Deckungskapital

Seminar: Actuarial Machine Learning

Dozent: Dr. Zoran Nikolić

Zeynep Inan | 04.12.20

Gliederung

Deckungskapital

- zentraler Begriff für die Lebensversicherungsmathematik
- ein Teil der Prämie
- Deckungsrückstellung / Bilanzreserve:

→ die Bilanzgröße ist der tatsächlich vorgehaltene Betrag

→ prospektive Methode

→ Zinszusatzreserven

- Deckungskapital:

→ Betrag, der vorgehalten werden sollte, um Garantieleistungen zu erbringen

Universität zu Köln

Deckungskapital

- ${}_mV_x$ Notation für das Deckungskapital nach *m* Versicherungsjahren im Alter von *x*
- <u>Für $m = 0$</u>: Erwarteter Barwert der Leistungen und Kosten

  =

  Erwarteter Barwert der Prämien
- <u>Für $m > 0$:</u>

➢ ${}_mV_x^{prosp}$ =*Erwarteter Barwert, die zum Zeitpunkt m vom VU zukünftig zu zahlenden Leistungen u. Kosten*

− *Erwarteter Barwert, die zum Zeitpunkt m vom VN zukünftig zu zahlenden Prämien*

➢ ${}_mV_x^{retro}$ =*Erwarteter Endwert zum Zeitpunkt m der bislang vom VN bereits gezahlten Prämien*

− *Erwarteter Endwert zum Zeitpunkt m der bislang vom VU bereits gezahlten Leistungen und Prämien*

Universität zu Köln

Nettodeckungskapital

- ${}_mV_x^{Netto,prosp} = \mathbb{E}[\text{Barwert der zukünftigen Leistungen}]$
  $-\mathbb{E}[\text{Barwert der zukünftigen (Netto)Prämien}]$

- ${}_mV_x^{Netto,retro} = \mathbb{E}[\text{Endwert der bisherigen (Netto)Prämien}]$
  $-\ \mathbb{E}[\text{Endwert der bisherigen Leistungen}]$

➢**Prospektive Methode:**

$${}_mV_x^{Netto,prosp} = \begin{cases} NEP_{x+m:\overline{n-m}|} - NP_{x:\overline{t}|} \cdot ä_{x+m:\overline{t-m}|} & falls\ m < t \\ NEP_{x+m:\overline{n-m}|} & falls\ m \geq t \end{cases}$$

Es gilt: $NP_{x:\overline{t}|} = \frac{NEP_{x:\overline{n}|}}{ä_{x:\overline{t}|}}$

$$\Longrightarrow NP_{x:\overline{t}|} \cdot ä_{x+m:\overline{t-m}|} = \frac{NEP_{x:\overline{n}|}}{ä_{x:\overline{t}|}} \cdot ä_{x+m:\overline{t-m}|}$$

Universität zu Köln

Rekursive Berechnung

Notation: TFL_m Todesfallleistung und EFL_m Erlebensfallleistung für $m = 1, \ldots, n$

1. m-tes Versicherungsjahr:

   l_{x+m-1} Lebende im Alter von $x + m - 1 \Rightarrow {}_{m\text{-}1}V_x^{Netto}$

2. Nettoprämie:

$$NP_m = \begin{cases} NP_{x:\bar{t}|} & falls\ 1 \leq m \leq t \\ 0 & sonst \end{cases}$$

3. Setze $EFL := 0$

   l_{x+m-1} Überlebende $\Rightarrow EFL_{m-1}$ negative Auswirkung

Universität zu Köln

Rekursive Berechnung

4. Einnahmen in Form von Zinsen mit Rechnungszinssatz i
5. Am Ende des Jahres: Auszahlung der Todesfallleistung TFL_m an die Verstorbenen d_{x+m-1}

   $\longrightarrow l_{x+m}$Überlebende
6. Für die Überlebenden entsteht das Nettodeckungskapital: ${}_{m+1}V_x^{Netto}$

Rekursive Berechnung

Zusammenfassung:

$$
\begin{array}{ll}
\quad l_{x+m-1} \cdot {}_{m\text{-}1}V_x^{Netto} & \textit{1.} \\
+l_{x+m-1} \cdot NP_m & \textit{2.} \\
-l_{x+m-1} \cdot EFL_{m-1} & \textit{3.} \\
+i \cdot l_{x+m-1} \cdot ({}_{m\text{-}1}V_x^{Netto} + NP_m - EFL_{m-1}) & \textit{4.} \\
-d_{x+m-1} \cdot TFL_m & \textit{5.} \\
\hline
\end{array}
$$

$$= (1+i) \cdot l_{x+m-1} \cdot ({}_{m\text{-}1}V_x^{Netto} + NP_m - EFL_{m-1}) - d_{x+m-1} \cdot TFL_m$$

$$= \boldsymbol{l_{x+m} \cdot {}_{m}V_x^{Netto}} \qquad \textbf{(1)}$$

zu beachten: Die Todesfallleistung wird noch im gleichen Jahr m ausgezahlt.

Universität zu Köln

Rekursive Berechnung

Wissen, dass: $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ und $q_x = \frac{d_x}{l_x}$

Wenn man **(1)** durch l_{x+m-1} dividiert:

$$p_{x+m-1} \cdot {}_mV_x^{Netto} = (1+i) \cdot ({}_{m\text{-}1}V_x^{Netto} + NP_m - EFL_{m-1}) - q_{x+m-1} \cdot TFL_m \quad \textbf{(2)}$$

mit $v = \frac{1}{1+i}$:

$${}_mV_x^{Netto} = \frac{(1+i)}{p_{x+m-1}} \cdot ({}_{m\text{-}1}V_x^{Netto} + NP_m - EFL_{m-1} - v \cdot q_{x+m-1} \cdot TFL_m)$$

⇨ *Versicherungsmathematische Bilanzgleichung*

Natürliche Prämie

- Der erwartete Barwert der Todesfall- und Erlebensfallleistungen im *m*-ten Versicherungsjahr

$$v \cdot q_{x+m-1} \cdot TFL_m + v \cdot p_{x+m-1} \cdot EFL_m$$

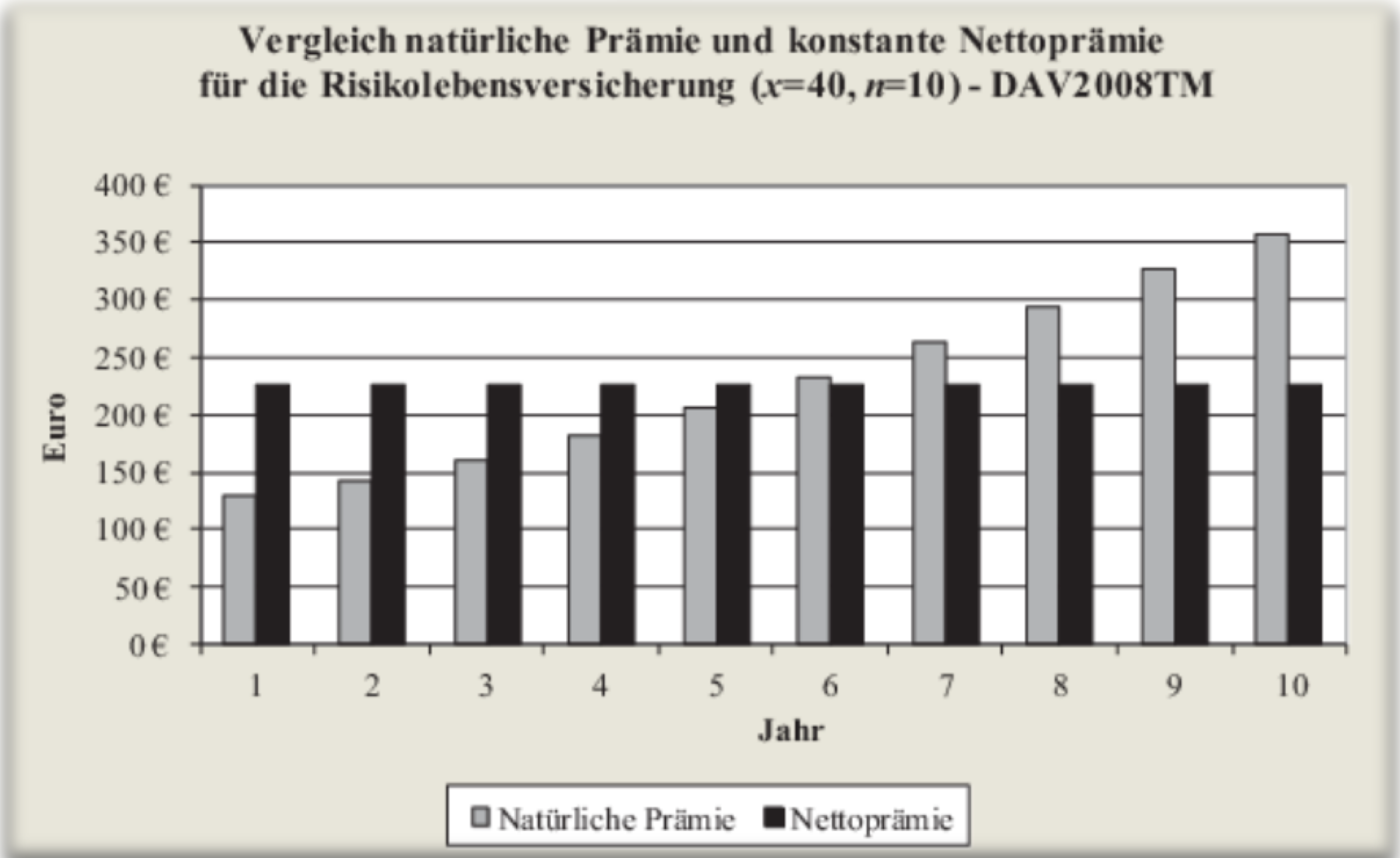
- jedes Jahr steigende Beiträge
- je älter eine versicherte Person, desto höher die Sterbewahrscheinlichkeit
- es werden konstante Prämien an das VU gezahlt
- Für $m \geq 0$ gilt:

Differenz zwischen erwartetem Barwert zukünftiger Leistungen und Prämien

=

Prospektives Nettodeckungskapital

Vergleich Natürliche Prämie und Nettoprämie



Beitragszerlegung

Aus **(2)** leiten wir die Nettoprämie:

$$NP_m = \underbrace{v \cdot q_{x+m-1} \cdot (TFL_m - {}_{m}V_x^{Netto})}_{=:\, RP_m} + \underbrace{v \cdot {}_{m}V_x^{Netto} - {}_{m\text{-}1}V_x^{Netto} + EFL_{m-1}}_{=:\, SP_m}$$

- 1.Teil: *Risikoprämie* RP_m im *m*-ten Versicherungsjahr

  - das *riskierte Kapital:* $TFL_m - {}_{m}V_x$

- 2.Teil: Sparprämie SP_m

  - Anstieg des Deckungskapitals

Universität zu Köln

Fälle der Beitragszerlegung

<u>1.Fall</u> Annahme: $TFL_m - {}_mV_x^{Netto} > 0 \Rightarrow RP_m > 0$

- Wenn $RP_m < NP_m$, dann $SP_m > 0 \;\rightarrow {}_mV_x^{Netto}$ steigt
- Wenn $RP_m = NP_m$, dann $SP_m = 0 \;\rightarrow {}_mV_x^{Netto}$ steigt nur durch Verzinsung
- Wenn $RP_m > NP_m$, dann $SP_m < 0 \;\rightarrow {}_mV_x^{Netto}$ sinkt (Entsparung)

<u>2.Fall</u> Annahme: $TFL_m - {}_mV_x^{Netto} = 0 \Rightarrow RP_m = 0$

- Es gilt $TFL_m = {}_mV_x^{Netto}$
- $NP_m = SP_m \rightarrow$ die Nettoprämie wird für das Deckungskapital und für die Erlebensfallleistung genutzt

Universität zu Köln

Fälle der Beitragszerlegung

<u>3.Fall</u> Annahme: $TFL_m - {}_mV_x^{Netto} < 0 \Rightarrow RP_m < 0$

- Es folgt $SP_m > NP_m \rightarrow$ Sparprämie wird für das Deckungskapital genutzt
- $RP_m < 0 \Leftrightarrow TFL_m = 0 \; oder \; TFL_m < {}_mV_x^{Netto}$ $\rightarrow$Vererbung

Prämiendifferenzformel

$$ {}_{m}V_{x}^{Netto} = NEP_{x+m} - NP_{x:\overline{t}|} \cdot ä_{x+m:\overline{t-m}|} $$

Nettoprämie:

$$ NP_{x+m:\overline{t-m}|} = \frac{NEP_{x+m}}{ä_{x+m:\overline{t-m}|}} $$

$$ \Leftrightarrow NEP_{x+m} = NP_{x+m:\overline{t-m}|} \cdot ä_{x+m:\overline{t-m}|} $$

Eingesetzt in ${}_{m}V_{x}^{Netto}$:

$$ {}_{m}V_{x}^{Netto} = \left(NP_{x+m:\overline{t-m}|} - NP_{x:\overline{t}|}\right) \cdot ä_{x+m:\overline{t-m}|} $$

$\Rightarrow$ ***Prämiendifferenzformel***

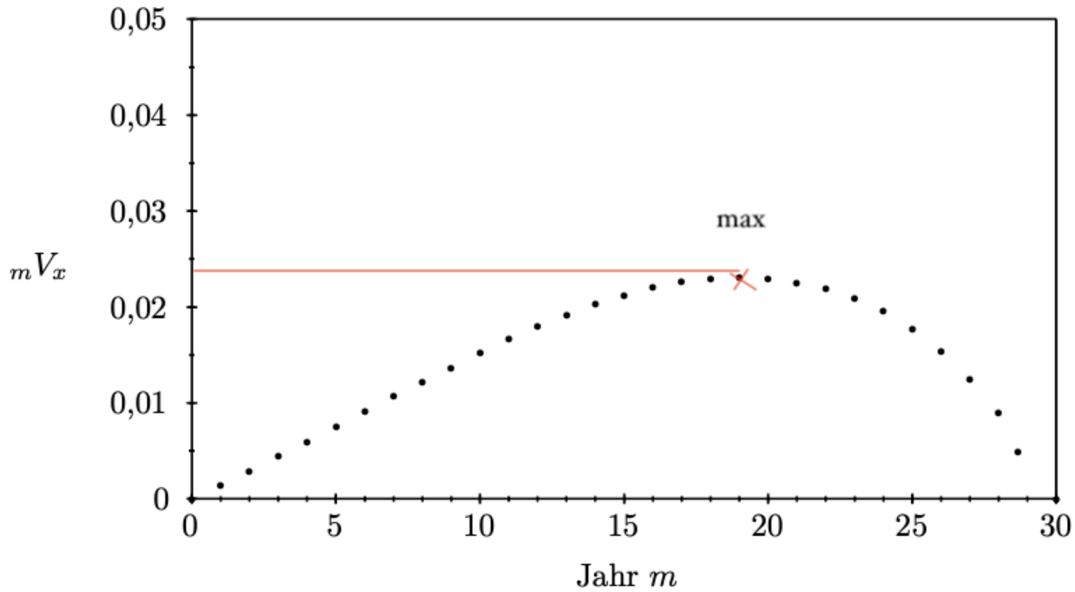
Typische Verläufe

Beispiel 1: Temporäre Risikolebensversicherung, x=30, t=n

Sei $0 < m < t \leq n$

$$
\begin{aligned}
{}_mV_x^{Netto,prosp} &= {}_{n\text{-}m}A_{x+m} - NP_{x:\overline{t}|} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}|} \\
&= NP_{x+m:\overline{t-m}|} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}|} - NP_{x:\overline{t}|} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}|} \\
&= NP_{x+m:\overline{n-m}|} - NP_{x:\overline{t}|} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}|}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow NP_{x+m:\overline{n-m}|} = {}_{n\text{-}m}A_{x+m}$$

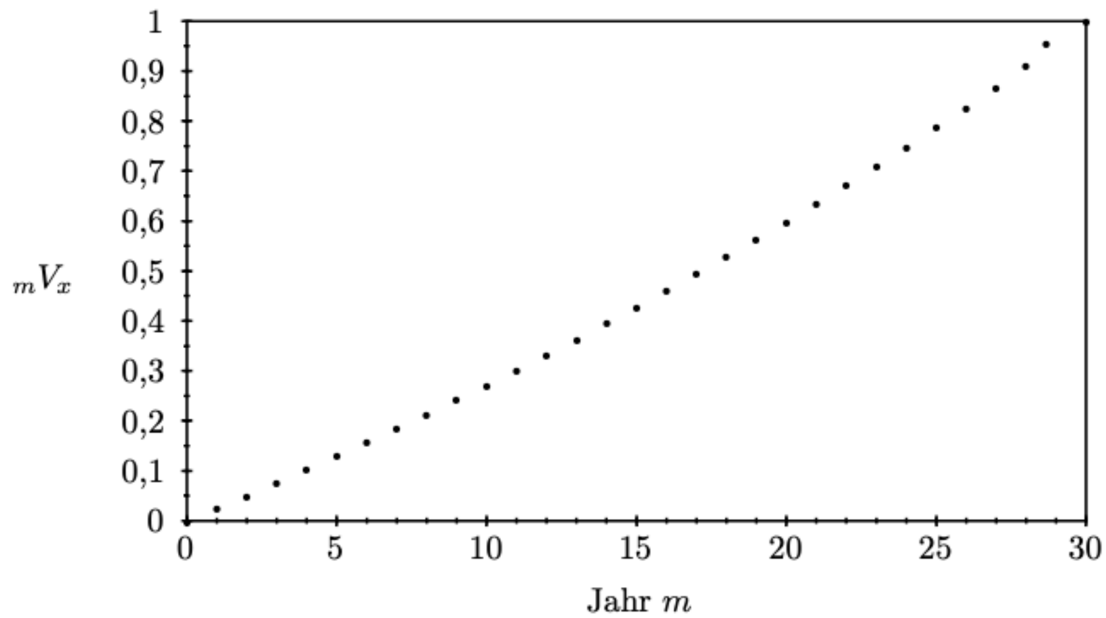


Typische Verläufe

Beispiel 2: **Gemischte Kapitallebensversicherung, x=30, t=n**

Sei $0 < m < t \leq n$

$$ {}_{m}V_{x}^{Netto,prosp} = A_{x+m:\overline{n-m}|} - NP_{x:\bar{t}|} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}|} $$



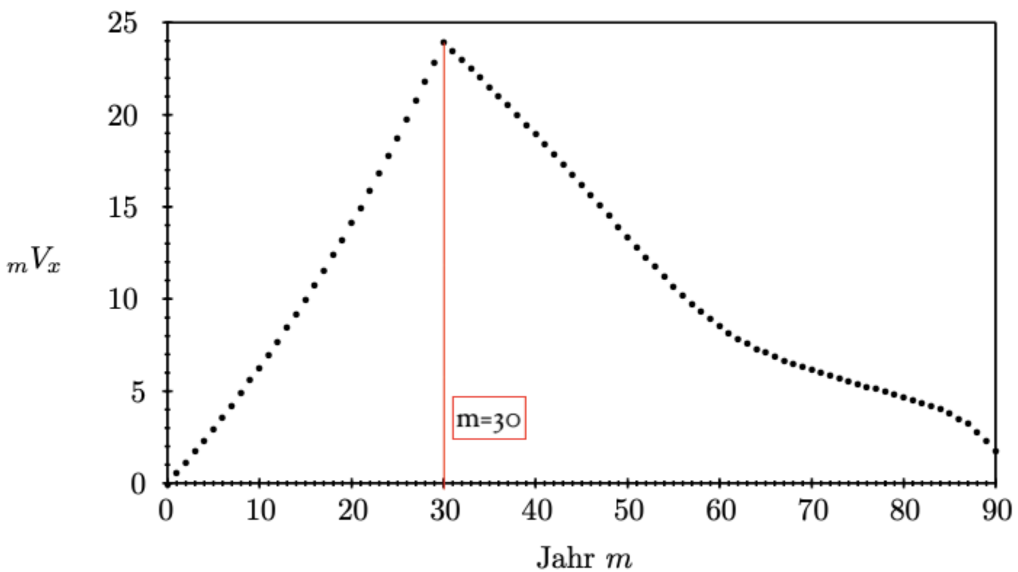
Typische Verläufe

<u>Beispiel 3:</u> Aufgeschobene Rentenversicherung

- n=30 Aufschubzeit, m<n

Das Deckungskapital ist gegeben durch:

$$ {}_mV_x^{Netto} = \begin{cases} {}_{n\text{-}m}\ddot{a}_{x+m} - NP_{x:\bar{t}|} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}|} & für\ 0 \leq m < n, \\ \ddot{a}_{x+m} & für\ m \geq n. \end{cases} $$



⇨ **mögliches Problem:** *Langlebigkeitsrisiko*

Universität zu Köln

Gezillmertes Deckungskapital
(August Zillmer)

- Verteilung der Abschlusskosten auf die gesamte Laufzeit einer Versicherung
- Abschlusskosten werden jedoch direkt am Anfang fällig
- Schutz vor Verlusten
- Gleichung des gezillmerten Deckungskapitals:

$$ {}_mV_x^Z = {}_mV_x - \alpha \cdot \frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{t-m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}, $$

wobei $\alpha = \alpha^Z$ für die einmaligen Abschlusskosten steht.

- Für $m = 0$ gilt ${}_0V_x^Z = -\alpha$

Gezillmertes Deckungskapital: Beispiel

Annahme: monatliche Gesamtprämie 100€ ohne Verwaltungskosten mit $t = 20$

- $100€ \cdot 240 = 24000€$
- Abschlusskostensatz von 3% des Gesamtbetrages ⇒ $720€$ Abschlusskosten
- pro Monat ⇒ $720€ \div 240 = 3€$ ⇒ $103€$ monatlich

Nach § 169 Absatz 3 des VVG

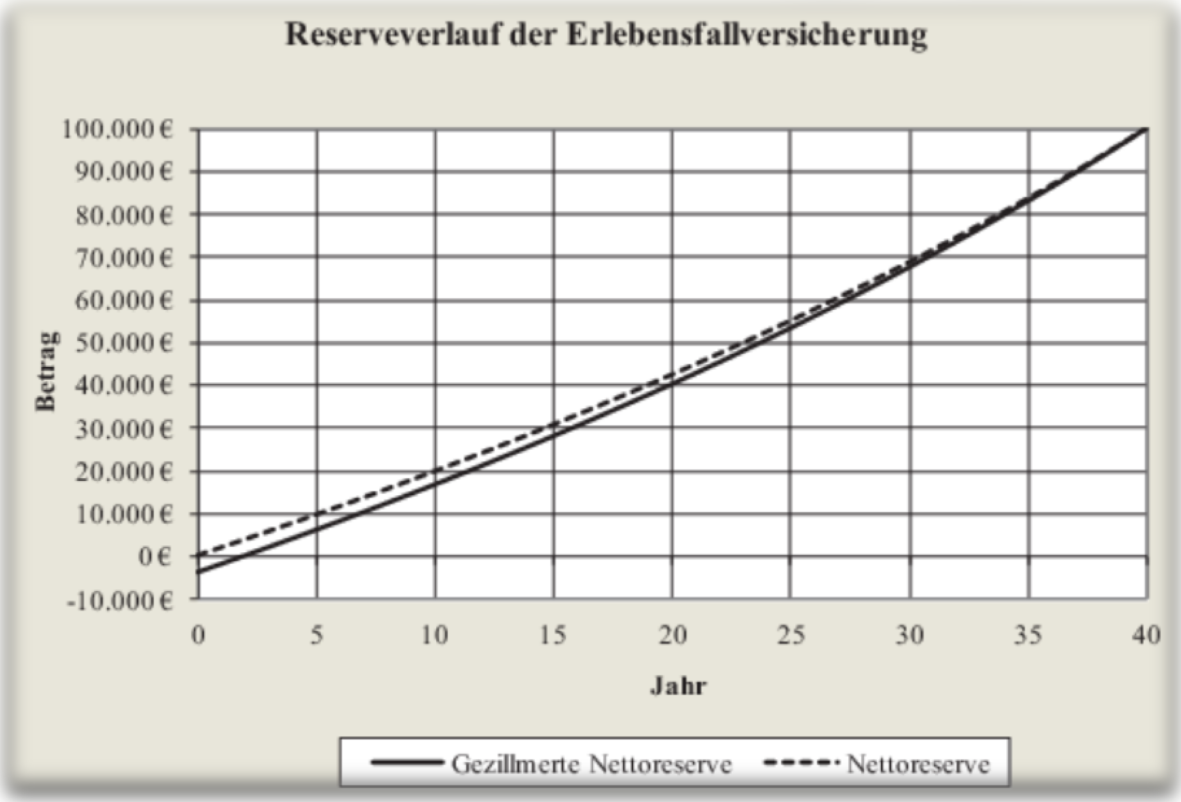
↳ Abschlusskostensatz nur für die ersten fünf Jahre:

$$\frac{Betrag\ des\ Abschlusskostensatzes}{60\ Monate} = \frac{720}{60} = 12€$$

⇒ Berechnung der Gesamtprämie so, dass die Abschlusskosten auf die ersten 5 Jahren verteilt werden

! Prämie bleibt dennoch konstant

Gezillmertes Deckungskapital



➢ *“schwebendes“ Dauerschuldverhältnis*

VIELEN DANK

FÜRS ZUHÖREN!

Universität zu Köln