Actuarial Machine Learning

Erwartete Barwerte

Hei Loi Lin

24. November 2020

Universität zu Köln

Einleitung

- Lebensversicherer bieten viele verschiedene Arten von Versicherungsprodukte an.
- Versicherungsprodukte gehören zu zwei Typen:
  - Erlebensfall-Versicherung
  - Todesfall-Versicherung
- Versicherungsproduktarten können miteinander kombiniert werden.
- Frage: Wann und unter welchen Bedingungen werden die Leistungen ausgezahlt?

Einleitung

- Alle hier vorgestellten erwarteten Barwerte sind auf ein normierte Versicherungssumme bzw. Jahresrente der Höhe 1 bezogen.
- Die versicherte Person (VP) wird als (x) definiert und hat bei Vertragsbeginn das technische Alter x.

Kommutationszahlen

- Übersicht der aktuarielle Berechnungen
- komprimierte Darstellung versicherungsmathematischer Barwerte
- diskrete Zeitpunkte und stetige Zeitpunkte, d.h. kontinuierlich fließende Rentenversicherungsleistungen sowie unmittelbar bei Tod fällige Versicherungsleistungen

Kommutationszahlen

Für diskrete Zeitpunkte hat man:

1. Kommutationszahlen 1. Ordnung
   - $D_x = l_x \cdot v^x$
   - $C_x = d_x \cdot v^{x+1}$
2. Kommutationszahlen 2. Ordnung
   - $N_x = \sum_{j=0}^{w-x} D_{x+j} = D_x + D_{x+1} + \cdots + D_w$
   - $M_x = \sum_{j=0}^{w-x} C_{x+j} = C_x + C_{x+1} + \cdots + C_w$
3. Kommutationszahlen 3. Ordnung
   - $S_x = \sum_{j=0}^{w-x} N_{x+j} = \sum_{j=0}^{w-x} (j+1) \cdot D_{x+j}$
   - $R_x = \sum_{j=0}^{w-x} M_{x+j} = \sum_{j=0}^{w-x} (j+1) \cdot C_{x+j}$

Kommutationszahlen

Für stetige Zeitpunkte hat man:

1. Kommutationszahlen 1. Ordnung
   - $\overline{D}_x = \int\limits_x^{x+1} D_t \,\mathrm{d}t \approx \frac{D_x + D_{x+1}}{2}$
   - $\overline{C}_x = \int\limits_x^{x+1} D_t \cdot \mu_t \,\mathrm{d}t \approx \frac{D_x \cdot \mu_x + D_{x+1} \cdot \mu_{x+1}}{2}$
2. Kommutaionszahlen 2. Ordnung
   - $\overline{N}_x = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{D}_{x+j}$
   - $\overline{M}_x = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{C}_{x+j}$
3. Kommutationszahlen 3. Ordnung
   - $\overline{S}_x = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{N}_{x+j} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} (j+1) \cdot \overline{D}_{x+j}$
   - $\overline{R}_x = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \overline{M}_{x+j} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} (j+1) \cdot \overline{C}_{x+j}$

Kommutationszahlen

Dabei stehen die Werte

- D_x (oder $\overline{D}_x$) als die **diskontierte Lebende**
- C_x (oder $\overline{C}_x$) als die **diskontierte Tote**
- N_x (oder $\overline{N}_x$) als die **Summe der diskontierten Lebenden**
- M_x (oder $\overline{M}_x$) als die **Summe der diskontierten Toten**

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass die Kommutationszahlen

- D (oder $\overline{D}$), N (oder $\overline{N}$) und S (oder $\overline{S}$) für die **Erlebensfall-Leistung** stehen
- C (oder $\overline{C}$), M (oder $\overline{M}$) und R (oder $\overline{R}$) für die **Todesfall-Leistung** stehen

Kommutationszahlen

Außerdem stehen die Kommutationszahlen in einer Beziehung zueinander

$$N_x = D_x + N_{x+1}, \quad S_x = N_x + S_{x+1},$$
$$M_x = C_x + M_{x+1}, \quad R_x = M_x + R_{x+1}.$$

Zu dem lassen sich die Kommutationszahlen der Toten mithilfe der Kommutationszahlen der Lebenden ausdrücken.
Zum Beispiel:

$$C_x = v \cdot D_x - D_{x+1} \text{ und } M_x = v \cdot N_x - N_{x+1}$$

Erwarteten Barwerte

Sei PV die Zufallsvariable des Barwert. Der erwartete Barwert hat die Gestalt

$$E[PV] = \sum_t b(t) \cdot p(t) \cdot v(t) \quad \text{für diskreter Zeitpunkt}$$

$$E[PV] = \int b(t) \cdot p(t) \cdot v(t) \, \mathrm{d}t \quad \text{für stetiger Zeitpunkt}$$

wobei

- $b(t)$ die Leistungsrate zum Zeitpunkt t,
- $p(t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Leistung zum Zeitpunkt t fällig wird und
- $v(t)$ der zugehörige Diskontfaktor, mit dem die Zahlung auf den Versicherungsbeginn, also den Zeitpunkt 0, abgezinst wird

Barwerte von Erlebensfall-Leistungen

- Versicherung, die nur dann eine Leistung erbringt, wenn die versicherte Person (x) einen vertraglich vereinbarten künftigen Zeitpunkt erlebt
- jede Altersrentenversicherung kann als eine Folge von Erlebensfall-Versicherungen zu den jeweiligen Rentenfälligkeiten aufgefasst werden
- Stirbt die versicherte Person (x) während der Laufzeit einer Erlebensfallversicherung $\Rightarrow$ Leistung wird nicht ausgezahlt

Reine Erlebensfall-Versicherung

- die Versicherungssumme in Höhe von 1 genau fällig, wenn (x) genau n Jahre überlebt
- die Wahrscheinlichkeit $P(PV) = P(v^n) = {}_np_x$ und die Gegenwahrscheinlichkeit $P(PV) = P(0) = 1 - {}_np_x$
- Erwarteter Barwert:

$$
\begin{aligned}
{}_nE_x := A_{\substack{1\\x:n}} &= E[PV] = {}_np_x \cdot v^n + (1 - {}_np_x) \cdot 0 \\
&= {}_np_x \cdot v^n = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} \cdot v^n \\
&= \frac{D_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned}
$$

Die Ziffer „1“ über der Dauer n bedeutet, dass die Betonung auf der zu überlebenden Dauer n steht.

Lebenslange Leibrente

- Leibrenten-Versicherte erhalten als Gegenleistung für einen meist einmaligen Betrag von der Versicherungsgesellschaft eine lebenslange Rente
- eignen sich in erster Linie für Personen, die sich mit ihren Ersparnissen für die Zeit nach der Pensionierung zusätzlich zu ihren gesetzlichen und betrieblichen Renten ein lebenslanges Zusatzeinkommen sichern wollen.
- Erwarteter Barwert einer vorschüssigen Rentenzahlung:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_x := E[PV] = E[\ddot{a}_{K_x+1}] &= \sum_{j=0}^{w-x} v^j \cdot \; {}_j p_x \\
&= \sum_{j=0}^{w-x} \frac{l_{x+j} \cdot v^{x+j}}{l_x \cdot v^x} = \sum_{j=0}^{w-x} \frac{D_{x+j}}{D_x} \\
&= \frac{N_x}{D_x}.
\end{aligned}$$

Lebenslange Leibrente

- Erwarteter Barwert einer nachschüssigen Rentenzahlung:

$$a_x := E[PV] = E[a_{K_x}] = \sum_{j=1}^{w-x} v^j \cdot \ {}_jp_x = \sum_{j=1}^{w-x} \frac{D_{x+j}}{D_x}$$
$$= \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

K_x ist die gestutzte zukünftige Lebensdauer von (x).

Temporäre Leibrente

- Rentenzahlung erfolgt, solange (x) lebt, aber höchstens n Jahre lang
- Erwarteter Barwert jährlich vorschüssiger Rentenzahlung:

$$\ddot{a}_{x:n} := E[PV] = E[\ddot{a}_{\min\{K_x+1;n\}}] = \sum_{j=0}^{n-1} v^j \cdot \ {}_j p_x$$
$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

- Erwarteter Barwert jährlich nachschüssigen Rentenzahlung:

$$\ddot{a}_{x:n} := E[PV] = E[\ddot{a}_{\min\{K_x;n\}}] = \sum_{j=1}^{n} v^j \cdot \ {}_j p_x$$
$$= \frac{N_{x+n} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Temporären Leibrente

Vorteile einer temporären Leibrente:

- einfachen und sicheren Abwicklung eines Auszahlungsplanes
- angelegte Summe wird fest verzinst und die Auszahlung erfolgt
- sollte die versicherte Person frühzeitig sterben, fließt das noch vorhandene Restkapital (falls dies so vereinbart wurde) an die im Versicherungsvertrag vorgemerkte begünstigte Person

Aufgeschobene Leibrente

- beginnt erst nach Ablauf einer Aufschubdauer von u Jahren, vorausgesetzt, dass (x) noch lebt
- Erwarteter Barwert aufgeschobenen lebenslang vorschüssiger zahlbaren Leibrente:

$$
\begin{aligned}
{}_{u|}\ddot{a}_x := E[PV] &= {}_u p_x \cdot v^u + {}_{u+1}p_x \cdot v^{u+1} + {}_{u+2}p_x \cdot v^{u+2} + \ldots \\
&= {}_u p_x \cdot v^u \left(1 + p_{x+u} \cdot v + {}_2 p_{x+u} \cdot v^2 + \ldots\right) \\
&= {}_u E_x \cdot \ddot{a}_{x+u} \\
&= \frac{N_{x+u}}{D_x}.
\end{aligned}
$$

Aufgeschobene Leibrente

- Erwarteter Barwert aufgeschobenen lebenslang temporären Leibrente:

$$
\begin{aligned}
{}_{u|}\ddot{a}_{x:n} := E[PV] &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_{u+j}p_x \cdot v^{u+j} \\
&= {}_{u}E_x \cdot \ddot{a}_{x+u:n} \\
&= \frac{N_{x+u} - N_{x+u+n}}{D_x}.
\end{aligned}
$$

Barwerte von Todesfall-Leistungen

- Versicherung, die beim Tod des Versicherten der im Vertrag bestimmten Person eine Leistung erbringt
- Zum Beispiel Risikolebensversicherungen: Mit ihnen versichern Verbraucher ausschließlich den eigenen Tod
- die Leistung bekommen dann die Hinterbliebenen oder Erben des Versicherten

Lebenslange Risikolebensversicherung

- versicherte Leistung genau dann im Jahr fällig, wenn (x) stirbt
- Erwarteter Barwert:

$$
\begin{aligned}
A_x := E[PV] = E[v^{1+K_x}] &= \sum_{j=0}^{w-x} v^{j+1} \cdot {}_{j|}q_x \\
&= \sum_{j=0}^{w-x} \frac{d_{x+j} \cdot v^{x+j+1}}{l_x \cdot v^x} = \sum_{j=0}^{w-x} \frac{C_{x+j}}{D_x} \\
&= \frac{M_x}{D_x}
\end{aligned}
$$

Temporäre Risikolebensversicherung

- Todesfallleistung am Jahresende nur dann fällig, wenn (x) innerhalb der Jahresversicherungsdauer n verstirbt
- (x) überlebt den gesamten Zeitraum $\Rightarrow$ Leistung wird nicht ausgezahlt
- Erwarteter Barwert:

$$
\begin{aligned}
{}_nA_x := A_{\overset{1}{x}:n} &= E[PV] = E[v^{\min\{1+K_x,n\}}] = \sum_{j=0}^{n-1} v^{j+1} \; {}_{j|}q_x \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d_{x+j} \cdot v^{x+j+1}}{l_x \cdot v^x} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{C_{x+j}}{D_x} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

Die Ziffer „1“ über den Alter x bedeutet, dass der Fokus der Betrachtung auf der Person (x) liegt.

Gemischte Kapitallebensversicherung

- für Paare und Familien geeignet
- Bei vorzeitigem Tod der versicherten Person (x) wird dann die vereinbarte Versicherungssumme an die Person ausgezahlt, die im Versicherungsvertrag als Begünstigter benannt wird
- Im Erlebensfall fällt der Ertrag sowie die erzielten Überschüsse an den Versicherten
- Todesfall- und Erlebensfallsumme können hier in unterschiedlicher Höhe festgelegt werden
- Erwarteter Barwert:

$$
\begin{aligned}
A_{x:n} := E[PV] &= {}_nA_x + {}_nE_x \\
&= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}
$$

Termfix-Versicherung

- Kapitallebensversicherung bei der nach dem Tod der versicherten Person (x) die abgeschlossene Versicherung ohne Zahlung von Beiträgen weiterläuft
- Auszahlung der vereinbarten Versicherungssumme erst bei Vertragsende
- die Versicherungsleistung wird nach der Versicherungsdauer auf jeden Fall ausgezahlt, unabhängig, ob (x) diesen Zeitpunkt erlebt
- Erwarteter Barwert:

$$E[PV] = PV = v^n$$

Der erwartete Barwert ist also deterministisch.

Leistungsspektren

- besonderes Muster bezüglich der Leistungshöhe
- bezeichnet mit dem Vektor $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$
  - Leistungshöhe für jedes Jahr der Versicherungsdauer, als Faktor bezogen auf die 100%-Leistung
  - $\boldsymbol{\theta}^E$ Erlebensfallspektrum und $\boldsymbol{\theta}^T$ Todesfallspektrum
  - grundsätzlich $\theta_j \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$
  - Werte größer als 1 erlaubt, damit im Versicherungsjahr j das θ_j-fache der 100%-Leistung gezahlt wird

Beispiel

1. die Todesfallsumme steigt linear oder fällt linear (Risikolebens- oder gemischten Versicherungen)
2. Todesfallsumme steigt zunächst und fällt dann

Leistungsspektren von Versicherungsprodukte

- Für eine um n Jahre aufgeschobenen lebenslangen, geometrisch steigenden Leibrente

$$\theta_j := \theta_j^E = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 1, \ldots, n \\ (1+r)^{j-n-1} & \text{für } j > n \end{cases}$$

  und $\theta_j^T = 0$ für alle $j \geq 1$
- Für eine Risikolebensversicherung mit linear fallender Todesfallsumme

$$\theta_j := \theta_j^T = \frac{n+1-j}{n} \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n$$

  und $\theta_j^E = 0$ für alle $j \geq 1$

Leistungsspektren von Versicherungsprodukte

- Für eine gemischten Kapitallebensversicherung mit konstanter Todesfallleistung

$$\theta_j^E = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 1, \ldots, n-1 \\ 1 & \text{für } j = n \end{cases}$$

und $\theta_j^T = 1$ für alle $j = 1, \ldots, n$

Leistungsspektren von Kommutationszahlen

- Erlebensfall-Leistung: Mit

$$N_x^{\boldsymbol{\theta}^E} = \sum_{j=0}^{w-x} \theta_{j+1}^E \cdot D_{x+j}$$

bekommt man z.B für eine lebenslang zahlbaren, geometrisch steigenden Rente

$$\ddot{a}_x^{\boldsymbol{\theta}^E} = \frac{N_x^{\boldsymbol{\theta}^E}}{D_x}$$

Leistungsspektren von Kommutationszahlen

- Todesfall-Leistung: Mit

$$M_x^{\theta^T} = \sum_{j=0}^{w-x} \theta_{j+1}^T \cdot C_{x+j}.$$

erhält man z.B. für eine Risikolebensversicherung mit linear fallender Todesfallsumme

$$A_{\underset{x:n}{1}}^{\theta^T} = \frac{M_x^{\theta^T} - M_{x+n}^{\theta^T}}{D_x}.$$

Literatur

- Lebensversicherungsmathematik: Basiswissen zur Technik der deutschen Lebensversicherung, Jens Kahlenberg, *Springer, 2018*
- https://www.verivox.de/risikolebensversicherung/erlebensfallversicherung/
- https://www.vermoegenszentrum.de/ratgeber/wissensbeitraege/vorsorge-optimieren/leibrente-eine-sichere-rente-bis-ans-lebensende.html
- https://abc-der-rentenversicherung.com/abgekuerzte-leibrente/

Literatur

- http://www.versicherungen-lexikon.de/termfixversicherung
- http://www.versicherungen-lexikon.de/ablaufleistung/