüberschüsse

$$PVFP_t = \sum_{j=t+1}^{\omega} J\ddot{U}_j \cdot (1+d)^{-j}$$

$J\ddot{U}_j$ = Jahresüberschuss in Periode j

d = Diskont

ω = 60 Jahre nach Beginn der Projektion



Agenda

- Projektionsmodelle in der Personenversicherung
- **Garantien und Optionen**
- Stochastisches Unternehmensmodell
- Bestimmung des SCR unter Solvency II

- Least Squares Monte Carlo (LSMC) Methodik
- Stetigkeit und Konvergenz der Unternehmenswert-Funktion
- Algorithmus zur Herleitung von Polynomen

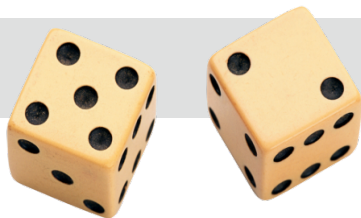
- Zusammenfassung
- Informationen zur Karriere als Aktuar

Die Verträge der Lebens- und Krankenversicherungen enthalten zahlreiche Garantien und Optionen

Warum müssen zur Bewertung Tausende von Szenarien ausgewertet werden?

Tausende von Szenarien

- Bewertung von Optionen und Garantien in den Versicherungsverträgen
- Sie ähneln einigen Finanzinstrumenten wie Swaps, Swaptions usw.
- Asymmetrien im Geschäftsmodell
- Aber: Es existieren keine analytischen Formeln für diese Garantien und Optionen



Monte-Carlo-Simulationen!

Agenda

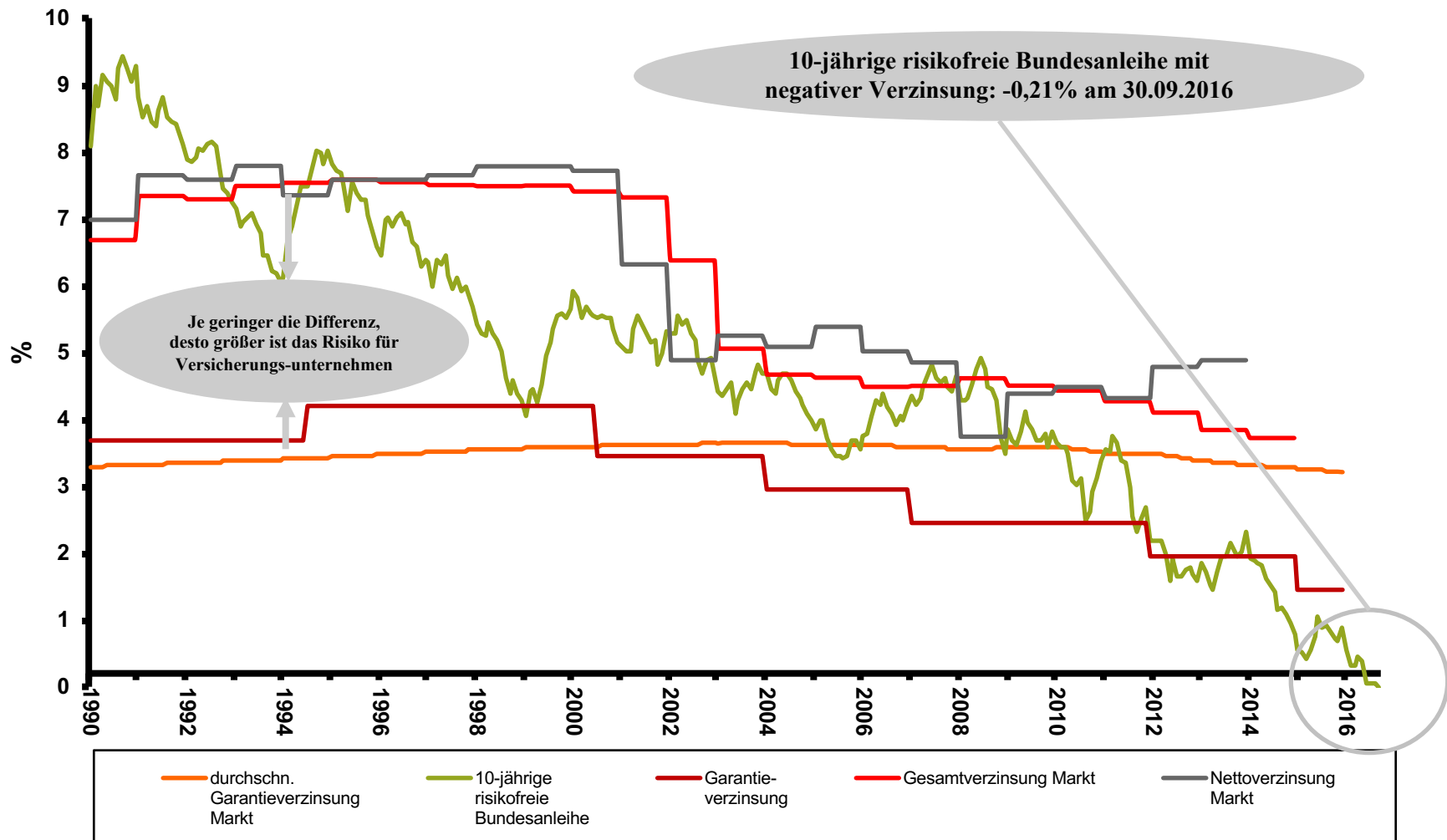
- Projektionsmodelle in der Personenversicherung
- Garantien und Optionen
- **Stochastisches Unternehmensmodell**
- Bestimmung des SCR unter Solvency II

- Least Squares Monte Carlo (LSMC) Methodik
- Stetigkeit und Konvergenz der Unternehmenswert-Funktion
- Algorithmus zur Herleitung von Polynomen

- Zusammenfassung
- Informationen zur Karriere als Aktuar

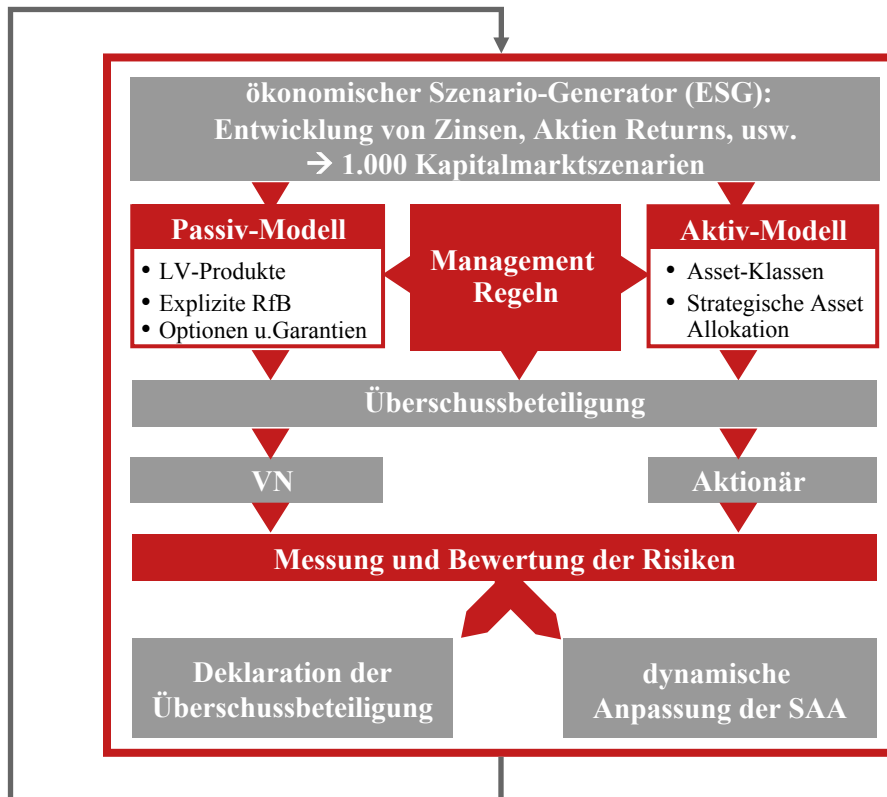
Bewertung von Finanzgarantien: Hier reicht die Betrachtung eines deterministischen Szenarios nicht mehr aus

Methoden der Finanzmathematik erforderlich



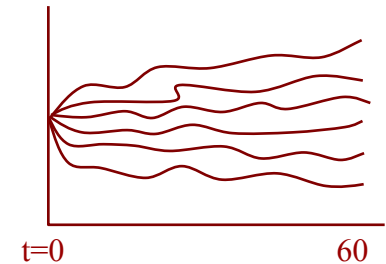
Ein stochastisches Unternehmensmodell besteht aus Aktiva, Passiva, Kapitalmarkt und Managementregeln

Typische Komponenten eines Modells



• Kapitalmarktmodell:

- Abbildung des ökonomischen Umfelds
- Ergebnis: 1000 Simulationenpfade über 60 Jahre mit der Wertentwicklung von Aktien, Immobilien, Zinsen, ...



• Aktivmodell

- Abbildung der Kapitalanlage (Aktien, Immobilien, Bonds, Cash, Swaptions, Swaps, Callables, Vorkäufe)

• Passivmodell

- Abbildung der Passivseite (Produkte, VT)

• Managementmodell

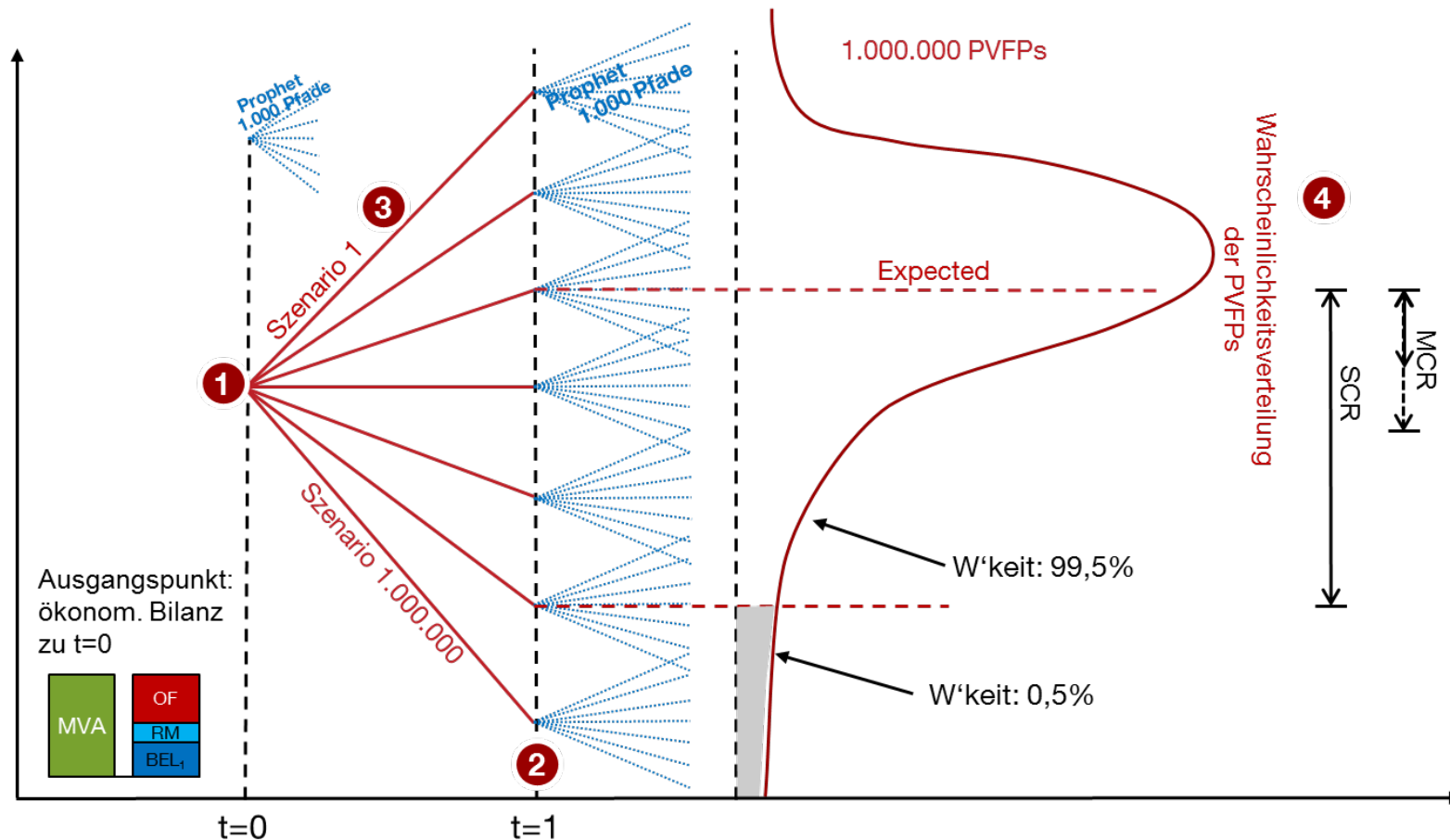
- Verknüpfung von Aktiv- und Passivseite
- Wie reagiert die Unternehmensleitung auf gewisse Ereignisse

Agenda

- Projektionsmodelle in der Personenversicherung
- Garantien und Optionen
- Stochastisches Unternehmensmodell
- **Bestimmung des SCR unter Solvency II**
- Least Squares Monte Carlo (LSMC) Methodik
- Stetigkeit und Konvergenz der Unternehmenswert-Funktion
- Algorithmus zur Herleitung von Polynomen
- Zusammenfassung
- Informationen zur Karriere als Aktuar

Bestimmung des SCR-Bedarfs mittels der vollen (empirischen) Verteilung der PVFPs (= Unternehmenswerte); „Nested Stochastics“

Solvency-II-Anforderungen



- 1 Bestimmung und Modellierung der Risikotreiber
- 2 Bestimmung der Eigenmittel in t=1 (Millionen Szenarien)
- 3 Generierung der Real World Szenarien
- 4 Bestimmung des Risikokapitals

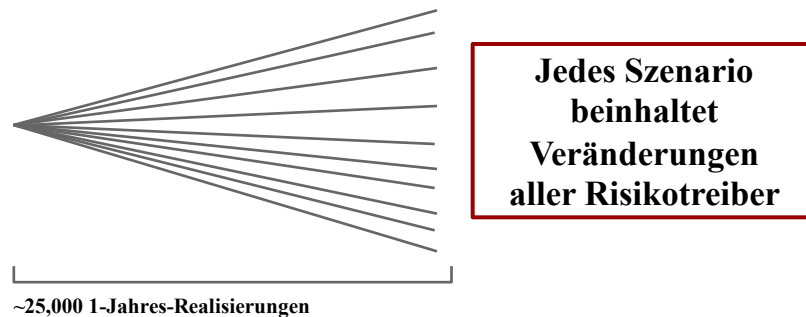
Agenda

- Projektionsmodelle in der Personenversicherung
- Garantien und Optionen
- Stochastisches Unternehmensmodell
- Bestimmung des SCR unter Solvency II
- **Least Squares Monte Carlo (LSMC) Methodik**
- Stetigkeit und Konvergenz der Unternehmenswert-Funktion
- Algorithmus zur Herleitung von Polynomen
- Zusammenfassung
- Informationen zur Karriere als Aktuar

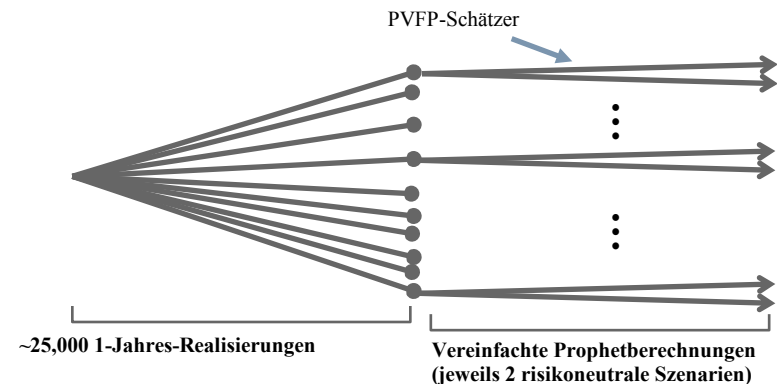
Anstatt Millionen von exakten Auswertungen, wird der Raum intelligent mit wenigen Punkten abgedeckt. Danach wird eine Regression durchgeführt

Least Squares Monte Carlo-Methodik

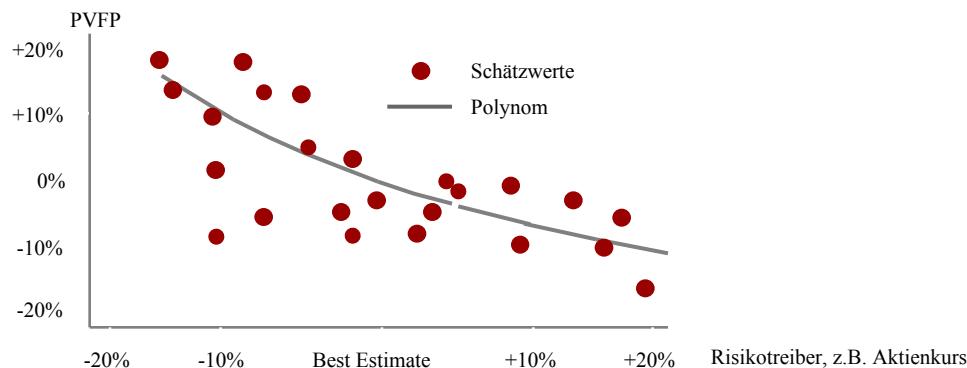
- 2 a Erzeugung von Regressionsszenarien (~25,000) von möglichen 1-Jahres-Entwicklungen der Real World-Risikotreiber



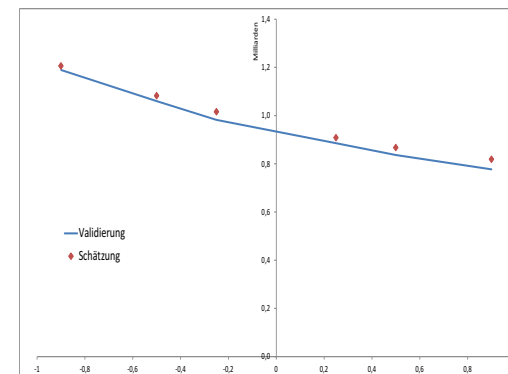
- 2 b Durchführung weniger Läufe des CFPM je Risiko-treiberrealisierung und Berechnung von 25.000 PVFP-Schätzern



- 2 c Regression eines multi-dimensionalen Polynoms, der "LSMC-Funktion" für die PVFPs



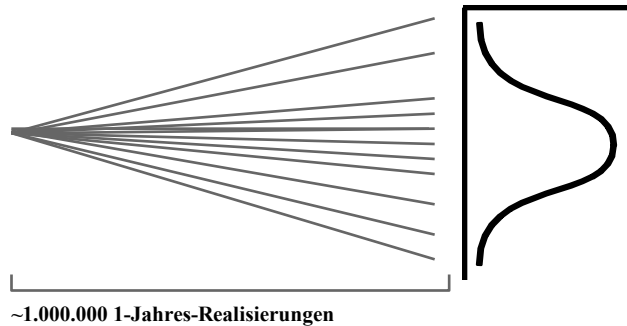
- 2 d Validierung der LSMC-Funktion, z.B. durch out-of-sample-Tests



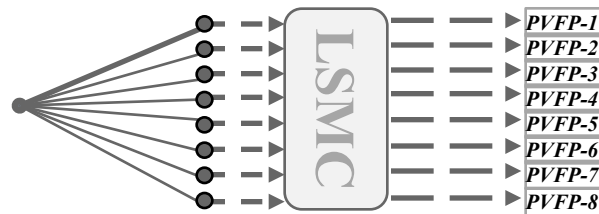
Erzeugung von Real-World-Szenarien und anschließende Bestimmung des Risikokapitals

Schritt 3 & 4 der Least Squares Monte Carlo-Methodik

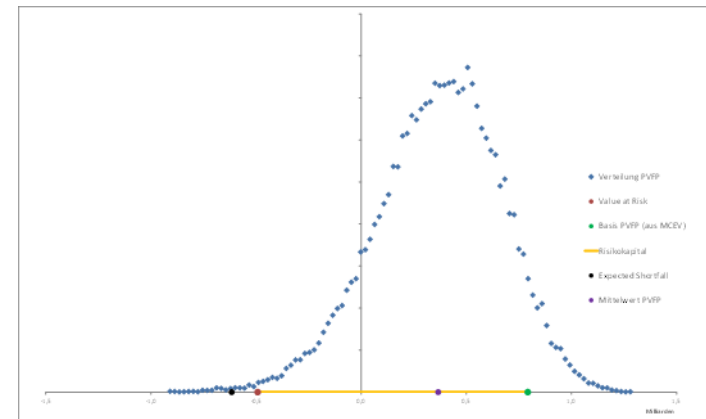
3 Simulation der gemeinsamen Risikotreiber-Verteilung



4 Auswertung der LSMC-Funktion



4 Bestimmung der Eigenmittelverteilung und SCR-Bestimmung



Agenda

- Projektionsmodelle in der Personenversicherung
- Garantien und Optionen
- Stochastisches Unternehmensmodell
- Bestimmung des SCR unter Solvency II

- Least Squares Monte Carlo (LSMC) Methodik
- **Stetigkeit und Konvergenz der Unternehmenswert-Funktion**
- Algorithmus zur Herleitung von Polynomen

- Zusammenfassung
- Informationen zur Karriere als Aktuar

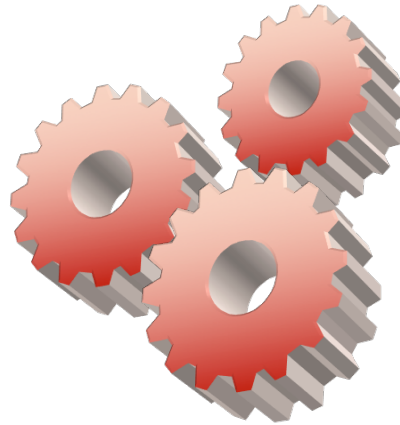
Stetigkeit der Pricing-Funktion zur Bewertung eines Unternehmens

Bildung von Durchschnittswerten über die Barwerte pro Pfad

1) Ein- und Auszahlungsprofile von Versicherungsverträgen zeigen **pro Simulation** oft ein nicht stetiges Verhalten.

Man denke an Optionen, also an binäre ja/nein Ereignisse

2) Die stochastischen Unternehmensmodelle bilden diese **unstetigen Merkmale** ab



3) Der Unternehmenswert (PVFP) entsteht jedoch durch **Bildung des Durchschnittswertes über die Barwerte**. Dadurch werden Sprünge in einem Pfad **automatisch ausgeglichen**, weil ihr individueller Beitrag zum Unternehmenswert durch die Bildung des Durchschnittswertes über viele tausend Szenarien reduziert wird

Unstetiges Verhalten
in der Projektion

≠

Unstetiges Verhalten der
Bewertungsfunktion

Quelle:

Bontjes van Beek, *Continuity of Actuarial Models based on a Risk-Neutral Valuation of Life Insurance Portfolio*, Master thesis (Uni Oldenburg, 2015)

Die wahre Unternehmenswert-Funktion ist unbekannt, wenn sie aber stetig ist, lässt sie sich durch Polynome approximieren

Zu Beginn Abschlusskostenbelastung

- Der Definitionsbereich ist das Produkt von reellen Intervallen, welche die Risikofaktoren darstellen: Zinsänderung, Aktienperformance, Sterblichkeit, Storno usw.
- Unsere Unternehmenswert-Funktion ist also auf einem kompakten Hausdorff-Raum definiert

Folge aus dem Satz von (Stone-)Weierstraß:

Der wahre Unternehmenswert lässt sich durch Polynome approximieren.

$$L \approx P_{\text{approx}} \approx P_{\text{LSMC}}$$

Konvergenz

Zusammenfassung: Der Unternehmenswert lässt sich durch Polynome approximieren. Ferner wissen wir, dass der gewöhnliche Kleinste-Quadrate-Schätzer, der aus einem LSMC-Ansatz berechnet wird, für die Koeffizienten von P **erwartungstreu** ist und das geschätzte Polynom gegen die echte Unternehmensfunktion konvergiert.

Quellen:

Bauer, Bergmann, Reuss: *Solvency II and Nested Simulations – a Least-Squares Monte Carlo Approach*, Preprint University of Ulm (2009)
 Kalberer, *Stochastic determination of the Value at Risk for a portfolio of assets and liabilities – typical and new approaches and implied estimation errors*, Part 1-3, *Der Aktuar* (2012)
 Bauer, Ha: *A Least-Square Monte Carlo Approach of the Calculation of Capital Requirement* (preprint, 2015).

Agenda

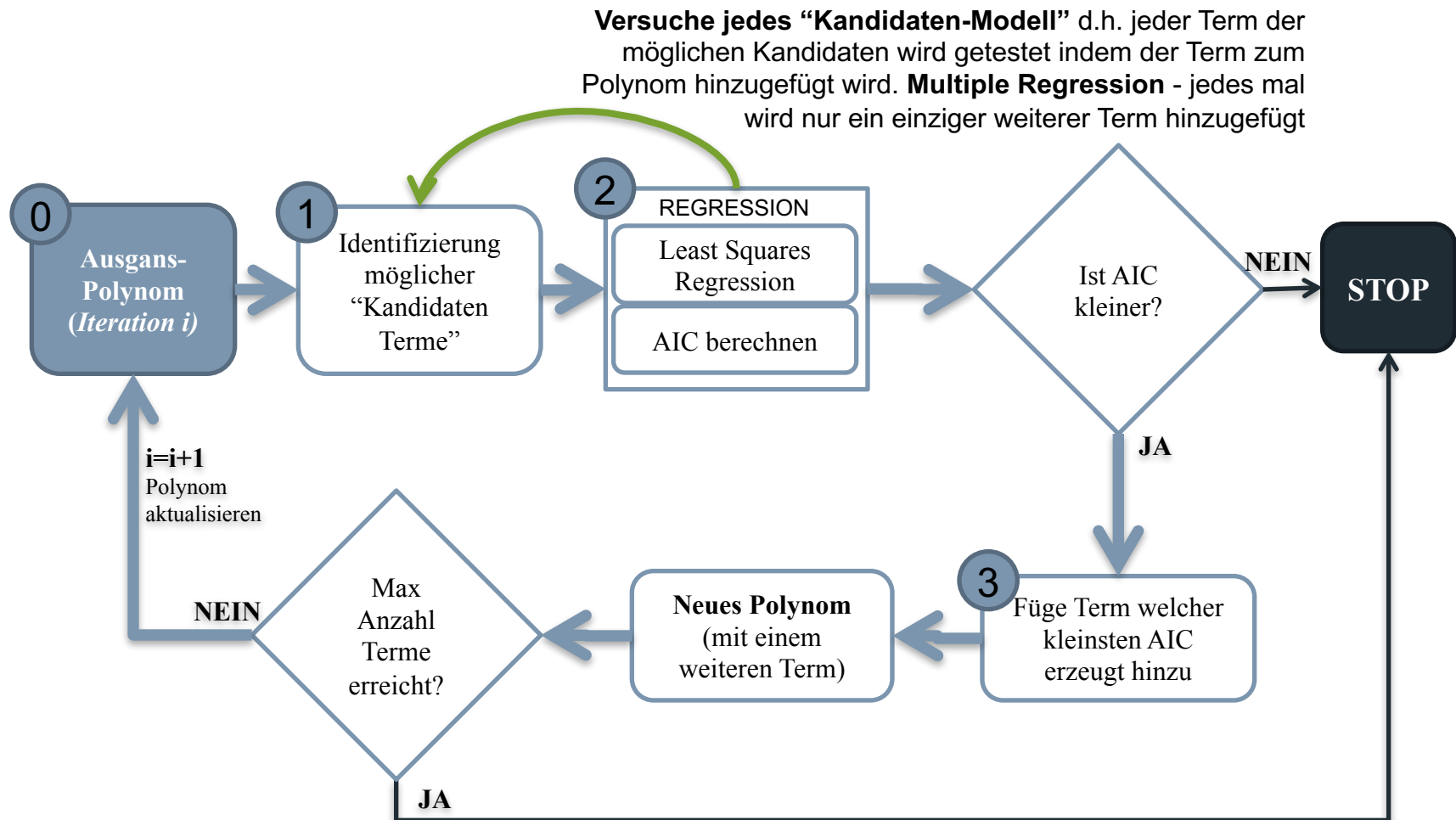
- Projektionsmodelle in der Personenversicherung
- Garantien und Optionen
- Stochastisches Unternehmensmodell
- Bestimmung des SCR unter Solvency II

- Least Squares Monte Carlo (LSMC) Methodik
- Stetigkeit und Konvergenz der Unternehmenswert-Funktion
- **Algorithmus zur Herleitung von Polynomen**

- Zusammenfassung
- Informationen zur Karriere als Aktuar

Schleife ist von iterativer Natur. Jeder Umlauf erhöht die Anzahl der Terme bis das Modell mit dem kleinsten AIC gefunden ist.

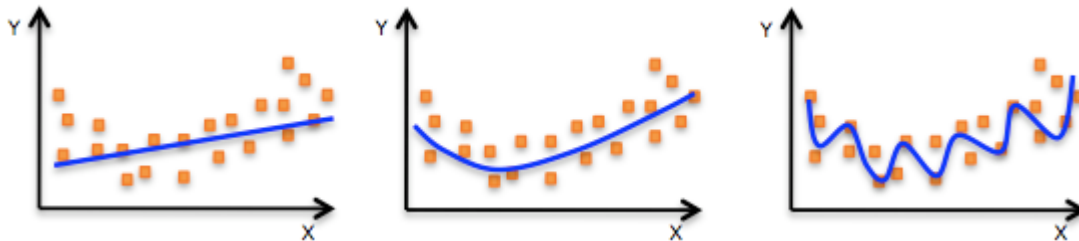
Auswahlprozess des Modells per mehrstufigen Algorithmen



Aufgabe ist es, das beste Polynom und dessen Koeffizienten zu finden

Akaike-Kriterium

- Klassische Statistik: Schätze den **unbekannten** Parameter einer **bekannten** Verteilung, z.B. den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariable (Maximum Likelihood Schätzer)
- LSMC-Regression: Schätze die **unbekannten** Koeffizienten eines **unbekannten** Polynoms
- Es sind also **zwei simultane Aufgaben** zu erledigen: Finde bestes Polynom und gleichzeitig dessen optimale Koeffizienten



- Dazu notwendig: Beurteile allgemein die Güte einer Approximation

Die Kullback-Leibler Divergenz muss minimiert werden

Akaike-Kriterium

Definition:

Es seien f_1 und f_2 zwei Wahrscheinlichkeitsdichten. Die **Kullback-Leibler Divergenz** zwischen f_1 und f_2 ist definiert durch $D_{KL}(f_1, f_2) = \int f_1(x) \log \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right) dx$.

Satz:

Falls eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Sinne der Kullback-Leibler Divergenz gegen eine Funktion f konvergiert, dann konvergieren die zugehörigen Maße in Total-Variation.

Bei LSMC soll ein Polynom $g(x|\theta_k)$, das abhängig von den zu wählenden Polynomkoeffizienten θ_k ist, so bestimmt werden, dass die Unternehmensfunktion f im Sinne der Kullback-Leibler Divergenz bestmöglich approximiert wird. Für diese Funktion muss also der Ausdruck

$$\begin{aligned} I(\theta_k) &:= D_{KL}(f, g(\cdot, \theta_k)) = \int f(x) \log \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) dx \\ &= \int f(x) \log(f(x)) dx - \int f(x) \log(g(x)) dx \end{aligned}$$

minimiert werden.

AIC ist ein guter Schätzer bei einer hohen Anzahl von Datenpunkten

Akaike-Kriterium

$$D_{KL} = \int f(x) \log f(x) dx - \int f(x) \log g(x|\theta_k) dx$$

- Der erste Term ist unabhängig von g .
- Also reicht es aus den zweiten Term $\Delta(g|f)$ zu maximieren bzw. $-\Delta(g|f)$ zu minimieren.

Satz (Akaike, 1973):

Seien f und alle $g(\cdot|\theta_k)$ ausreichend reguläre Funktionen, zum Beispiel beide in C^2 . Dann ist

$$AIC := -2 \log(L) + 2k,$$

wobei L den Maximum Likelihood Wert der Funktion g bezeichnet ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für $-\Delta(g|f)$, d.h.

$$E(AIC) = E(-\Delta(g|f)) + o(1)$$

wobei alle Erwartungswerte unter der Dichte von f gebildet werden.

- AIC ist folglich ein guter Schätzer für $-\Delta(g|f)$ sofern die Anzahl der Datenpunkte groß ist im Vergleich zur Polynomdimension k .

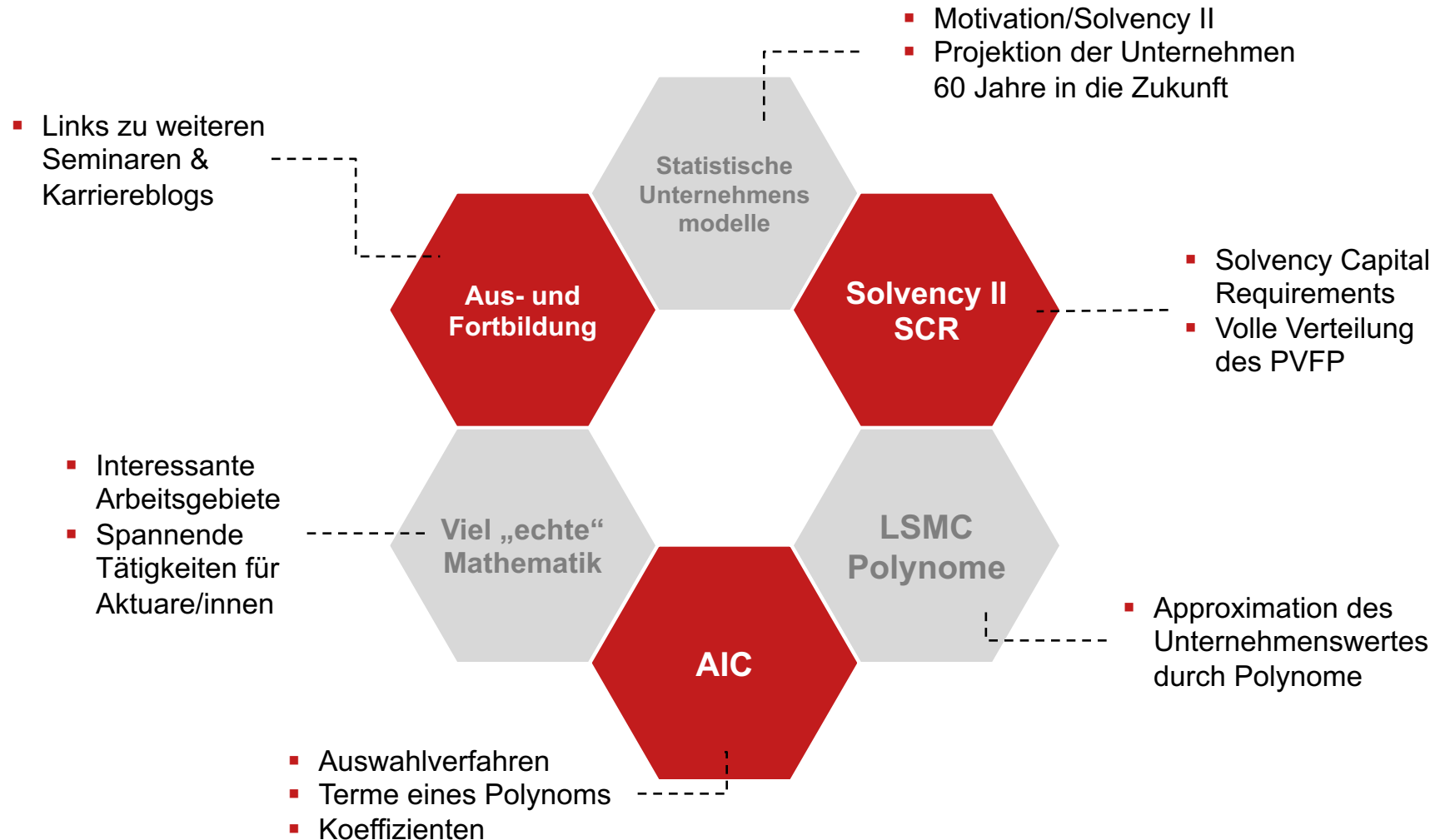
Agenda

- Projektionsmodelle in der Personenversicherung
- Garantien und Optionen
- Stochastisches Unternehmensmodell
- Bestimmung des SCR unter Solvency II

- Least Squares Monte Carlo (LSMC) Methodik
- Stetigkeit und Konvergenz der Unternehmenswert-Funktion
- Algorithmus zur Herleitung von Polynomen

- **Zusammenfassung**
- Informationen zur Karriere als Aktuar

Zusammenfassung



Agenda

- Projektionsmodelle in der Personenversicherung
- Garantien und Optionen
- Stochastisches Unternehmensmodell
- Bestimmung des SCR unter Solvency II

- Least Squares Monte Carlo (LSMC) Methodik
- Stetigkeit und Konvergenz der Unternehmenswert-Funktion
- Algorithmus zur Herleitung von Polynomen

- Zusammenfassung
- **Informationen zur Karriere als Aktuar**

Fragen und weitere Informationen

www.mi.uni-koeln.de/wp-znikolic/



karriereblog.generali-deutschland.de