

Niedrig-Diskrepanz Folgen in der Quasi-Monte Carlo Bewertung

Dr. Zoran Nikolić
Prof. Dr. Christian Weiß

22.9.2017

Lotterie

Wir betrachten eine sehr einfache Lotterie. Es werden 3 aus 7 Zahlen gezogen. Der Spieler erhält einen Gewinn, wenn er ein 2 oder 3 Zahlen richtig getippt hat. Die Auszahlungsfunktion ist wie folgt gegeben:

2 Richtige	50 Euro
3 Richtige	150 Euro

Der Preis eines Lotteriescheins beträgt 20 Euro. Ein Spieler beschließt, 7 Scheine zu kaufen.

Lotterie

Der Erwartungswert für den Gewinn eines Lotteriescheins beträgt

$$\begin{aligned} E[X] &= P(X = 2) \cdot 50 + P(X = 3) \cdot 150 = 12/35 \cdot 50 + 1/35 \cdot 150 \\ &= 21\frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für 7 Lotteriescheine der Erwartungswert

$$E[7X] = 150.$$

Frage

Würden Sie bei der Lotterie mitspielen? Wie würden Sie Ihre 7 Lotterieschein ausfüllen?

Lotterie

Der Erwartungswert für den Gewinn eines Lotteriescheins beträgt

$$\begin{aligned} E[X] &= P(X = 2) \cdot 50 + P(X = 3) \cdot 150 = 12/35 \cdot 50 + 1/35 \cdot 150 \\ &= 21\frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für 7 Lotteriescheine der Erwartungswert

$$E[7X] = 150.$$

Frage

Würden Sie bei der Lotterie mitspielen? Wie würden Sie Ihre 7 Lotterieschein ausfüllen?

1. Taktik (Zufallstipp)

Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit 3 Richtige zu haben $\frac{7}{35} = 20\%$. Die Wahrscheinlichkeit, 2 Zahlen richtig zu tippen, ist binomialverteilt mit $n = 7$ und $p = \frac{12}{35}$. Es ergibt sich somit:

0 Pärchen	5,3 %
1 Pärchen	19,3 %
2 Pärchen	30,3 %
3 Pärchen	26,3 %
4 Pärchen	13,7 %
5 Pärchen	4,3 %
6 Pärchen	0,7 %
7 Pärchen	0,1 %

2. Taktik (Quasi-Monte Carlo Tipp)

Wir tippen die folgenden Zahlentripel:

124, 135, 167, 257, 347, 236, 456.

Damit erhalten wir:

0 Pärchen	20 %
3 Pärchen	80 %

Es wurde genau dann kein Pärchen richtig getippt, wenn wir 3 Richtige haben. Die Auszahlung beträgt **immer** 150 Euro. Der Tipp ist also **völlig risikolos**.

Die echte Welt...

Mit Taktiken dieser Art gewannen eine Gruppe von Investoren um Gerald Selbee sowie eine Gruppe von MIT-Studenten (Random Strategies) bei der Lotterie **Cash Winfall** in Massachusetts (6 aus 46) zwischen 2005 und 2012 durch die wöchentliche Abgabe tausender Lotteriescheine mehrere Millionen Dollar.

Ziel der Quasi-Monte Carlo Taktik war es den Erwartungswert

$$E[X] = \int xf(x)d\mu,$$

also ein Integral, möglichst schnell durch wenige Auswertungen der Funktion $xf(x)$ zu approximieren.

Zentrale Frage

Gibt es allgemein eine Folge von Punkten $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so dass die Konvergenz

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \rightarrow \int f(x)dx$$

unabhängig von f möglichst schnell ist?

Ziel der Quasi-Monte Carlo Taktik war es den Erwartungswert

$$E[X] = \int xf(x)d\mu,$$

also ein Integral, möglichst schnell durch wenige Auswertungen der Funktion $xf(x)$ zu approximieren.

Zentrale Frage

Gibt es allgemein eine Folge von Punkten $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so dass die Konvergenz

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \rightarrow \int f(x)dx$$

unabhängig von f möglichst schnell ist?

Beispiele

- Numerische Integration
- Finanzmathematische Bewertung unbekannter bzw. zufälliger Auszahlungsfunktionen
- Lösung partieller & gewöhnlicher Differentialgleichungen
- Lösung großer Gleichungssysteme
- Stochastische Optimierung
- Maßtheorie
- Statistik
- Zufallszahlengeneratoren