Elementare Finanzmathematik

Actuarial Machine Learning

Julia Bicker

May 15, 2020

1 Zinsrechnung

2 Zahlungsströme

3 Zeitrenten

4 Rendite von Zahlungsströmen

Universität zu Köln

Der Zins hat in der Finanzwelt unterschiedliche Funktionen z.B. dient er dazu:

- Kreditausfallrisiko reduzieren
- Opportunitätskosten kompensieren

Aufzinsungs- und Diskontfaktor

Zu einem Zinssatz i definieren wir den *Aufzinsungsfaktor*

$$q = 1 + i$$

und den *Diskontfaktor*

$$v = \frac{1}{1+i}$$

Einfache Verzinsung

Wir betrachten ein Anfangskapital K_0, dass für t Jahre zu einem Zinssatz von i angelegt wird. Bei der *einfachen Verzinsung* werden die Zinsen zwar jährlich berechnet, allerdings fallen sie erst am Ende der Laufzeit an. D.h. sie fallen nur auf das Anfangskapital K_0 an.
Es gilt

$$K_t = K_0 + \underbrace{K_0 \cdot t \cdot i}_{\text{Zinsen}} = K_0 \left(1 + t \cdot i\right)$$

Zusammengesetzte Verzinsung

Bei der *zusammengesetzten Verzinsung* oder auch dem *Zinseszins* wird - im Gegensatz zur einfachen Verzinsung - nicht nur das Anfangskapital verzinst, sondern auch die bereits angefallenen Zinsen. Daraus ergibt sich für K_t

$$K_t = K_0 + \underbrace{\left((1+i)^t - 1\right) K_0}_{\textit{Zinsen}} = K_0 \cdot (1+i)^t$$

Gemischte Verzinsung

Die *gemischte Verzinsung* nutzt für jede volle Zinsperiode die zusammengesetzte Verzinsung und für Bruchteile einer Zinsperiode, an den Rändern der vollen Zinsperiode, nutzt sie die einfache Verzinsung.

Gemischte Verzinsung

Die *gemischte Verzinsung* nutzt für jede volle Zinsperiode die zusammengesetzte Verzinsung und für Bruchteile einer Zinsperiode, an den Rändern der vollen Zinsperiode, nutzt sie die einfache Verzinsung.

Beispiel 1

Ein Kapital soll vom November 2020 bis zum Februar 2022 angelegt werden. Das Jahr 2021 wird also mit Zinseszins verzinst, während die jeweils zwei Monate in den Jahren 2020 und 2022 mit einfacher Verzinsung verzinst werden.

Um das Kapital K_t zu berechnen definieren wir t durch $t = t_u + t_N + t_o$, wobei t_u den Teil vor der ganzzahligen Laufzeit beschreibt, t_N die ganzzahlige Laufzeit und t_o den Teil nach der ganzzahligen Laufzeit. Wir erhalten folgende Formel für K_t

$$K_t = \underbrace{\underbrace{K_0 \left(1 + t_u \cdot i\right)}_{K_{t_u}} \left(1 + i\right)^{t_N}}_{K_{t_u + t_N}} \left(1 + t_o \cdot i\right)$$

Beispiel 2

Es steht ein Kapital von 2000 Euro zur Verfügung. Das Kapital kann vom Dezember 2019 bis zum März 2023 angelegt werden. Wir betrachten folgende 3 Angebote:

1. *Das Kapital wird zu einem Zinssatz von 4% über 3 Jahre mit einfacher Verzinsung angelegt.*
2. *Das Kapital wird über 3 Jahre mit Zinseszins angelegt, allerdings nur zu einem Zinssatz von 3,9%.*
3. *Das Kapital wir für 3 Jahre zu einem Zinssatz von 3,5% mit Zinseszins angelegt und zusätzlich dazu wird der Dezember 2019 und der Januar und Februar 2023 ebenfalls verzinst, allerdings mit einfacher Verzinsung.*

Welches Angebot ist nun das Beste?
Für das erste Angebot nutzen wir einfache Verzinsung und erhalten

$$K_3 = 2000 \cdot (1 + 3 \cdot 0,04) = 2240$$

Mit zusammengesetzter Verzinsung erhalten wir für das zweite Angebot

$$K_3 = 2000 \cdot (1 + 0,039)^3 = 2243,24$$

Um das Endkapital für das dritte Angebot zu berechnen, nutzen wir die gemischte Verzinsung. Es ist $t_N = 3$, $t_u = \frac{1}{12}$ *und* $t_o = \frac{1}{6}$. *Damit erhält man*

$$K_3 = 2000 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot 0,035\right) (1 + 0.035)^3 \left(1 + \frac{1}{6} \cdot 0,035\right) = 2236,88$$

Effektive Verzinsung

Wir betrachten eine Kapitalanlage über t Jahre, bei der im Jahr k mit dem Zinssatz i_k verzinst wird, $k = 1, ..., t$.
Für den *Effektivzins* i ist muss gelten

$$K_t = K_0 (1 + i_1)(1 + i_2) ... (1 + i_t) \stackrel{!}{=} K_0 (1 + i)^t$$

Es ergibt sich durch umformen

$$\prod_{k=1}^{t} (1 + i_k) = (1 + i)^t$$

$$\Leftrightarrow \quad i = \left(\prod_{k=1}^{t} (1 + i_k) \right)^{\frac{1}{t}} - 1 = \sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1$$

Effektiver Diskontsatz

Zusätzlich zum effektiven Zinssatz i definieren wir den *effektiven Diskontsatz durch*

$$d = 1 - v = \frac{i}{1+i} = i \cdot v$$

Nominelle Verzinsung

Bisher wurde nur der Fall betrachtet, dass Zinsen einmal pro Zeitperiode anfallen. Zinsen können aber auch mehrmals pro Zeitperiode anfallen. Wenn dies der Fall ist, spricht man von *unterjähriger Verzinsung*.

Nominelle Verzinsung

Bisher wurde nur der Fall betrachtet, dass Zinsen einmal pro Zeitperiode anfallen. Zinsen können aber auch mehrmals pro Zeitperiode anfallen. Wenn dies der Fall ist, spricht man von *unterjähriger Verzinsung*.

Beispiel 3

Wir legen ein Kapital K_0 zu einem Zinssatz von i p.a. an und verzinsen im ersten Jahr k-mal. Am Ende des ersten Jahres erhalten wir ein Kapital von $K_1 = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k \cdot K_0$.

Unsere Laufzeit soll nun t Jahre betragen, wobei jedes Jahr k-mal Verzinst wird. Mit der Formel für Zinseszins lässt sich K_t ausrechnen durch

$$K_t = \left(\left(1 + \frac{i}{k}\right)^k\right)^t \cdot K_0 = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot t} \cdot K_0$$

Damit definieren wir den *Nominalzins* $i^{(k)}$ über die Gleichung

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^k$$

Stetige Verzinsung

Die *stetige* oder *kontinuierliche* Verzinsung wird über eine Zinsperiode dauerhaft d.h. in jeder Sekunde verzinst.
Orientiert man sich an der nominellen Verzinsung bedeutet das:

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^k$$

Stetige Verzinsung

Die *stetige* oder *kontinuierliche* Verzinsung wird über eine Zinsperiode dauerhaft d.h. in jeder Sekunde verzinst.
Orientiert man sich an der nominellen Verzinsung bedeutet das:

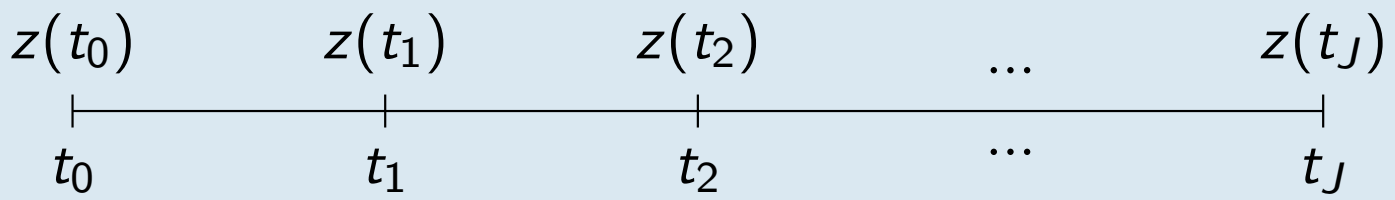
$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right)^k$$

Annahme: konstanter Nominalzins $i^{(k)} \equiv \delta$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{k}\right)^k = e^{\delta}$$
$$\Rightarrow \quad 1+i = e^{\delta}$$

Zahlungsstrom

Ein **diskreter Zahlungsstrom** ist eine Serie von Zahlungen $z(t_j)$, welche zu einem diskreten Zeitpunkt t_j, $j \in \{0, ..., J\}$ gemacht werden. Dabei gehen wir - falls nicht anders beschrieben - wieder von einem Zeitraum von einem Jahr aus. Die einzelnen Zahlungen $z(t_j)$ können positiv, negativ oder null sein.



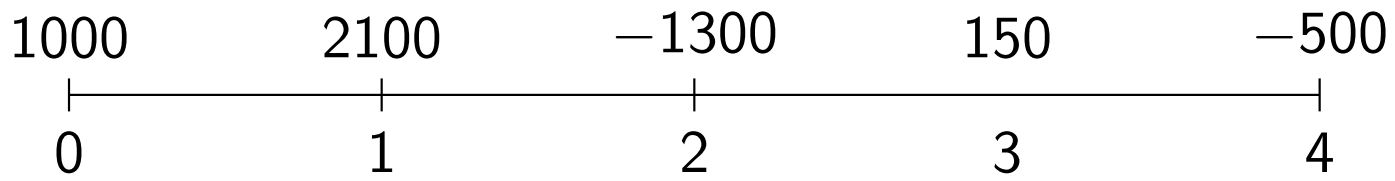
Wert eines Zahlungsstroms

Sei $z(t_0), ..., z(t_J)$ ein Zahlungsstrom, der mit einem effektiven Zins von i p.a. verzinst wird. Wir definieren den **Wert eines Zahlungsstroms** zu einem Zeitpunkt t^* mit $t_0 \leq t^* \leq t_J$ als

$$CF(t^*; i) = \sum_{j=0}^{J} z(t_j) \cdot (1+i)^{t^* - t_j}$$

Beispiel 4

Wir betrachten folgenden Zahlungsstrom



Der Wert des Zahlungsstroms zum Zeitpunkt $t = 3$ *bei einem effektiven Zinssatz von* $i = 0,02$ *ist*

$$CF(3; 0,02) = 1000 \cdot 1,02^3 + 2100 \cdot 1,02^2 - 1300 \cdot 1,02^1 + 150 \cdot 1,02^0 - 500 \cdot 1,02^{-1} = 1579,85$$

Barwert eines Zahlungsstroms

Der **Barwert eines Zahlungsstroms PV(i)** zum Zinssatz i ist sein Wert zum Zeitpunkt t_0:

$$PV(i) = CF(t_0; i) = \sum_{j=0}^{J} z(t_j) \cdot (1+i)^{t_0 - t_j} = \sum_{j=0}^{J} z(t_j) \cdot v^{t_j - t_0}$$

Barwert eines Zahlungsstroms

Der **Barwert eines Zahlungsstroms PV(i)** zum Zinssatz i ist sein Wert zum Zeitpunkt t_0:

$$PV(i) = CF(t_0; i) = \sum_{j=0}^{J} z(t_j) \cdot (1+i)^{t_0 - t_j} = \sum_{j=0}^{J} z(t_j) \cdot v^{t_j - t_0}$$

Endwert eines Zahlungsstroms

Der **Endwert eines Zahlungsstroms TV(i)** zum Zinssatz i sein Wert zum Zeitpunkt t_J:

$$TV(i) = CF(t_J; i) = \sum_{j=0}^{J} z(t_j) \cdot (1+i)^{t_J - t_j} = \sum_{j=0}^{J} z(t_j) \cdot v^{t_j - t_J}$$

Satz 1

Es gilt: $CF(t^*; i) = (1+i)^{t^*} \cdot PV(i)$

Satz 1

Es gilt: $CF(t^*; i) = (1+i)^{t^*} \cdot PV(i)$

Beweis:

O.B.d.A sei $t_0 = 0$.

$$(1+i)^{t^*} \cdot PV(i) = (1+i)^{t^*} \cdot \sum_{j=0}^{J} z(t_j) \cdot v^{t_j - t_0} = \sum_{j=0}^{J} z(t_j) \cdot \frac{(1+i)^{t^*}}{(1+i)^{t_j - t_0}}$$

$$\underset{t_0=0}{=} \sum_{j=0}^{J} z(t_j) \cdot (1+i)^{t^* - t_j} = CF(t^*; i)$$

□

Äquivalenz von Zahlungsströmen

Äquivalenz von Zahlungsströmen

Zwei Zahlungsströme heißen **äquivalent**, wenn sie zu jedem Zeitpunkt den gleichen Wert haben.

Äquivalenz von Zahlungsströmen

Äquivalenz von Zahlungsströmen

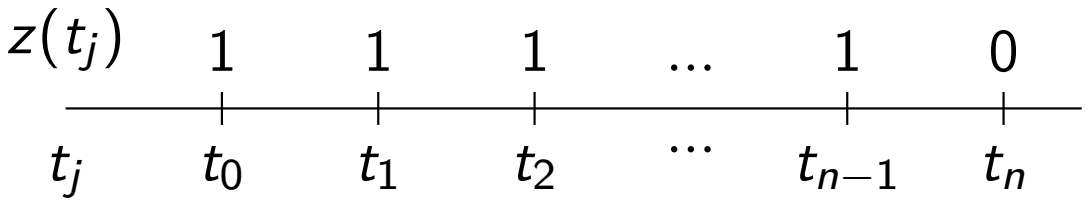
Zwei Zahlungsströme heißen **äquivalent**, wenn sie zu jedem Zeitpunkt den gleichen Wert haben.

$\overset{\text{Satz 1}}{\Rightarrow}$ Zwei Zahlungsströme heißen äquivalent, wenn sie den gleichen Barwert haben.

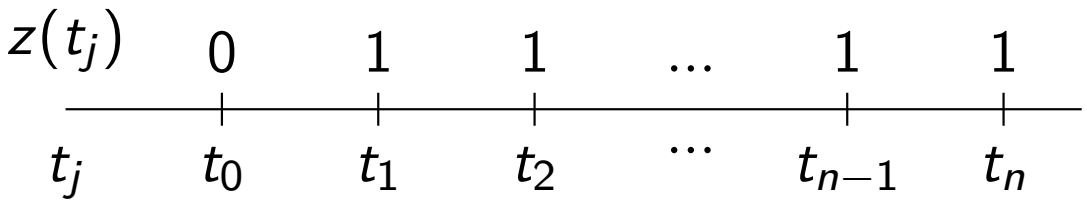
Zeitrenten

Eine Zeitrente ist ein Zahlungsstrom, dessen Höhe gleichbleibend ist und, der über einen bestimmten Zeitraum gezahlt wird.

vorschüssige Zeitrente über n Jahre



nachschüssige Zeitrente über n Jahre



Universität zu Köln

Wir bezeichnen den Barwert einer Zeitrente als *Rentenbarwertfaktor* und den Endwert als *Rentenendwertfaktor*.

Der *vorschüssige Rentenbarwertfaktor* $\ddot{a}_{\overline{n}}$ ergibt sich durch

$$\ddot{a}_{\overline{n}} = \sum_{j=0}^{n} z(t_j) \cdot v^{t_j} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$$

$$\underset{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d}$$

Der *nachschüssige Rentenbarwertfaktor* $a_{\overline{n}}$ ist

$$a_{\overline{n}} = \sum_{j=0}^{n} z(t_j) \cdot v^{t_j} = v + v^2 + \ldots + v^{n-1} + v^n = v \cdot \sum_{j=0}^{n-1} v^j$$

$$\underset{\text{geometrische Reihe}}{=} v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{i}$$

Universität zu Köln

Mit Satz 1 kann man neben dem Rentenbarwertfaktor auch den Rentenendwertfaktor einer Zeitrente ausrechnen:

vorschüssiger Rentenendwertfaktor:

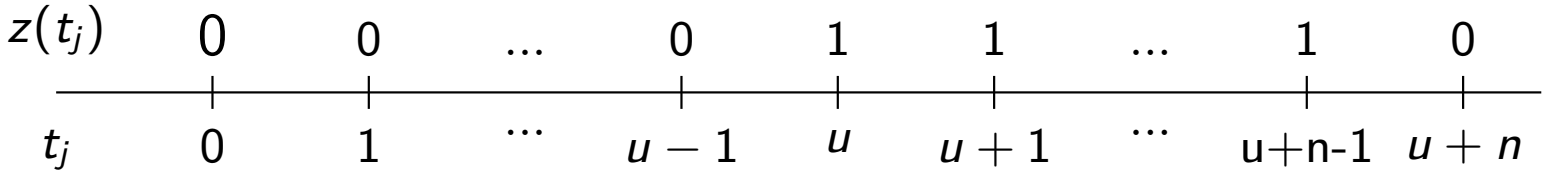
$$\ddot{s}_{\overline{n}} = (1+i)^n \cdot \ddot{a}_{\overline{n}} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

nachschüssiger Rentenendwertfaktor:

$$s_{\overline{n}} = (1+i)^n \cdot a_{\overline{n}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Aufgeschobene Zeitrenten

vorschüssige Zeitrente über n Jahre, um u Jahre aufgeschoben



Den Rentenbarwertfaktor einer um u Jahre aufgeschobenen vorschüssigen Zeitrente bezeichnen wir mit $u|\ddot{a}_{\overline{n}}$.

Mit Hilfe des obigen Auszahlungsschemas können wir diesen berechnen:

$$\begin{aligned} u|\ddot{a}_{\overline{n}} &= v^u + v^{u+1} + \ldots + v^{u+n-1} \\ &= v^u \cdot (1 + v + \ldots + v^{n-1}) = v^u \cdot \ddot{a}_{\overline{n}} \end{aligned}$$

Universität zu Köln

Bemerkung: Da $v^u < 1$ für $i > 0$ ist der Barwert einer aufgeschobenen Zeitrente kleiner, als der Barwert einer Zeitrente, die sofort ausgezahlt wird.

Bemerkung: Da $v^u < 1$ für $i > 0$ ist der Barwert einer aufgeschobenen Zeitrente kleiner, als der Barwert einer Zeitrente, die sofort ausgezahlt wird.

Eine zweite Möglichkeit den Barwert des obigen Auszahlungsschemas zu berechnen wäre folgende:

$$u|\ddot{a}_{\overline{n}} = \sum_{j=u}^{u+n-1} v^j = \sum_{j=0}^{u+n-1} v^j - \sum_{j=0}^{u-1} v^j = \ddot{a}_{\overline{n+u}} - \ddot{a}_{\overline{u}}$$

Bemerkung: Da $v^u < 1$ für $i > 0$ ist der Barwert einer aufgeschobenen Zeitrente kleiner, als der Barwert einer Zeitrente, die sofort ausgezahlt wird.

Eine zweite Möglichkeit den Barwert des obigen Auszahlungsschemas zu berechnen wäre folgende:

$$u|\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{j=u}^{u+n-1} v^j = \sum_{j=0}^{u+n-1} v^j - \sum_{j=0}^{u-1} v^j = \ddot{a}_{\overline{n+u}|} - \ddot{a}_{\overline{u}|}$$

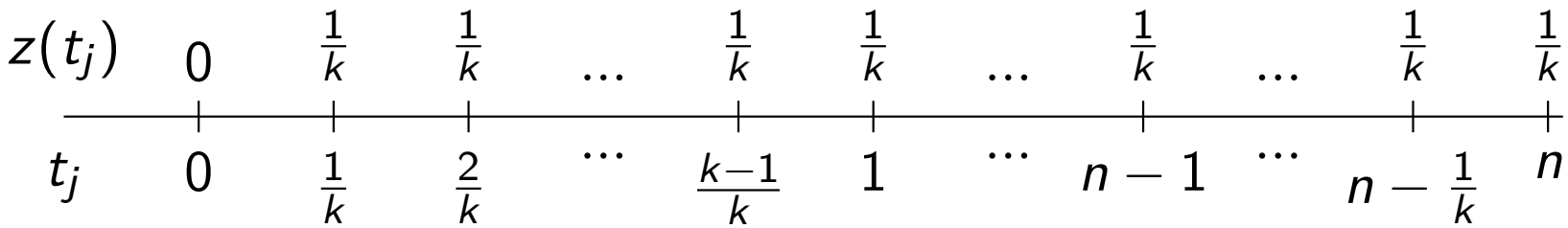
Für aufgeschobene Zeitrenten, die nachschüssig gezahlt werden folgt die Barwertberechnung analog.

Unterjährige Zeitrenten

Aus der Realität ist bekannt, dass Renten nicht nur jährlich, sondern meistens monatlich gezahlt werden. Generell kann eine Rente unterjährig gezahlt werden und das nicht nur monatlich, sondern sogar wöchentlich oder täglich.

Die jährliche Höhe einer Rente soll wieder 1 betragen und die Rente soll über k Zeitpunkte unterjährig ausgezahlt werden.

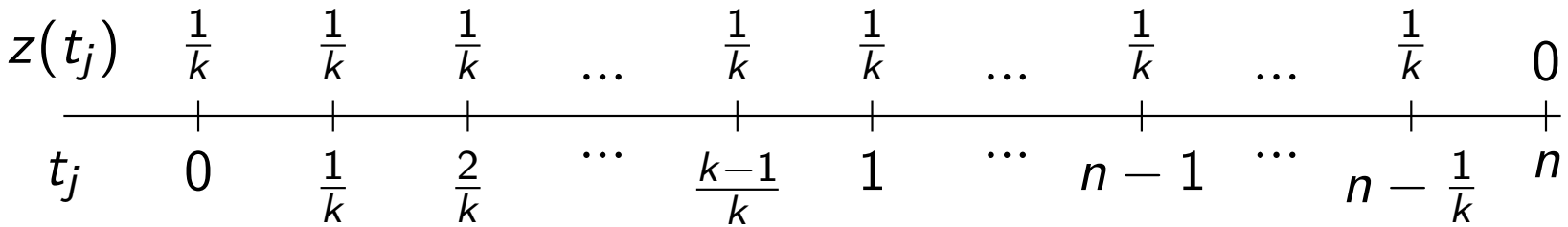
nachschüssig unterjährige Rente



Für den *unterjährig nachschüssigen Rentenbarwertfaktor* $a_{\overline{n}}^{(k)}$ heißt das

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}}^{(k)} &= \frac{1}{k} \cdot v^{\frac{1}{k}} + \frac{1}{k} \cdot v^{\frac{2}{k}} + \ldots + \frac{1}{k} \cdot v^{\frac{k}{k}} + \frac{1}{k} \cdot v^{\frac{k+1}{k}} + \ldots + \frac{1}{k} \cdot v^{\frac{n \cdot k}{k}} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{j=1}^{n \cdot k} v^{\frac{j}{k}} = \frac{1}{k} v^{\frac{1}{k}} \sum_{j=0}^{n \cdot k - 1} v^{\frac{j}{k}} \\ &\underset{\text{geometrische Reihe}}{=} \frac{1}{k} \cdot v^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{1}{i^{(k)}} \cdot (1 - v^n) \end{aligned}$$

vorschüssig unterjährige Rente

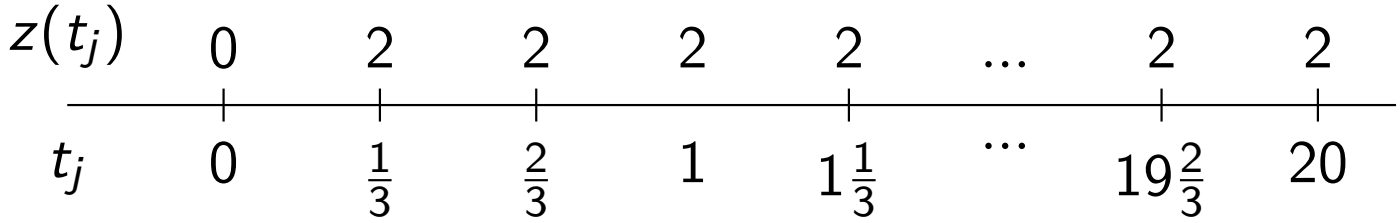


Der *unterjährig vorschüssige Rentenbarwertfaktor* $\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)}$ ist

$$\ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{k}}}$$

Beispiel 5

Wir betrachten folgenden Zahlungsstrom



Was ist der Wert dieses Zahlungsstroms zum Zeitpunkt $t = 0$, $t = 20$ und $t = 2\frac{1}{3}$ bei einem effektiven Zinssatz von 4% p.a.?

Als erstes rechnen wir den Wert des Zahlungsstroms zum Zeitpunkt $t = 0$, also den Barwert aus. Es handelt sich hierbei um eine nachschüssig unterjährige Zeitrente.

Zuerst müssen wir also den Nominalzins $i^{(3)}$ ausrechnen.

$$1,04 = \left(1 + \frac{i^{(3)}}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad i^{(3)} = 3 \cdot (\sqrt[3]{1,04} - 1) = 0,03948$$

Dann gilt mit der Formel

$$PV(0,04) = 6 \cdot a_{\overline{20}}^{(3)} = 6 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1,04}\right)^{20}}{0,03948} = 82,62$$

Nachdem wir den Barwert ausgerechnet haben können wir nach Satz 1 auch den Wert zu jedem anderen Zeitpunkt ausrechnen.

$$CF(20; 0,04) = TV(0,04) = PV(0,04) \cdot 1,04^{20} = 181,02$$

$$CF(2\frac{1}{3}; 0,04) = PV(0,04) \cdot 1,04^{\frac{7}{3}} = 90,54$$

Ewige Renten

Ewige Renten sind Renten, deren Auszahlung nicht nach einer gegebenen Anzahl an Jahren endet sondern, die - wie der Name schon sagt - ewig weiterlaufen.

Ewige Renten

Ewige Renten sind Renten, deren Auszahlung nicht nach einer gegebenen Anzahl an Jahren endet sondern, die - wie der Name schon sagt - ewig weiterlaufen.

d.h. wir lassen die Laufzeit n gegen unendlich laufen: $n \to \infty$. Das können wir für alle bisher vorgestellten Renten machen.
Es ist zu beachten, dass Endwerte unabhängig vom Zinssatz i nicht konvergieren und Barwerte nur bei positivem Zinssatz $i > 0$.

Es gilt für die Barwertfaktoren

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{d} \underset{v^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}{=} \frac{1}{d}$$

$$a_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i} \underset{v^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}{=} \frac{1}{i}$$

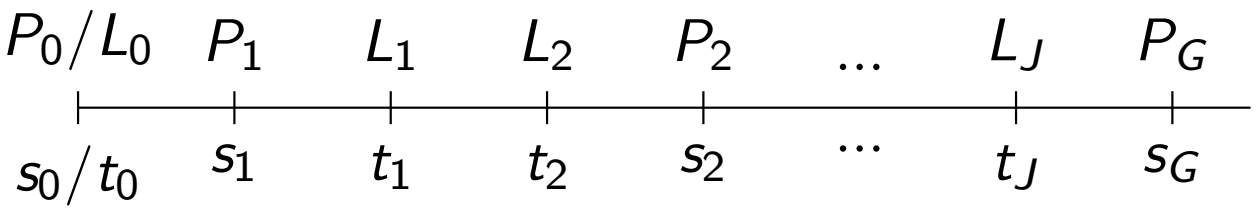
Analog dazu können wir natürlich auch unterjährige ewige Renten berechnen

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{k}}} \quad v^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1-v^{\frac{1}{k}}}$$

$$a_{\overline{\infty}}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i^{(k)}} \quad v^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \frac{1}{i^{(k)}}$$

Versicherungsspezifische Zahlungsströme

Bei Versicherungen unterscheidet man grundsätzlich zwischen zwei verschiedenen Arten von Zahlungsströmen. Zum einen gibt es Zahlungen vom Versicherungsnehmer an den Versicherer, die sogenannten Prämien und es gibt Zahlungen vom Versicherer an den Versicherungsnehmer, die sogenannten Leistungen.



Werte von Prämien

Der *Barwert der Prämien* ist

$$PV_P(i) = CF_P(0;i) = \sum_{g=0}^{G} P_g \cdot v^{s_g}$$

und der *Barwert der Leistungen* ist

$$PV_L(i) = CF_L(0;i) = \sum_{j=0}^{J} L_j \cdot v^{t_j}$$

Universität zu Köln

Rendite von Zahlungsströmen

Finanztransaktion

Sei $P = \{(P_g, s_g)|g = 0, .., G\}$ die Menge der Prämien und $L\{(L_j, t_j)|j = 0, ..., J\}$ die Menge der Leistungen. Wir definieren eine *Finanztransaktion* als Tupel (P, L).

Rendite von Zahlungsströmen

Finanztransaktion

Sei $P = \{(P_g, s_g)|g = 0, .., G\}$ die Menge der Prämien und $L\{(L_j, t_j)|j = 0, ..., J\}$ die Menge der Leistungen. Wir definieren eine *Finanztransaktion* als Tupel (P, L).

Bevor man eine Finanztransaktion durchführt, stellt man sich die Frage: Lohnt sich diese Transaktion d.h. ist sie rentable?

Um herauszufinden, ob eine Finanztransaktion rentable ist, kann man dessen Rendite berechnen:

Rendite

Die **Rendite oder der interne Zinsfuß einer Finanztransaktion** ist der Zinssatz i_Z, der

$$PV_P \stackrel{!}{=} PV_L$$

löst.

Wir betrachten folgenden Sparplan: 10 Einzahlungen in Höhe von 1000 Euro (zahlbar jährlich vorschüssig) und danach - beginnend ein jahr nach der letzten zahlung - 10 Rückzahlungen in Höhe von 2000 Euro. Was ist die Rendite dieser Finanztransaktion?

$$\begin{aligned} PV_P(i_Z) &= 1000 + 1000 v_Z + \ldots + 1000 v_Z^9 = 1000 \cdot \ddot{a}_{\overline{10}} \\ &= 1000 \cdot \frac{1 - v_Z^{10}}{1 - v_Z} \\ PV_L(i_Z) &= 2000 v_Z^{10} + \ldots + 2000 v_Z^{20} = 2000 \cdot v_Z^{10} \cdot \ddot{a}_{\overline{10}} \\ &= 2000 \cdot \frac{v_Z^{10} - v_Z^{20}}{1 - v_Z^{10}} \end{aligned}$$

$$1000 \cdot \frac{1 - v_Z^{10}}{1 - v_Z} = 2000 \frac{v_Z^{10} - v_Z^{20}}{1 - v_Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1000 \cdot \frac{1 - v_Z^{10}}{1 - v_Z} - 2000 \frac{v_Z^{10} - v_Z^{20}}{1 - v_Z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1000 \cdot (1 - v_Z^{10}) - 2000 \cdot (v_Z^{10} - v_Z^{20}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2v_Z^{20} - 3v_Z^{10} + 1 = 0$$

$$\underset{x = v_Z^{10}}{\Leftrightarrow} \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 1$$

Da $v_Z^{10} = 1$, $i_Z = 0$ *und somit keine zulässige Lösung liefert gilt*

$$v_Z^{10} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v_Z = \frac{1}{\sqrt[10]{2}} \quad \Rightarrow \quad i_Z = \sqrt[10]{2} - 1 \approx 0,07177$$

Die jährliche Rendite der Finanztransaktion ist also 7,177%.