Submetrien von Alexandrov-Räumen

1. Was sind Submetrien und wofür sind sie gut?

1.1. Die erste dieser rhetorischen Fragen läßt sich sehr leicht beantworten. Bezeichnet man nämlich in metrischen Räumen den abgeschlossenen Ball mit Radius r um den Punkt x als $B_r(x)$, so heißt eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen Submetrie, wenn $f(B_r(x)) = B_r(f(x))$ für alle $x \in X$ und $r \in R^+$ gilt. Diese Definition ist von Berestovskii [Ber88] bei dem Versuch geprägt worden, den Begriff der Riemannschen Submersion im metrischen Kontext zu beschreiben. Submetrien können auch als gewisse Objekte nur auf dem Totalraum X beschrieben werden, Y erscheint dabei lediglich als ein Hilfsinstrument. Ist nämlich eine Submetrie $f : X \to Y$ gegeben, so sind je zwei Fasern von f äquidistant (Definition 4.2). Andererseits bestimmt jede Zerlegung von X in äquidistante Teilmengen $(X_j)_{j\in J}$ eine Submetrie $f : X \to J$, wobei J mit der induzierten Metrik versehen wird.

1.2. Die zweite Frage werden wir gar nicht beantworten. Wir hoffen, daß dem Leser der Begriff an sich interessant genug erscheint. Es beruhigt, zu wissen, daß sich andere Autoren bereits mit speziellen äquidistanten Zerlegungen beschäftigt haben, siehe z.B. [GG88] und [GW97] im Falle des Euklidischen Raumes und der euklidischen Sphären. Wir möchten lediglich darauf hinweisen, daß Submetrien beim Kollaps ([Yam91], [Fuk88], [GK95]) und in Starrheitsfragen ([GG87]) omnipräsent sind. Eine leichte Anwendung dieser Art findet man in Abschnitt 11, eine viel weniger triviale wird der Leser im zweiten Teil der Dissertation vorfinden. Wir hoffen, daß weitere Anwendungen nicht auf sich warten lassen.

1.3. Viele Submetrien sind dem Leser sicherlich schon über den Weg gelaufen, ohne, daß er sie bei diesem Namen zu nennen wußte. Projektionen zwischen euklidischen Räumen, Riemannsche Submersionen zwischen glatten Riemannschen Mannigfaltigkeiten, sowie Quotientenabbildungen für isometrische Gruppenoperationen sind die bekanntesten Beispiele. Eine andere Gruppe von Beispielen entsteht auf die folgende Art. Sei M eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit, N eine glatte Untermannigfaltigkeit von M mit der Eigenschaft, daß jede in eine normale Richtung startende Geodätische bis zur festen Länge d den Abstand zu N minimiert und nicht über die Zeit d hinaus (vgl. [Heb81]). Dann bestimmt die Abstandsfunktion zur Menge N eine Submetrie $d_N : M \to [0, d]$.

Bemerkung 1.1. In diesem Licht wird die Blaschke-Vermutung eine natürliche Vermutung über Submetrien, die besagt, daß eine kompakte Mannigfaltigkeit nicht zu viele (endlich viele?) äquidistante Zerlegungen besitzt, die nicht von Gruppenoperationen stammen.

1.4. Wir geben nun einige typische Beispiele, die zeigen, daß hohe Regularität bei Submetrien nichts Selbstverständliches ist.

Beispiel 1.2. Ist $C \subset R^n$ eine konvexe, nicht volldimensionale Menge, so ist die Abstandsfunktion $d_C : R^n \to R^+$ zur Menge C eine Submetrie. Wir werden sehen, daß jede Submetrie von R^n auf R^+ von dieser Form ist (Proposition 6.1). Wir merken, daß Submetrien zwischen so angenehmen Räumen Fasern haben können, die keine Mannigfaltigkeiten sind.

Beispiel 1.3. Sei in S^2 ein Halbkreis V auf einem Großkreis gewählt. Die Abstandsfunktion $d_V : S^2 \to [0, \frac{\pi}{2}]$ ist eine Submetrie.

Beispiel 1.4. Auf dem hyperbolischen Raum ist es viel leichter, wilde Submetrien zu konstruieren, da Fokalpunkte nicht so schnell auftreten. Ist in H^2 eine vollständige C^2-Kurve γ gegeben, die in jedem Punkt weniger gekrümmt ist als die Horosphären (d.h. keine Fokalpunkte hat), so gibt die gerichtete Abstandsfunktion von γ eine Submetrie $f : H^2 \to R$. Dasselbe funktioniert, wenn man H^2 durch H^n und γ durch eine $C^{1,1}$ Hyperfläche ersetzt, die weniger gekrümmt ist als die Horosphären. Wir sehen insbesondere, daß der Raum der Submetrien zwischen H^2 und R unendlichdimensional ist. Das scheint bei kompakten oder nichtnegativ gekrümmten Mannigfaltigkeiten schwer möglich zu sein.

Beispiel 1.5. Submetrien zwischen H^3 und R^+ können aber noch viel komischere Fasern haben. Sei γ ein Strahl in H^2, der von einem Punkt x ausgeht. Betrachte zwei Hälften von Horosphären η_1 und η_2, die beide in x starten und in die γ entgegengesetzte Richtung laufen. Sei C die Fläche, die von η_1 und η_2 eingespannt wird und sei schließlich S die Vereinigung von C und γ. Betrachtet man nun H^2 als totalgeodätischen Teilraum von H^3, so sieht man, daß die Abstandsfunktion $d_S : H^3 \to R^+$ eine Submetrie ist. Man beachte, daß die Faser $S = d_S^{-1}(0)$ in verschiedenen Punkten verschiedene Dimension hat.

Bemerkung 1.6. Es ist möglich noch schlechtere Fasen zu bekommen. So kann jede Menge positiver Reichweite (Definition 12.1) als Faser einer Submetrie auftreten. Und solche Mengen können sehr komplizierte Topologie haben.

Wir möchten noch auf folgendes hinweisen. Es ist sehr leicht, lokal Submetrien von Mannigfaltigkeiten auf eindimensionale Räume zu definieren und die Hindernisse für die Existenz von solchen Submetrien auf dem ganzen Raum sind globaler Natur (topologischer oder differentialgeometrischer). Die Existenz von lokalen Submetrien auf höherdimensionale Räume ist hingegen ein nichttriviales Problem. Die meisten Metriken lassen eben auch keine lokalen Riemannschen Submersionen zu (vgl. [GG88]). Unsere Auswahl von Beispielen ist nicht zuletzt deswegen fast ausschließlich auf eindimensionale Submetrien beschränkt.

1.5. Es scheint logisch, Submetrien zwischen Alexandrov-Räumen zu studieren, selbst wenn man in erster Linie an Mannigfaltigkeiten interessiert ist. Zum einen lassen sich viele Sätze, die für Submetrien von einer Mannigfaltigkeit gelten, in dieser Allgemeinheit beweisen, was natürlich zum besseren Verständnis beiträgt. Ein triftigerer Grund ist die Tatsache, daß der Basisraum B einer Submetrie $f : M \to B$ einer Mannigfaltigkeit M nur ein Alexandrov-Raum ist (wenn auch mit sehr spezieller Struktur). Ein noch besserer Grund ist die Hoffnung, mit Hilfe von Submetrien Kollaps beschreiben zu können.

1.6. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit den grundlegenden Strukturen von Submetrien zwischen endlich-dimensionalen Alexandrov-Räumen mit von unten beschränkter Krümmung. Wir werden in einer Fortsetzung die Theorie auf Mannigfaltigkeiten übertragen und viel bessere Resultate erzielen. Einen Ausblick auf diese Ergebnisse findet der Leser in Abschnitt 13. Da unsere Beweise dieser stärkeren Resultate im Moment noch denkbar wenig elegant sind, haben wir beschlossen, sie noch ein wenig reifen zu lassen.

Es dünkte uns, daß kaum einer an Submetrien von Alexandrov-Räumen interessiert sein könnte, ohne diese zu kennen. Dementsprechend setzen wir eine Vertrautheit im Umgang mit Alexandrov-Räumen voraus.

1.7. Da wir nur die Grundlagen der Theorie beschreiben, sind spektakuläre Ergebnisse kaum zu erwarten. Ein paar, nach unserer Meinung interessantere Sätze seien jedoch vorgestellt.

(1) Jede Submetrie zwischen Alexandrov-Räumen ist in einem geeigneten Sinne differenzierbar, und das Differential ist in jedem Punkt eine Submetrie zwischen den Tangentialräumen.
(2) Die Differentiale können mit Hilfe von Submetrien zwischen Räumen kleinerer Dimension beschrieben werden.
(3) Auf jeder Faser ist die induzierte Metrik zur inneren Metrik lokal Lipschitz-äquivalent.

(4) Submetrien mit diskreten Fasern können als verzweigte Überlagerungen beschrieben werden.
(5) Submetrien zwischen Räumen mit Krümmung ≥ 1 (die bei der Untersuchung der Differentiale automatisch entstehen) neigen dazu, Isometrien zu sein, wenn der Basisraum groß ist.
(6) Jede Submetrie zwischen Alexandrov-Räumen kann als Komposition einer Submetrie mit zusammenhängenden Fasern und einer mit diskreten Fasern dargestellt werden.

1.8. Viele wichtige Themen sind außerhalb unserer Darstellung geblieben. So können wir nur wenig über die topologische Struktur von Submetrien zwischen allgemeinen Alexandrov-Räumen beweisen (für Mannigfaltigkeiten hingegen kann man sehr zufriedenstellende Ergebnisse erzielen, s. Proposition 13.1). Außerdem haben Zusammenhänge zwischen extremalen Mengen und Submetrien keinen Eingang in die Arbeit gefunden, da wir die natürlichsten Vermutungen nicht beweisen konnten. Wir hoffen, beides später nachzuholen.

2. Metrische Einführung

2.1. Metrische Bezeichnungen. Ein metrischer Raum X heißt eigentlich, wenn jede abgeschlossene, beschränkte Teilmenge kompakt ist. Die Gromov-Hausdorff-Topologie auf der Menge der kompakten oder der punktierten, eigentlichen Räume kürzen wir als G.-H.-Topologie ab.

In metrischen Räumen wird mit d immer der Abstand bezeichnet, ohne Hinweis auf den Raum X. Ist $A \subset X$ eine Teilmenge, so bezeichnen wir mit d_A den Abstand zur Menge A. Für einen Punkt $x \in X$ bezeichnen wir mit rad_x das Maximum der Funktion d_x. Das Infimum über alle rad_x nennen wir den Radius des Raumes und bezeichnen es mit $\mathrm{rad}(X)$. Das Supremum über alle rad_x ist der Durchmesser von X; wir bezeichnen es mit $\mathrm{diam}(X)$. Für eine Teilmenge $A \subset X$ und eine Zahl $r \geq 0$ bezeichnen wir als $B_r(A)$ die Menge der Punkte x mit $d(x, A) \leq r$. Eine Teilmenge A liegt r-dicht in X, wenn $X = B_r(A)$ gilt. Für eine positive Zahl r bezeichnen wir als rX die Menge X mit der um den Faktor r skalierten Metrik. Eine einpunktige Menge bezeichnen wir als $\{\mathrm{pt}\}$, die leere Menge als $\emptyset$. Mit M_k^n bezeichnen wir die n-dimensionale, vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der konstanten Krümmung k. Mit S^n bzw. R^n ist immer M_1^n bzw. M_0^n gemeint.

Bemerkung 2.1. Wenn wir vom Radius einer Teilmenge A eines metrischen Raumes X sprechen, ist damit immer der Radius des abstrakten metrischen Raumes A gemeint, nicht etwa Filling Radius von A in X.

Eine Kürzeste, bzw. ein Strahl, bzw. eine Gerade in einem metrischen Raum ist eine isometrische Einbettung eines Intervalls, bzw. von R^+, bzw. von R. Als xy bezeichnen wir eine Kürzeste zwischen x und y, als $|xy|$ ihre Länge $d(x, y)$. Ein Raum heißt geodätisch, wenn je zwei Punkte durch eine Kürzeste verbunden sind. Eine Teilmenge A eines geodätischen Raumes X heißt konvex, bzw. totalkonvex, wenn für je zwei Punkte aus A eine, bzw. jede Kürzeste zwischen den Punkten in A liegt. Wichtige Ausnahme: hat der Raum X Krümmung ≥ 1, so sollen die Bedingungen nur für Punkte mit Abstand $< \pi$ gelten, i.e. S^0 ist immer eine totalkonvexe Teilmenge.

Bemerkung 2.2. Man beachte, daß unsere Definition einer totalkonvexen Menge von der in der Differentialgeometrie üblichen Definition abweicht. In S^n stimmen unsere Begriffe von konvex und totalkonvex überein!

2.2. Dimension. Wir werden ein wenig Dimensionstheorie aus [HW41] benutzen. Die topologische Dimension eines metrisierbaren separablen Raumes X bezeichnen wir als $\dim(X)$, die Hausdorffdimension eines metrischen Raumes X als $\dim_H(X)$. Es gilt $\dim_H(X) \geq \dim(X)$ und $\dim(A) \leq \dim(X)$ für jede Teilmenge $A \subset X$. Ist X eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen X_j mit $\dim(X_j) \leq n$, so gilt $\dim(X) \leq n$.

Fakt 2.1. *Ist $f : X \to Y$ eine stetige, abgeschlossene Abbildung, so gilt* $\dim(X) \leq \dim(Y) + \sup(\dim(f^{-1}(y)))$, *wobei y alle Punkte in Y durchläuft.*

Ist X ein eigentlicher Raum, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, so ist die Einschränkung von f auf jeden Ball $B_r(x)$ abgeschlossen und wir erhalten aus der letzten Bemerkung:

Fakt 2.2. *Ist X ein eigentlicher Raum, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, so gilt* $\dim(X) \leq \dim(Y) + \sup(\dim(f^{-1}(y)))$, *wobei y alle Punkte in Y durchläuft.*

Ein metrischer, separabler Raum X der topologischen Dimension n heißt Cantor-Mannigfaltigkeit, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ mit $\dim(A) \leq n - 2$ das Komplement $X \setminus A$ zusammenhängend ist ([HW41],p.92). Hat jeder Punkt in einem zusammenhängenden Raum X eine Umgebung, die eine Cantor-Mannigfaltigkeit ist, so ist der ganze Raum auch eine Cantor-Mannigfaltigkeit. Jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist eine Cantor-Mannigfaltigkeit. Enthält ein n-dimensionaler Raum X eine dichte n-dimensionale Cantor-Mannigfaltigkeit U, so ist auch X eine Cantor-Mannigfaltigkeit. Insbesondere sind zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit Rand und endlichdimensionale zusammenhängende Alexandrov-Räume (s. unten) Cantor-Mannigfaltigkeiten. Letzteres wurde in [GP91] bewiesen und folgt aus den Resultaten von Perelman (vgl. Fakt 2.6).

2.3. Kegel und Spherical Joins. Dieser Abschnitt ist viel besser und ausführlicher in [LS97],p.541-543 dargestellt. Sei X ein metrischer Raum mit $\mathrm{diam}(X) \leq \pi$. Der euklidische Kegel CX über X ist der Raum, der aus $R^+ \times X$ entsteht, indem man alle Punkte $(0,x)$ zu einem Punkt, dem Ursprung 0, identifiziert. Wir schreiben für (t,x) einfach tx oder $t \cdot x$ und identifizieren Elemente x aus X mit Punkten $1 \cdot x$. R^+ operiert auf CX durch $s \cdot (t,x) = (st,x) = (st)x$ und invariante Teilmengen dieser Operation sind genau die Teilkegel. Für einen Punkt $v = tx$ nennen wir t den Betrag von v und bezeichnen es als $|v|$. Für zwei Punkte $v = tx, w = sy$ setzen wir $\langle v, w \rangle = t \cdot s \cdot cos(d(x,y))$.

Die Metrik auf CX ist gegeben durch: $d(v,w)^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2\langle v, w\rangle$, s.d. falls X die Sphäre S^n ist, CX der euklidische Raum R^{n+1} wird. Wie üblich gilt: $|v|^2 = \langle v, v\rangle = d(v,0)^2$; für jedes $x \in X$ ist $t \to tx$ eine Isometrie, deren Bild ein geodätischer Strahl ist.

Eine Abbildung $f : CX \to CY$ zwischen zwei Kegeln heißt homogen, wenn $f(tv) = tf(v)$ für alle t und alle $v \in CX$ gilt. Jede Abbildung $g : X \to Y$ induziert eine natürliche homogene Abbbildung $Cg : CX \to CY$, den (euklidischen) Kegel über g.

Ist X ein geodätischer Raum, bzw. von endlicher Hausdorffdimension, so auch CX; CX hat genau dann nichtnegative Krümmung, wenn X Krümmung ≥ 1 hat.

Ist $\gamma : [a,b] \to X$ eine Kürzeste der Länge $< \pi$ zwischen x und y, so ist die Menge $t\gamma(s)$ ein isometrisch eingebetteter flacher Winkel, der von den Strahlen tx und ty eingespannt wird.

Wir können, wenn so ein γ gegeben ist, in dem eben definierten konvexen Teil der euklidischen Ebene für beliebige $t, s \in R^+$ Punkte $v = tx$ und $w = sy$ zu einem z als gewöhnliche Vektoren addieren (i.e. wir nehmen die Mitte zwischen $2tx$ und $2sy$). Der so entstandene Vektor $z = v + w$ hängt natürlich von der Kürzesten γ ab. Nach Definition gilt immer $|v + w|^2 = |v|^2 + |w|^2 + 2\langle v, w\rangle$.

Gilt $z = v + w$, so geht durch z und v ein geodätischer Strahl, der zu (tw) parallel ist. Ist andererseits ein von v ausgehender Strahl γ gegeben, so existiert ein zu γ paralleler Strahl (tw) und jedes $z \in \gamma$ läßt sich als $v + t_z w$ darstellen.

In [LS97] haben Lang und Schröder nichtnegativ gekrümmte Kegel wie folgt charakterisiert:

Fakt 2.3. *Ein Kegel CX hat genau dann nichtnegative Krümmung, wenn für beliebige z und $y = x_1 + x_2$: $\langle z, x_1 + x_2\rangle \leq \langle z, x_1\rangle + \langle z, x_2\rangle$ gilt. Ferner gilt die Gleichheit genau dann, wenn z und die Kürzeste x_1x_2 ein euklidisches Dreieck einspannen.*

Sind CX und CY Kegel über Räumen X bzw. Y mit Durchmesser $\leq \pi$, so ist das Cartesische Produkt $CX \times CY$ natürlich isometrisch zu einem Kegel CZ über einem Raum Z, der in diesem Fall Spherical Join von X und Y heißt und als $X * Y$ bezeichnet wird.

X und Y sind in $X * Y$ auf natürliche Weise eingebettet, der Abstand zwischen beliebigen Punkten $x \in X$ und $y \in Y$ ist genau $\frac{\pi}{2}$. Jeder Punkt aus $X * Y \setminus (X \cup Y)$ liegt auf einer eindeutig bestimmten Kürzesten zwischen einem x aus X und einem y aus Y. Je zwei Kürzeste x_1y_1 und x_2y_2, die Punkte aus X mit Punkten aus Y verbinden, lassen sich isometrisch in die Sphäre S^3 einbetten.

Sind $f : X \to W$ und $g : Y \to Z$ beliebige Abbildungen, so erhält man eine natürliche Abbildung $f * g : X * Y \to W * Z$, s.d. der Kegel $C(f * g)$ gleich dem Produkt $Cf \times Cg$ ist.

Sind X und Y geodätische Räume, bzw. Räume mit Krümmung ≥ 1, bzw. von endlicher Hausdorffdimension, so überträgt sich diese Eigenschaft auf $X * Y$.

Bemerkung 2.3. Für die leere Menge gilt: $C(\emptyset) = \{\mathrm{pt}\}$; $X * \emptyset = X$.

Bemerkung 2.4. Hat ein Raum X Durchmesser $> \pi$, so definiert man den Kegel über X, indem man zuerst auf X eine neue Metrik durch $\bar{d}(x, y) = \min(d(x, y), \pi)$ definiert und dann den euklidischen Kegel bildet. Dasselbe macht man für Spherical Joins.

2.4. Ultralimites. Sehr gute Referenz für diesen Abschnitt ist [KL97].

Sei ω ein nichtprinzipaler Ultrafilter auf der Menge der natürlichen Zahlen (s. [HL85]). Dann erlaubt es ω, in jedem kompakten Raum X für jede Folge (x_j) einen ω-Limes $x = \lim_\omega(x_j)$ aus der Menge der Häufungspunkte von (x_j) auszuwählen. Andererseits kann man für jeden Häufungspunkt x der Folge einen Ultrafilter ω finden, s.d. gerade $\lim_\omega(x_j) = x$ gilt. Damit konvergiert (x_j) genau dann, wenn $\lim_\omega(x_j)$ von ω unabhängig ist.

Sei nun (X_j, x_j) eine Folge von punktierten metrischen Räumen. Dann ist der ω-Limes $(X, x) = \lim_\omega(X_j, x_j)$ als die Menge aller Folgen (y_j) definiert, s.d. y_j in X_j liegt und die Abstände $d(x_j, y_j)$ uniform beschränkt sind. Der Punkt x ist dabei die Folge (x_j). Man definiert eine Pseudometrik auf X durch $d((y_j),(z_j)) = \lim_\omega d(y_j,z_j)$ und teilt die Relation $d(y,z) = 0$ raus. Wir bemerken, daß der Raum X sich nicht ändert, wenn man die Grundpunkte leicht verschiebt, i.e. wenn man x_j durch y_j ersetzt, falls $d(x_j,y_j)$ uniform beschränkt sind.

Sind $A_j \subset X_j$ Teilmengen mit uniform beschränkten Abständen zu x_j, so kann man $A = \lim_\omega(A_j,a_j)$ als Teilmenge von X auffassen, für eine beliebige Folge von Punkten $a_j \in A_j$ mit uniform beschränkten $d(a_j,x_j)$.

Sind schließlich $f_j : (X_j,x_j) \to (Y_j,y_j)$ Lipschitzabbildungen mit einer uniformen Konstanten L, so induzieren sie eine natürlich definierte Lipschitzabbildung $f = \lim_\omega(f_j) : (X,x) \to (Y,y)$ und dieser ω-Limes ist verträglich mit Kompositionen.

Sind X_j eigentliche Räume, so haben die ω-Limites viel mit der G.-H.-Konvergenz zu tun. Konvergieren nämlich (X_j,x_j) im G.-H.-Sinn gegen einen eigentlichen Raum (X,x), so ist für jedes ω der Raum $\lim_\omega(X_j,x_j)$ isometrisch zu (X,x) ([KL97],p.132). Sei nun M eine Menge von Isometrieklassen von eigentlichen punktierten Räumen, die bezüglich der G.-H.-Topologie kompakt ist, z.B. die Menge $M(n,k)$ der Alexandrov-Räume mit Krümmung $\geq k$ und Dimension $\leq n$. Dann folgt aus der obigen Bemerkung, daß $\lim_\omega(X_j,x_j)$ einfach der ω-Limes dieser Folge im kompakten Raum M ist. Insbesondere folgt:

Lemma 2.4. $(X_j,x_j) \in M$ *konvergieren genau dann, wenn* $\lim_\omega(X_j,x_j)$ *nicht von* ω *abhängt (bis auf punktierte Isometrie, die nicht natürlich zu sein braucht).*

Seien jetzt $f_j : (X_j,x_j) \to (Y_j,y_j)$ L-Lipschitz Abbildungen, wobei (X_j,x_j) und (Y_j,y_j) in M liegen. Wir sagen, daß f_j gegen $f : (X,x) \to (Y,y)$ konvergieren, wenn $f = \lim_\omega(f_j)$ für jedes ω gilt. (Beachte, daß auch hier die Gleichheit bis auf punktierte isometrische Transformationen von X und Y verstanden wird). Insbesondere müssen (X_j,x_j) bzw. (Y_j,y_j) in M (in der G.-H.-Topologie) gegen (X,x) bzw. (Y,y) konvergieren.

Man kann mit Diagonalfolgenargumenten leicht zeigen, daß jede Folge f_j wie oben eine konvergente Teilfolge besitzt.

Diese Konvergenz hat die für uns ungünstige Eigenschaft, nur auf Isometrieklassen von Räumen und Funktionen definiert zu sein, so wird z.B. jede Isometrie eines Raumes mit der Identität identifiziert. Die Situation wird angenehmer, wenn der Limesraum (X,x) nicht bis auf Isometrie, sondern wirklich gegeben ist, i.e. wenn für jeden Ultrafilter ω die Isometrie $i : (X,x) \to \lim_\omega(X_j,x_j)$ kanonisch gegeben ist. Das ist z.B. der Fall, wenn X_j Teilmengen eines großen eigentlichen Raumes sind. Ein anderes für uns wichtiges Beispiel ist die Konvergenz gegen den Tangentialraum eines Alexandrov-Raumes (s. unten).

Ist für jedes ω eine kanonische Identifizierung der G.-H.-Limites (X, x) bzw. (Y, y) mit den ω-Limites der Folgen (X_j, x_j) bzw. (Y_j, y_j) gegeben, so kann man den Grenzwert $f : (X, x) \to (Y, y)$ einer Folge $f_j : (X_j, x_j) \to (Y_j, y_j)$ nicht nur bis auf Isometrie, sondern wirklich eindeutig festlegen.

Bemerkung 2.5. Die eben definierte Konvergenz von Funktionen ist auf eine andere Weise in [GP91] erschienen.

2.5. Alexandrov-Räume. In dieser Arbeit nehmen Alexandrov-Räume mit von unten durch eine Zahl k beschränkter Krümmung eine zentrale Stelle ein. Das sind vollständige, geodätische Räume, in denen für alle Dreiecke der Vergleichssatz von Toponogov gilt, der besagt, daß alle Dreiecke dicker sind als entsprechende Dreiecke in der zweidimensionalen einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit der Krümmung k. Wir nehmen immer stillschweigend an, daß alle Alexandrov-Räume endliche Hausdorffdimension haben. Die Hausdorffdimension ist dann eine ganze Zahl n und ist gleich der topologischen Dimension. Jeder solche Raum ist eigentlich ([BGP92],p.21). Alexandrov-Räume sind in vielen Arbeiten, vor allem [BGP92], [OS94], [Per94], untersucht worden und wir werden, ohne auf die Grundlagen der Theorie näher einzugehen, Resultate angeben, die wir im Text benutzen. Wir betonen noch einmal, daß Erfahrung im Umgang mit Alexandrov-Räumen vorausgesetzt wird.

Bemerkung 2.6. Um Verwirrungen vorzubeugen, bemerken wir, daß alle Alexandrov-Räume per definitionem zusammenhängend sind. Die einzige Ausnahme stellt der Raum S^0 dar, i.e. zwei Punkte mit gegenseitigem Abstand π. Räume mit Krümmung ≥ 1 haben Durchmesser $\leq \pi$.

Wenn in einem n-dimensionalen Alexandrov-Raum von einer Eigenschaft bezüglich eines Maßes gesprochen wird, ist immer das n-dimensionale Hausdorffmaß gemeint. Es wird mit vol bezeichnet. (Beachte, daß der Träger dieses Maßes der ganze Raum ist und jede beschränkte Teilmenge endliches Maß hat ([BGP92]).

Bemerkung 2.7. Es gibt genau zwei nulldimensionale Räume, nämlich S^0 und $\{\mathrm{pt}\}$.

Der Raum $M(n, k)$ der Isometrieklassen von punktierten Alexandrov-Räumen mit Krümmung $\geq k$ und Dimension $\leq n$ ist in der G.-H.-Topologie kompakt. Liegt X in $M(n, k)$, so liegt der skalierte Raum rX in $M(n, \frac{k}{r^2})$.

Für jedes $x \in X$ ist der Raum der Richtungen $\Sigma_x X$ (oder einfach Σ_x) in x ein Raum mit Krümmung ≥ 1 und Dimension $n-1$. Für fast jede Richtung $v \in \Sigma_x$ existiert eine Kürzeste, die in diese Richtung läuft. Den Kegel $C(\Sigma_x)$ bezeichnen wir als T_x und nennen ihn den Tangentialraum von x in X.

Für jedes $x \in X$ und jede Nullfolge (r_j) konvergiert die Folge $(X_j, x_j) := (\frac{1}{r_j}X, x)$ im G.-H.-Sinn gegen den Tangentialraum $T_x = C(\Sigma_x)$. Die Identifikation des Limesraumes (für jeden Ultrafilter) mit T_x läßt sich kanonisch (!!) wie folgt beschreiben:

Läuft in Richtung $v \in \Sigma_x$ eine Kürzeste γ , so schickt man für jedes $t \in R^+$ die Folge $(\gamma(tr_j) \in X_j = \frac{1}{r_j}X)$ auf den Punkt $tv \in T_x$. Da die Menge solcher v dicht in Σ_x liegt, läßt sich die Abbildung eindeutig vervollständigen.

Sei nun A eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von X, $a \in A$. Mit $\Sigma_a A$ bezeichnen wir die Menge aller Richtungen aus $\Sigma_a X$, für die eine gegen a konvergente Folge (a_j) von Punkten aus $A \setminus \{a\}$ existiert, s.d. die Anfangsrichtungen von aa_j gegen v konvergieren. Mit $T_a A$ bezeichnen wir den Kegel über $\Sigma_a A$.

Fakt 2.5. *Sei $a \in A \subset X$ wie oben, ω ein Ultrafilter. Sei $A_\omega \subset T_a X$ der ω-Limes der Folge $(\frac{1}{r_j}A, a)$ für eine Nullfolge r_j. Dann stimmt der Kegel $R^+ \cdot A_\omega$ mit $T_a A$ überein.*

Perelmann zeigte ([Per94]):

Fakt 2.6. *Eine kleiner metrischer Ball um den Punkt $x \in X$ ist homöomorph zum Tangentialkegel $T_x X$.*

Definition 2.1. Sei X ein n-dimensionaler Alexandrov-Raum, $x \in X$. Man sagt, daß x im Rand ∂X von X liegt, wenn der $n-1$-dimensionale Raum $\Sigma_x X$ nichtleeren Rand hat. Dabei sagen wir, daß S^0 keinen Rand hat und $\{\mathrm{pt}\}$ ganz aus dem Rand besteht.

Bemerkung 2.8. Der Rand ist eine abgeschlossene Teilmenge, die rein topologisch definiert ist (vgl. Fakt 2.6 oder [BGP92]).

In Alexandrov-Räumen existiert nicht immer eine Paralleltranslation, dennoch können Richtungsräume in manchen Punkten verglichen werden. Zunächst eine Definition:

Definition 2.2. Sind X und Y metrische Räume, so schreiben wir $X \geq Y$, wenn eine (nicht unbedingt stetige) Abbildung $f : Y \to X$ existiert, die die Abstände nicht verkürzt.

Bemerkung 2.9. Falls für kompakte Räume X und Y gleichzeitig $X \geq Y$ und $Y \geq X$ gilt, so sind X und Y isometrisch ([Pet98],p.125).

Definition 2.3. Sei X_j eine Folge von punktierten metrischen Räumen aus $M(n,k)$. Wir sagen dann $\liminf(X_j) \geq Y$, wenn für jeden Ultrafilter ω: $\lim_\omega X_j \geq Y$ gilt.

In [BGP92] und [Pet98],p.132 findet man folgende Sätze.

Fakt 2.7. *Ist X ein Raum mit Krümmung ≥ 1, so gilt $X \leq \Sigma_x * S^0$ für jedes $x \in X$.*

Fakt 2.8. *Konvergieren in einem Alexandrov-Raum x_j gegen x, so gilt* $\liminf \Sigma_{x_j} \geq \Sigma_x$*; sogar mehr: falls die Punkte x_j aus der Richtung $v \in \Sigma_x$ konvergieren, so gilt* $\liminf \Sigma_{x_j} \geq S^0 * \Sigma_v(\Sigma_x X)$.

Das bedeutet, daß die Menge der Punkte mit in einem vernünftigen Sinn großen Link offen ist.

Fakt 2.9. *Ist $x \in X$, γ eine von x ausgehende Kürzeste in Richtung $v \in \Sigma_x$, so gilt für jeden inneren Punkt y von γ: $\Sigma_y \geq S^0 * \Sigma_v(\Sigma_x)$.*

Und als Folge:

Fakt 2.10. *Richtungsräume in zwei inneren Punkten einer Kürzesten sind isometrisch.*

Im letzten Fakt ist die Isometrie (Paralleltranslation) nicht kanonisch, aber fast, vgl. [Pet98].
Lang und Schröder haben in [LS97] für Alexandrov-Räume ein Theorem bewiesen, das den Vergleichssatz wesentlich verallgemeinert und ein klassisches Theorem von Kirszbraun erweitert.

PROPOSITION 2.11. *Ist X ein Alexandrov-Raum mit von unten durch k beschränkter Krümmung, $S \subset X$ beliebig, M_k^n die einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit der konstanten Krümmung k und Dimension n und $f : S \to M$ eine 1-Lipschitz-Abbildung, so läßt sich f zu einer 1-Lipschitz-Abbildung $\bar{f} : X \to M$ ausdehnen.*

Dieses Theorem erlaubt es häufig, mehrfache komplizierte Anwendung des Vergleichssatzes von Toponogov zu vermeiden.

Bemerkung 2.10. In Proposition 2.11 darf der Bildraum wesentlich allgemeiner sein, nämlich ein beliebiger $CAT(k)$-Raum.

2.6. Räume mit Krümmung ≥ 1. Wir befassen uns jetzt etwas ausführlicher mit Räumen der Krümmung ≥ 1. Solche Räume werden im folgenden häufig als Σ oder S bezeichnet.

Definition 2.4. Sei Σ ein Alexandrov-Raum mit Krümmung ≥ 1, A eine Teilmenge von Σ. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Pol}(A)$ die Menge aller $x \in \Sigma$ mit $d(x, A) \geq \frac{\pi}{2}$ und nennen sie die polare Menge von A. Ferner nennen wir zwei Punkte x und y in Σ Antipoden, wenn $d(x,y) = \pi$ gilt.

Bemerkung 2.11. Aus dem Vergleichsatz von Toponogov folgt, daß $\mathrm{Pol}(A)$ immer eine totalkonvexe Teilmenge von Σ ist.

Zunächst eine einfache Bemerkung (vgl. [BGP92],p.27):

Fakt 2.12. *Enthält ein Raum Σ mit Krümmung ≥ 1 eine isometrisch eingebettete S^0, (i.e. ein Antipodenpaar), so ist Σ isometrisch zu $\tilde{\Sigma} * S^0$, wobei $\tilde{\Sigma} = \mathrm{Pol}(S^0)$ die polare Menge von S^0 ist.*

Bemerkung 2.12. Dieser Fakt ist eine leichte Version des Spaltungssatzes von Toponogov ([BGP92],p.55), der nun folgt.

Fakt 2.13. *Ist X ein Raum mit nichtnegativer Krümmung und ist $\gamma : R \to X$ eine Gerade, so ist X isometrisch zu $X = R \times Y$ mit einem nichtnegativ gekrümmten Raum Y.*

Aus Fakt 2.12 ergibt sich unmittelbar:

Lemma 2.14. *Sei Σ ein Raum mit Krümmung ≥ 1. Dann ist die Menge A der Punkte aus Σ, die einen Antipoden besitzen totalkonvex, isometrisch zu einer euklidischen Sphäre S^k und Σ spaltet kanonisch in $S^k * \Sigma_0$, wobei $\Sigma_0 = \mathrm{Pol}(A)$ und $\mathrm{diam}(\Sigma_0) < \pi$ gilt.*

Nun zwei sehr wichtige Definitionen:

Definition 2.5. Wir nennen einen n-dimensionalen Alexandrov-Raum Σ mit Krümmung ≥ 1 Riemannsch, wenn $\Sigma = S^n$ gilt. Falls $\mathrm{vol}(\Sigma) > (1-\rho)\mathrm{vol}(S^n)$ für eine feste, sehr kleine positive Zahl $\rho = \rho(n)$ gilt, nennen wir Σ *sehr dick*. Existieren $n+2$ Punkte (x_i) in Σ , mit $d(x_i, x_j) > \frac{\pi}{2}$, so nennen wir Σ *dick*. Schließlich nennen wir den Raum Σ *rund*, wenn $\mathrm{rad}(\Sigma) > \frac{\pi}{2}$ gilt.

Jede der obengenannten Eigenschaften impliziert die nachfolgende ([BGP92] und [Per94]).

Bemerkung 2.13. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß jeder *rund*e Raum eine topologische Sphäre ist.

Definition 2.6. Sei nun X ein beliebiger Alexandrov-Raum. Wir nennen einen Punkt $x \in X$ Riemannsch, bzw. *sehr dick*, bzw. *dick*, bzw. *rund*, wenn der Richtungsraum Σ_x die entsprechende Eigenschaft hat.

Folgende Bemerkung folgt aus der Definition:

Fakt 2.15. *Seien Σ_1 und Σ_2 Räume derselben Dimension, mit $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$. Ist Σ_2 Riemannsch, bzw.* sehr dick, *bzw.* dick, *so hat auch Σ_1 die entsprechende Eigenschaft.*

Aus den Resultaten im letzten Abschnitt erhalten wir:

Fakt 2.16. *Die Menge der* dick*en und der* sehr dick*en Punkte ist in jedem Alexandrov-Raum totalkonvex und offen; topologisch ist die Menge dieser Punkte eine Mannigfaltigkeit (Fakt 2.6).*

Aus [BGP92],p.42 oder [OS94] erhält man:

Fakt 2.17. *In einem Alexandrov-Raum der Dimension n ist die Menge der Riemannschen Punkte totalkonvex und überall dicht. Das Komplement dieser Menge hat Hausdorffdimension $\leq n-1$ und, wenn X keinen Rand hat, sogar Hausdorffdimension $\leq n-2$.*

Die zwei folgenden Sätze findet man in [BGP92] und [Per94].

Fakt 2.18. *Ist x* sehr dick*er Punkt in einem n-dimensionalen Alexandrov Raum mit $\mathrm{vol}(\Sigma_x) > (1-\rho)\mathrm{vol}(S^{n-1})$ für ein $\rho < \rho(n)$, so gibt es Punkte $x_1, ..., x_n$ in der Nähe von x, s.d. die Abbildung $P = (d_{x_1}, ..., d_{x_n})$ eine invertierbare Fastisometrie einer kleinen Umgebung U von x auf eine offene Teilmenge im R^n. Geht ρ gegen 0, so sind diese Fastisometrien Bilipschitzabbildungen mit der Bilipschitzkonstanten $1+\epsilon$ und ϵ geht mit ρ gegen 0.*

Fakt 2.19. *Ist x ein* dick*er Punkt in einem n-dimensionalen Alexandrov-Raum, so gibt es Punkte $x_1, ..., x_n$ in der Nähe von x, s.d. die Abbildung $P = (d_{x_1}, ..., d_{x_n})$ einen Homöomorphismus einer Umgebung von x auf eine offene Teilmenge von R^n definiert.*

2.7. Runde Räume. Ein aus der Differentialgeometrie wohlbekanntes Ergebnis ([GP93]):

Fakt 2.20. *Sei Σ ein Raum mit Krümmung ≥ 1, $x \in \Sigma$ ein Punkt mit $\mathrm{rad}_x > \frac{\pi}{2}$. Dann nimmt d_x sein Maximum rad_x in einem einzigen Punkt y an.*

Wir bezeichnen diesen Punkt y als $A(x)$. Ist $O \subset \Sigma$ die Teilmenge der Punkte $x \in \Sigma$ mit $\mathrm{rad}_x > \frac{\pi}{2}$, so ist also die Abbildung $A : O \to O$ gegeben durch $d(A(x), x) = \mathrm{rad}_x$ wohldefiniert und stetig. Ist nun Σ ein *rund*er Raum, i.e. gilt $O = \Sigma$, so hat [GP93] gezeigt:

Fakt 2.21. *Jeder* rund*e Raum Σ ist homöomorph zur Sphäre. Die Abbildung $A : \Sigma \to \Sigma$ erzeugt einen Automorphismus von $H_n(\Sigma, Z_2) = Z_2$, insbesondere ist sie surjektiv.*

In [PP94b] wurde das folgende wichtige Resultat bewiesen:

Fakt 2.22. *Jeder Richtungsraum in einem* rund*en Raum ist wieder ein* rund*er Raum.*

Wir zeigen noch ein leichtes

Lemma 2.23. *Ist $H \subset \Sigma$ konvex,* rund *und abgeschlossen, so liegt H in Σ $\frac{\pi}{2}$-dicht. Gilt ferner für ein $x \in \Sigma$: $d(x, H) = \frac{\pi}{2}$, so hat x zu jedem Punkt $h \in H$ Abstand genau $\frac{\pi}{2}$.*

Beweis. Für $\dim(H) = 0$ folgt die Aussage aus Fakt 2.12. Nun gehen wir induktiv über die Dimension vor.

Sei $x \in \Sigma$ ein Punkt mit $d(x, H) \geq \frac{\pi}{2}$. Sei eine Kürzeste γ zwischen x und einem $h \in H$ gewählt, deren Länge $d(x, H)$ ist. Sei v die Anfangsrichtung von γ in h. Da γ minimal ist, muß $d(v, \Sigma_h H) \geq \frac{\pi}{2}$ gelten. Für jede Richtung $w \in \Sigma_h H$ muß nach Induktionsannahme $d(v, w) = \frac{\pi}{2}$ gelten. Jetzt folgt die Behauptung direkt aus dem Vergleichssatz von Toponogov. $\square$

Bemerkung 2.14. Wir werden in Proposition 11.3 sehen, daß, falls im letzten Lemma $d(x, H) = \frac{\pi}{2}$ gilt, jede Kürzeste xh eindeutig bestimmt und die Vereinigung der Kürzesten zwischen H und $\mathrm{Pol}(H)$ zu $H * \mathrm{Pol}(H)$ isometrisch ist.

3. Differenzierbarkeit

Seien in diesem Abschnitt X, Y immer endlichdimensionale Alexandrov-Räume, U offen in X, $x \in U$, $f : U \to Y$ eine Lipschitzabbildung.

In [BGP92],p.44 hat man eine Lipschitzabbildung $f : U \to R$ in x für differenzierbar erklärt, wenn f eingeschränkt auf jede von x ausgehende Kürzeste im gewöhnlichen Sinn von rechts differenzierbar ist. Wir definieren etwas allgemeiner Differenzierbarkeit für Lipschitzabbildungen zwischen Alexandrov-Räumen.

Sei zunächst ein nichtprinzipaler Ultrafilter ω auf der Menge der natürlichen Zahlen fest gewählt. Ist $f : U \to Y$ eine Lipschitzabbildung, so erhält man für jede Nullfolge (r_j) eine Limesabbildung $f_{(r_j)} = \lim_\omega(f_j) : T_x X \to T_{f(x)} Y$, wobei f_j die skalierte Abbildung $f : (\frac{1}{r_j} X, x) \to (\frac{1}{r_j} Y, f(x))$ ist. Wir sagen, daß f in x richtungsdifferenzierbar ist (oder einfach differenzierbar), wenn die Abbildung $f_{(r_j)}$ von der Folge (r_j) unabhängig ist. Diese eindeutig definierte Lipschitzabbildung $Df_x : T_x X \to T_{f(x)} Y$ nennen wir dann das Differential. Ist die Bedingung in jedem Punkt $x \in U$ erfüllt, so soll f differenzierbar heißen.

Die Komposition von zwei differenzierbaren Abbildungen ist wieder differenzierbar und das Differential der Komposition ist die Komposition der Differentiale.

Aus der Definition des Tangentialraumes folgen:

Lemma 3.1. *Ist f eine homogene Lipschitzabbildung zwischen nichtnegativ gekrümmten Kegeln, so ist f im Ursprung 0 differenzierbar und es gilt $Df_0 = f$.*

Lemma 3.2. *Ist f differenzierbar in x, so ist das Differential Df homogen, i.e. $Df(tv) = tDf(v)$ für jede nichtnegative Zahl t und jedes $v \in T_xX$.*

und:

Lemma 3.3. *Eine Lipschitzabbildung $f : U \to Y$ ist differenzierbar in x genau dann, wenn f eingeschränkt auf jede von x ausgehende Kürzeste γ in x differenzierbar ist.*

Das folgende Lemma ist sehr leicht und kann in jedem Buch über Nichtstandardanalysis (z.B. [HL85]) nachgeschlagen werden.

Lemma 3.4. *Eine Abbildung $f : R^+ \to R$ ist differenzierbar in 0 in unserem Sinn genau dann, wenn die Funktion von rechts differenzierbar im üblichen Sinn ist.*

Für Abbildungen in die reellen Zahlen stimmt also unser Begriff mit dem von [BGP92] überein. Dort wurde bewiesen (p.44):

Fakt 3.5. *Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines Alexandrov-Raumes X. Dann ist die Abstandsfunktion $f = d_A$ außerhalb von A differenzierbar. Das Differential im Punkt $x \in X \setminus A$ ist die folgende Abbildung $Df_x : T_x \to R$: $Df_x(v) = \min(-\langle v, h \rangle)$, wobei h die kompakte Menge A_x der Einheitsrichtungen durchläuft, in die eine Kürzeste von x nach A existiert. Insbesondere gilt $Df_x(v) = -|v|$ genau dann, wenn in Richtung v eine Kürzeste zwischen x und A läuft.*

Man beachte, daß die Abstandsfunktion d_x zu einem Punkt x auch in x mit Differential $D(v) = |v|$ differenzierbar ist. Für allgemeine abgeschlossene Teilmengen ist d_A in Punkten aus A in der Regel nicht differenzierbar, vgl. jedoch Proposition 5.1.

Es folgt, daß für jede in x differenzierbare Abbildung $f : U \to Y$ und jede kompakte Menge $A \subset Y$, die $f(x)$ nicht enthält, die Abbildung $d_A \circ f$ in x differenzierbar ist. Es gilt auch die Umkehrung:

Lemma 3.6. *$f : U \to Y$ ist in x differenzierbar, genau dann, wenn für jedes $y \neq f(x)$ die Komposition $d_y \circ f$ in x differenzierbar ist.*

Beweis. Da die Funktionen d_x Richtungen aus $T_{f(x)}$ trennen, folgt die Behauptung direkt aus der Definition. □

Bemerkung 3.1. Es reicht sogar nur eine in U überall dichte Folge von Punkten (x_n) zu durchlaufen und die Differenzierbarkeit von $d_{x_n} \circ f$ zu überprüfen.

Insgesamt haben wir bewiesen:

PROPOSITION 3.7. *Seien X, Y Alexandrov-Räume, U offen in X, $f : U \to Y$ eine Lipschitzabbildung. Dann sind äquivalent:*

(1) *f ist differenzierbar;*
(2) *Für jede differenzierbare Funktion $p : Y \to R$ ist $p \circ f$ differenzierbar*
(3) *Für jedes $x \in U$ und $y \neq f(x)$ ist die Komposition $d_y \circ f$ differenzierbar.*

Damit ist die Differenzierbarkeit unabhängig von der Wahl von ω und besagt, daß die skalierten Funktionen $f_{\frac{1}{r}}$ nur einen Grenzwert für $r \to 0$ besitzen.

Weitere Resultate werden im Text nicht verwendet. Wir sagen noch kurz, was alles möglich ist.

Wir skizzieren die Verallgemeinerung des Satzes von Rademacher auf unsere Situation. Wir nennen eine homogene Abbildung zwischen nichtnegativ gekrümmten Kegeln CX und CY linear, wenn CX isometrisch zu R^n ist, CY einen linearen Faktor $CY = R^k \times CZ$ abspaltet, das Bild von f in $R^k \times \{0\}$ liegt und die Einschränkung $f : R^n \to R^k$ linear ist.

PROPOSITION 3.8. *Seien X und Y zwei Alexandrov-Räume, U eine offene Teilmenge von X, $f : U \to Y$ eine Lipschitzabbildung. Dann ist f in fast allen Punkten von U differenzierbar mit linearem Differential.*

Bemerkung 3.2. Für den Fall, daß U ein Intervall ist, erscheint die Behauptung in [PP94b],p.6.

Beweis. Jeder Riemannsche Punkt x in U (i.e. $T_xX = R^m$) hat kleine Umgebungen $\tilde{U}$, die immer bessere differenzierbare Fastisometrien i auf offene Mengen $\tilde{V}$ in R^n besitzen, s.d. das Differential in jedem Punkt eine Fastisometrie ist (vgl. Fakt 2.18). Daraus folgt leicht, daß man sich auf den Fall $X = R^m$ einschränken darf, falls man sich noch daran erinnert, daß die Menge der Riemannschen Punkte volles Maß hat.

Sei ferner (y_n) eine in Y überall dichte Folge. Für jedes y_n ist $f_n = d_{y_n} \circ f : U \to R$ eine Lipschitzabbildung und das klassische Theorem von Rademacher ergibt, daß für eine Menge N vom Maß 0 in U alle f_n in $U_0 = U \setminus N$ differenzierbar mit linearem Differential sind.

Daraus folgt wiederum, daß f in jedem Punkt von U_0 differenzierbar ist und man sieht leicht ein, daß Df in jedem Punkt aus U_0 linear ist. $\square$

Bemerkung 3.3. Der obige Beweis ergibt sogar etwas mehr, nämlich daß die Menge X der Punkte, in denen f kein lineares Differential besitzt, sogar von Hausdorffdimension $\leq n-1$ ist.

Der Standardbeweis ergibt für Lipschitzkurven:

Lemma 3.9. *Ist $\gamma : [0,a] \to X$ eine Lipschitzkurve so gilt für die Länge der Kurve: $L(\gamma) = \int_0^a |D\gamma_t| dt$.*

Der Mittelwertsatz lässt sich problemlos übertragen:

PROPOSITION 3.10. *Ist $f : X \to Y$ diffbar und ist das Differential in jedem Punkt S-Lipschitz, so ist auch f S-Lipschitz.*

Da Abstandsfunktionen differenzierbar sind, kann man wie üblich differenzierbare Zerlegungen der 1 konstruieren und es stellt sich die natürliche Frage, ob jede stetige Abbildung $f : M \to N$ durch differenzierbare Abbildungen approximiert werden kann. Leider können wir diese Frage nicht beantworten. Schließlich kann man in Analogie zu [Fed] eine Co-area Formel für Lipschitzabbildungen beweisen.

Wir werden in einer anderen Arbeit auf Differenzierbarkeit von Abbildungen näher eingehen.

4. Submetrien

Definition 4.1. Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Submetrie, wenn $f(B_r(x)) = B_r(f(x))$ für jedes $x \in X$ und jedes $r \geq 0$ gilt.

Eine Submetrie ist automatisch 1-Lipschitz, offen und surjektiv. Die Komposition zweier Submetrien ist wieder eine Submetrie, s.d. die Submetrien eine Kategorie definieren. Ist $f : X \to Y$ eine Submetrie, $U \subset Y$ beliebig, so ist $f : f^{-1}(U) \to U$ auch eine Submetrie, wenn man Teilmengen von X und Y, wie immer, mit der induzierten Metrik versieht. Ist andererseits $f : U \to V$ eine Submetrie, so läßt sich f auf die Vervollständigung U_{comp} von U ausdehnen und diese Ausdehnung $f_{comp} : U_{comp} \to V_{comp}$ ist ebenfalls eine Submetrie. Außerdem haben Submetrien folgende angenehme Eigenschaft:

Lemma 4.1. *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Sind f und $g \circ f$ Submetrien, so ist auch g eine Submetrie.*

Submetrien sind Verallgemeinerungen von Projektionen zwischen euklidischen Räumen und Submersionen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Andererseits gilt ([Ber87] und [BG00]):

Fakt 4.2. *Ist $f : V \to W$ eine Submetrie zwischen euklidischen Räumen, so ist f eine lineare Projektion. Ist $f : M \to N$ eine Submetrie zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, so ist f eine $C^{1,1}$-Riemannsche Submersion.*

Submetrien können mit Hilfe von Abstandsfunktionen beschrieben werden, wie direkt aus der Definition folgt :

Lemma 4.3. *Für eine Abbildung $f : X \to Y$ sind äquivalent:*
(1) *f ist eine Submetrie;*
(2) *Für jede Teilmenge $B \subset Y$ gilt: $d_{f^{-1}(B)} = d_B \circ f$;*
(3) *Für jeden Punkt $y \in Y$ gilt: $d_{f^{-1}(y)} = d_y \circ f$.*

Viele Eigenschaften bleiben unter Submetrien erhalten (leichten Beweis findet man in [Ber87], von der letzten Behauptung in [BGP92],p.16):

PROPOSITION 4.4. *Ist $f : X \to Y$ eine Submetrie, so ist Y separabel, (lokal)kompakt, bzw. eigentlich, bzw. (lokal)vollständig, bzw. (lokal)zusammenhängend, bzw. geodätisch, bzw. von Hausdorffdimension $\leq n$, bzw. hat von unten durch K beschränkte Krümmung im Sinne von Alexandrov, wenn X die entsprechende Eigenschaft hat.*

Jeder Raum X läßt die triviale Submetrie $f : X \to \{\text{pt}\}$ auf einen einpunktigen Raum zu. Submetrien sind verträglich mit den wichtigsten Operationen mit metrischen Räumen:

1) Ist $f : X \to Y$ eine Submetrie, so ist $Cf : CX \to CY$ auch eine Submetrie, insbesondere gibt es für jeden Kegel CX eine natürliche homogene Submetrie $f : CX \to C\{\text{pt}\} = R^+$, gegeben durch $f(v) = |v|$.

2) Sind $f_i : X_i \to Y_i$ für $i = 1, 2$ Submetrien, so sind auch $f_1 \times f_2$ und $f_1 * f_2$ Submetrien. Insbesondere sind Projektionen $p : X \times Y \to X$ Submetrien.

Wie bei einer Riemannschen Submersion werden wir im folgenden X den Totalraum, Y die Basis der Submetrie und das Urbild eines Punktes $y \in Y$ die Faser nennen und letztere als F_y bezeichnen.

Im Raum der 1-Lipschitz-Abbildungen $L(X, Y)$ ist die Menge der Submetrien $\text{Sub}(X, Y)$ abgeschlossen. Allgemeiner folgert man direkt aus der Definition von Ultralimites :

Lemma 4.5. *Seien $(X_j, x_j), (Y_j, y_j)$ metrische Räume, $f_j : X_j \to Y_j$ Submetrien, die die Grundpunkte respektieren, ω ein Ultrafilter.*
$f = \lim_\omega f_j : (X, x) = \lim_\omega (X_j, x_j) \to (Y, y) = \lim_\omega (Y_j, y_j)$
ist dann auch eine Submetrie.

Bei einer Konvergenz von Submetrien konvergieren Fasern gegen Fasern:

Lemma 4.6. *Seien* $f_j : (X_j, x_j) \to (Y_j, y_j)$ *Submetrien,* $f = \lim_\omega f_j$ *. Sei* $A_j = f_j^{-1}(y_j), A = f^{-1}(y)$*. Dann gilt :* $\lim_\omega(A_j, x_j) = (A, x)$*.*

Beweis. Natürlich ist $\lim_\omega(A_j, x_j)$ in (A, x) enthalten. Sei nun $a = (\bar{z}_j) \in A$ gegeben. Für $\bar{y}_j = f_j(\bar{z}_j)$ muß dann $(\bar{y}_j) = y = (y_j)$ gelten, i.e. $\lim_\omega d(\bar{y}_j, y_j) = 0$.

Da f_j eine Submetrie ist, finden wir einen Punkt $z_j \in f^{-1}(y_j)$, für den $d(z_j, \bar{z}_j) = d(\bar{y}_j, y_j)$ gilt. Es folgt $(z_j) = (\bar{z}_j)$ und da z_j nach unserer Wahl in A_j liegt, ist alles bewiesen. □

Es ist möglich, Submetrien auch von einem anderen Standpunkt aus zu betrachten und zwar als spezielle Zerlegungen des Totalraumes:

Definition 4.2. Sei X ein metrischer Raum. Teilmengen A und B von X heißen fast äquidistant, wenn für jedes $a \in A$ und $b \in B$ gilt: $d(a, B) = d(b, A) = d(A, B)$. A und B heißen äquidistant, wenn außerdem der Abstand von a zu B und von b zu A realisiert wird.

Eine Zerlegung $X = \cup_{j \in Y} X_j$ heißt (fast) äquidistant, wenn je zwei Teilräume X_j und X_i (fast) äquidistant sind.

Bemerkung 4.1. In einem eigentlichen Raum ist eine fast äquidistante Zerlegung genau dann äquidistant, wenn alle Räume X_j abgeschlossen sind.

Ist $f : X \to Y$ eine Submetrie, so ist die durch die Fasern gegebene Zerlegung von X äquidistant. Ist andererseits eine äquidistante Zerlegung $X = \cup_{j \in Y} X_j$ gegeben, so ist die Menge der Orbiten Y ein metrischer Raum mit $d(i, j) = d(X_i, X_j)$ und die natürliche Projektion $f : X \to Y$ eine Submetrie.

In dieser Sprache kann man Faktorisierungen einer Submetrie leicht beschreiben. Wir nennen eine Zerlegung $X = \cup_{i \in Z} F_i$ gröber als die Zerlegung $X = \cup_{j \in Y} X_j$, wenn jede Menge X_j in einer der Mengen F_i enthalten ist. Sind beide Zerlegungen äquidistant, so sehen wir, daß die Submetrie $f : X \to Z$ über die Submetrie $g : X \to Y$ faktorisiert, d.h. es gibt eine Abbildung $h : Y \to Z$ mit $f = h \circ g$. Da f und g Submetrien sind, ist wegen Lemma 4.1 die Abbildung h auch eine Submetrie.

Definiert man für einen eigentlichen Raum X den Raum $\mathrm{Sub}(X)$ nicht als $\mathrm{Sub}(X, X)$, wie man naiv denken könnte (denn letzteres ist in den vernünftigen Fällen einfach die Isometrigruppe von X), sondern als die Menge der Isometrieklassen aller möglichen Submetrien $f : X \to Y$, so ist also $\mathrm{Sub}(X)$ der Raum der unterschiedlichen äquidistanten Zerlegungen von X und beschreibt in gewissem Sinne die Menge der Symmetrien des Raumes. Nach unserer Definition sind zwei Submetrien $f_1 : X \to Y_1$ und $f_2 : X \to Y_2$ gleich, wenn Isometrien $I_1 : X \to X$

und $I_2 : Y \to Y$ mit $f_1 = I_2 \circ f_2 \circ I_1$ existieren, i.e. in $\mathrm{Sub}(X)$ sind zwei äquidistante Zerlegungen gleich, wenn sie durch eine Isometrie ineinander überführt werden können.

Man kann auch einen Raum $\widetilde{\mathrm{Sub}(X)}$ einfach als den Raum der äquidistanten Zerlegungen definieren. Die Isometriegruppe $\mathrm{Iso}(X)$ operiert auf $\widetilde{\mathrm{Sub}(X)}$ und natürlich gilt $\widetilde{\mathrm{Sub}(X)}/\mathrm{Iso}(X) = \mathrm{Sub}(X)$.

Das Pendant, der Raum $\mathrm{Rg}(Y)$ aller Submetrien $f : X \to Y$ für die X in einer vorgegebenen Klasse lebt, ist viel diffiziler und kann in gewissem Sinne als die Menge der Regularisierungen von Y betrachtet werden. Vielleicht wird die Bezeichnung in Abschnitt 9 klarer werden, jetzt kann man sich damit zufrieden geben, daß eine Mannigfaltigkeit viel regulärer als ein Quotient M/G ist.

Definition 4.3. Eine Submetrie soll diskret, bzw. zusammenhängend, bzw. kompakt heißen, wenn jede Faser diskret, bzw. zusammenhängend, bzw. kompakt ist.

Die Kompaktheit einer Submetrie kann sehr leicht charakterisiert werden. Aus der Definition von Submetrien folgt nämlich direkt:

Lemma 4.7. *Für eine Submetrie $f : X \to Y$ zwischen eigentlichen Räumen sind äquivalent:*

(1) *Die Submetrie f ist kompakt;*
(2) *Die Abbildung f ist eigentlich;*
(3) *Es gibt eine kompakte Faser.*

Diskrete Submetrien sind einfach, dennoch sehr interessant. Ein wichtiges Beispiel bilden Quotientenabbildungen bezüglich der Operation einer diskreten Gruppe von Isometrien. Ein anderes Beispiel sind Überlagerungsabbildungen:

Beispiel 4.2. Sei Y ein eigentlicher, geodätischer, lokal einfach zusammenhängender Raum. Sei $p : X \to Y$ eine zusammenhängende Überlagerung. Dann wird X, wenn man Längen von Kurven durch $L(\eta) = L(p(\eta))$ definiert, auch ein eigentlicher geodätischer Raum, und wir sehen, daß p bezüglich dieser Metrik eine Submetrie ist.

Dieses Beispiel läßt sich wie folgt sehr stark verallgemeinern:

Beispiel 4.3. Sei Y wieder ein geodätischer, lokal einfach zusammenhängender, eigentlicher Raum. Sei S eine abgeschlossene, nirgends dichte Teilmenge von Y, deren Komplement U die Eigenschaft hat, daß die innere Metrik auf U gleich der induzierten Metrik ist. Sei V eine zusammenhängende Überlagerung von U. Wie oben besitzt V eine eindeutig bestimmte Metrik, für die die Projektion $p : V \to U$ eine diskrete Submetrie ist. Falls die Vervollständigung X von V ein eigentlicher Raum ist (was nicht immer erfüllt sein muß), so ist X geodätisch und die Vervollständigung $p_{comp} : X \to Y$ von p ist eine diskrete Submetrie.

Eine natürliche Frage ist, ob man jede Submetrie als Komposition einer zusammenhängenden und einer diskreten Submetrie darstellen kann. Das ist selbst für sehr vernünftige Submetrien nicht der Fall, wie das folgende Beispiel belegt:

Beispiel 4.4. Sei X die Teilmenge der Punkte (x, y) aus R^2 mit $xy \geq 0$. Die Abbildung $f(x, y) = |x|$ von X auf R^+ ist eine Submetrie mit Fasern $F_r = \{(x, y) : |x| = r, xy \geq 0\}$. Die Abbildung $\bar{f} : X \to R$, gegeben durch $\bar{f}(x, y) = x$, die als einzige als zusammenhängender Faktor von f in Frage käme, ist jedoch keine Submetrie.

Um so angenehmer ist es uns, in Abschnitt 10 zeigen zu können, daß Submetrien zwischen Alexandrov-Räumen immer wie oben gefordert faktorisieren.

Definition 4.4. Sei $f : X \to Y$ eine Submetrie. Zwei Punkte x_1, x_2 von X heißen *nah* (bezüglich f), falls $d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$ gilt. Als N_x bezeichnen wir die Menge der zu x *nah*en Punkte.

Zwei Punkte sind *nah* genau dann, wenn sie den Abstand zwischen den Fasern realisieren. Nach Definition ist für jedes x die Einschränkung $f : N_x \to Y$ surjektiv (aber in der Regel natürlich keine Submetrie mehr).

In Anlehnung an isometrische Gruppenoperationen nennen wir einen Punkt $x \in X$ Fixpunkt der Submetrie f, wenn $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$ gilt. In diesem Fall sagen wir, daß auch $y = f(x)$ ein Fixpunkt von f ist. Die Menge aller Fixpunkte in X bzw. in Y bezeichnen wir als $\overline{Fix(f)}$ bzw. $\underline{Fix(f)}$. Aus Lemma 4.3 folgt:

Korollar 4.8. *Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann ein Fixpunkt der Submetrie f, wenn x* nah *zu jedem anderen Punkt $\bar{x} \in X$ ist. Folglich ist $f : \overline{Fix(f)} \to \underline{Fix(f)}$ eine Isometrie. Insbesondere ist eine Submetrie genau dann injektiv, wenn sie eine Isometrie ist.*

Sei X ein eigentlicher oder ein geodätischer Raum, $f : X \to Y$ eine Submetrie und sei γ eine Kürzeste durch $y = f(x)$. Dann lässt sich γ zu einer Kürzesten $\tilde{\gamma}$ durch x hochheben, s.d. $\tilde{\gamma}$ isometrisch auf γ abgebildet wird (leichter Beweis ist in [BG00] ausgeführt). Kürzeste in X, die isometrisch auf Kürzeste in Y abgebildet werden, nennen wir im weiteren *horizontal.* Eine Kürzeste zwischen zwei Punkten ist *horizontal* genau dann, wenn die Punkte *nah* sind.

Bemerkung 4.5. Man beachte, daß für Submetrien zwischen eigentlichen Räumen *horizontale* Hochhebungen von Kürzesten immer existieren, auch dann, wenn der Totalraum kein geodätischer Raum ist.

Falls im Totalraum X Kürzeste nicht verzweigen, (z.B. wenn X von unten beschränkte Krümmung hat), existieren auch in Y keine Verzweigungen, und für jede Kürzeste $\gamma : [0, b] \to Y$, jeden inneren Punkt y von γ und jedes Urbild $x \in f^{-1}(y)$ ist die *horizontale* Hochhebung $\tilde{\gamma}$ von γ durch x eindeutig bestimmt.

Definition 4.5. Ist $f : X \to Y$ eine Submetrie, so bezeichnen wir als $\operatorname{diam}(f)$ das Supremum der Durchmesser der Fasern von f und nennen diese Zahl den Durchmesser der Submetrie.

Wegen Korollar 4.8 gilt $\operatorname{diam}(f) = 0$ genau dann, wenn f eine Isometrie ist. Da Fasern bei einer Konvergenz von Submetrien gegen Fasern konvergieren, gilt $\operatorname{diam}(\lim_\omega(f_j)) \leq \lim_\omega(\operatorname{diam}(f_j))$. Ist ferner der Totalraum X der Limes-Submetrie $f = \lim_\omega(f_j)$ kompakt, so gilt $\operatorname{diam}(\lim_\omega(f_j)) = \lim_\omega(\operatorname{diam}(f_j))$.

Bemerkung 4.6. Natürlich kann $\operatorname{diam}(f) < \infty$ nur für kompakte Submetrien gelten.

5. Submetrien und Alexandrov

Wir nehmen ab jetzt immer an, daß der Totalraum X von unten beschränkte Krümmung und endliche Hausdorffdimension hat. Diese Eigenschaft überträgt sich dann nach Proposition 4.4 auf den Basisraum Y.

Aus Lemma 4.3, Proposition 3.7 und Lemma 4.5 ergibt sich:

PROPOSITION 5.1. *Sei $f : X \to Y$ eine Submetrie. Dann ist f in jedem Punkt differenzierbar und jedes Differential $Df_x : T_xX \to T_{f(x)}Y$ ist eine homogene Submetrie. Außerdem ist die Abstandsfunktion d_F zu jeder Faser $F \subset X$ in ganz X differenzierbar.*

Wir nennen einen Vektor $v \in T_xX$ vertikal bzw. *horizontal*, falls $Df(v) = 0$ bzw. falls $|Df(v)| = |v|$ gilt. Aus der Homogenität der Ableitung ersieht man, daß die Menge der vertikalen und der *horizontalen* Vektoren Teilkegel CV_x bzw. CH_x von T_xX sind, wobei V_x und H_x in $\Sigma_xX \subset T_xX$ liegen.

Da für jede Nullfolge (r_j), $Df_x = \lim_\omega(f_j = f) : (\frac{1}{r_j}X, x) \to (\frac{1}{r_j}Y, y)$ gilt, folgt aus Lemma 4.6, daß für jede solche Folge die Fasern $(\frac{1}{r_j}F_y, x) \subset (\frac{1}{r_j}X, x)$ gegen den vertikalen Teilraum $CV_x = Df_x^{-1}(0) \subset T_xX$ konvergieren. Beachtet man noch, daß das für jedes ω gilt und wiederholt

Konvergenzbegriffe und Tangentialräume, so erhält man den folgenden Satz:

PROPOSITION 5.2. *Der Tangentialraum an die Faser stimmt in jedem Punkt mit dem vertikalen Teilraum überein, sogar mehr: für jede Folge $r_j \to 0$ konvergiert die Folge $(\frac{1}{r_j}F_y, x)$ in der Gromov-Hausdorff-Topologie gegen CV_x.*

Andererseits ist der *horizontal*e Teilraum $CH_x \subset T_xX$ der Tangentialraum an die Menge der zu x *nah*en Punkte N_x, wie man mit dem folgenden Lemma schließt.

Lemma 5.3. *Ein Vektor $h \in \Sigma_x$ ist* horizontal *genau dann, wenn in X eine Folge von* horizontal*en Kürzesten existiert, die alle von x ausgehen und deren Anfangsrichtungen gegen h konvergieren.*

Beweis. Eine Implikation ist trivial, da die Anfangsrichtung einer *horizontal*en Kürzesten natürlich *horizontal* ist. Sei nun $h \in \Sigma_x$ eine *horizontal*e Richtung mit $Df(h) = \bar{h} \in \Sigma_y$. Es gibt eine Folge $y_j \in Y$, s.d. die Anfangsrichtungen der Kürzesten yy_j gegen $\bar{h}$ konvergieren, i.e. $D(d_{y_j})(\bar{h}) \to -1$ gilt (vgl. Fakt 3.5). Für die Fasern F_{y_j} gilt dann:

$$D(d_{F_{y_j}})(h) = D(d_{y_j} \circ f)(h) = D(d_{y_j}) \circ Df(h) = D(d_{y_j})(\bar{h}) \to -1.$$

Wir erhalten also eine Folge γ_j von Kürzesten zwischen x und F_{y_j}, die dann per definitionem *horizontal* sind, deren Anfangsrichtungen gegen h konvergieren (Fakt 3.5). Das ergibt die Behauptung. □

Dieselbe Argumentation ergibt folgendes

Lemma 5.4. *Sei $f : X \to Y$ eine Submetrie, $x \in X$, $y = f(x)$, $w \in \Sigma_y Y$. Ist γ eine Kürzeste in Richtung w, so existiert für jede* horizontal*e Hochhebung $h \in H_x X$ von w eine eindeutige* horizontal*e Hochhebung von γ in Richtung h.*

Für kompakte Alexandrov-Räume sind nicht-injektive Submetrien von Isometrien weit entfernt:

PROPOSITION 5.5. *Es gibt eine positive Zahl $\rho(d, n, K, v)$, s.d. für einen Alexandrovraum X der Dimension n mit Krümmung $\geq K$, Durchmesser $\leq d$ und Volumen $\geq v$ und jede nicht-injektive Submetrie* $\operatorname{diam}(f) \geq \rho$ *gilt.*

Beweis. Sonst gibt es eine Folge $f_j : X_j \to Y_j$ von nicht-injektiven Submetrien, s.d. die Räume X_j die obigen Eigenschaften haben und f_j gegen eine Isometrie $f : X \to Y$ konvergieren. Da wegen der Volumenschranke X Dimension n hat, muß auch Y Dimension n haben.

Deswegen muß für große n die Dimension von Y_j auch n sein. Für solche j ist dann die Submetrie f_j diskret (Proposition 9.1) und wegen Lemma 9.4 gilt $\mathrm{vol}(Y_j) \leq \frac{1}{2}\mathrm{vol}(X_j)$. Es folgt $\mathrm{vol}(X) \geq 2\mathrm{vol}(Y)$ ([BGP92],p.42) und damit ein Widerspruch. □

Bemerkung 5.1. Aus der Proposition 5.5 ergibt sich, daß für einen kompakten Alexandrov-Raum X die Identität ein isolierter Punkt in $\mathrm{Sub}(X)$ ist. Man sieht genauso, daß dasselbe für jeden Alexandrov-Raum mit endlichem Volumen gilt. Wahrscheinlich ist diese Aussage für jeden Alexandrov-Raum wahr.

5.1. Märchen. Wir nehmen in diesem Abschnitt an , daß der Leser mit der Arbeit [Per94] vertraut ist. Dieser weise Leser weiß dann auch, was zulässige und reguläre Funktionen (im Sinne jener Arbeit) auf einem Alexandrov-Raum sind.

Aus Lemma 4.3 folgt, daß die Komposition einer zulässigen Abbildung $p : Y \to R^n$ mit einer Submetrie f eine zulässige Abbildung ist; $p \circ f$ ist regulär, wenn p regulär ist.

Ist nun $y \in Y$ ein *dick*er Punkt (i.e. ein Punkt dessen Link $n + 1 = \dim(Y) + 1$ Richtungen besitzt, die alle Winkel $> \frac{\pi}{2}$ einschließen), so ist für eine Folge von Punkten $y_1, y_2, ..., y_n$ die Abbildung $P = (d_{y_1}, d_{y_2}, ..., d_{y_n}) : Y \to R^n$ in der Nähe von y ein regulärer Homöomorphismus (vgl. auch Fakt 2.19).

Dann ist auch $P \circ f$ eine in der Nähe von F_y reguläre Abbildung von X nach R^n und der Hauptsatz der Arbeit [Per94] besagt jetzt:

PROPOSITION 5.6. *Sei $D \subset Y$ die Menge der* dick*en Punkte. Jede Faser über einem* dick*en Punkt hat topologische Dimension* $\dim(X) - \dim(Y)$*, besitzt eine natürliche Stratifizierung in topologische Mannigfaltigkeiten und ist eine Cantor-Mannigfaltigkeit.*

Für jedes $x \in f^{-1}(D)$ existiert eine Umgebung U von x, s.d. die Einschränkung von f auf U eine topologische Submersion ist. Ist ferner die Submetrie kompakt, so ist f über D ein Faserbündel.

6. Differentiale

In diesem Abschnitt untersuchen wir genauer homogene Submetrien zwischen nichtnegativ gekrümmten Kegeln, d.h. Differentiale beliebiger Submetrien. Wir beschreiben diese mit Hilfe von Submetrien zwischen Räumen kleinerer Dimension und ermöglichen so einen induktiven Zugang zu Submetrien.

Ein paar Beispiele, die zeigen, daß solche Submetrien, entgegen allen Erwartungen, kompliziert sein können.

Beispiel 6.1. Sehr anständige Beispiele sind Projektionen $C\Sigma \times CS \to CS$ und Kegel über Submetrien $f : \Sigma \to S$ zwischen Räumen mit Krümmung ≥ 1.

Dieser Abschnitt befaßt sich im wesentlichen mit der Frage, wie viel anders homogene Submetrien aussehen können. So zeigen wir in Abschnitt 6.3, daß eine sehr große Klasse von homogenen Submetrien (nämlich die später definierten fastspaltenden Submetrien), sich auf natürliche Weise als Komposition von drei Submetrien aus Beispiel 6.1 darstellen läßt.

Beispiel 6.2. Sei $CV \subset R^n = C(S^{n-1})$ ein konvexer, nicht volldimensionaler Teilkegel. Dann ist die Submetrie $d_{CV} : R^n \to R^+$ homogen.

Beispiel 6.3. Sei l ein Strahl auf der Geraden, die eine Halbebene $E \subset R^2$ begrenzt. Dann ist $d_l : E \to R^+$ eine homogene Submetrie.

Beispiel 6.4. Für $1 \leq k \leq 4$ sei S^n_k die n-dimensionale Sphäre der Krümmung k und bezeichne p den Südpol von S^n_k. Dann definiert die Abstandsfunktion zum Strahl $C\{p\}$ eine homogene Submetrie von $C(S^n_k)$ auf R^+.

6.1. Allgemeines. Folgende Proposition erscheint im glatten Fall in einer anderen mathematischen Sprache in [Kle80],p.579.

PROPOSITION 6.1. *Sei X ein Raum mit nichtnegativer Krümmung. Sei $f : X \to R^+$ eine Submetrie. Dann ist $F = f^{-1}(0)$ eine totalkonvexe Teilmenge und f gibt den Abstand zu F an, d.h. $f = d_F$.*

Beweis. Seien $x, y \in F$ beliebig, γ eine Kürzeste zwischen x und y, z ein innerer Punkt von γ. Sei $f(z) = r \neq 0$. Sei dann η der eindeutig bestimmte *horizontal*e Strahl mit $\eta(r) = z$. Da X nichtnegative Krümmung hat, sieht man aus dem Vergleich mit der euklidischen Ebene, daß $l = d(\eta(l), \eta(0)) = r + d(\eta(l), z) > \min(d(\eta(l), x), d(\eta(l), y))$ für grosse l gilt, im Widerspruch dazu, daß η *horizontal* ist und damit $d(\eta(l), F) = l$ sein muß.

Schließlich gibt jede Submetrie $f : Z \to R^+$ den Abstand zu $f^{-1}(0)$ an.

□

Man erhält daraus den folgenden Spaltungssatz, der eine einfache Version des Spaltungssatzes von Toponogov ist (vgl Fakt 2.13):

Korollar 6.2. *Sei X ein Raum nichtnegativer Krümmung, $f : X \to R$ eine Submetrie. Dann ist X isometrisch zu $Y \times R$ und f ist die Projektion auf den R-Faktor.*

Bemerkung 6.5. Ist X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so reicht es in Korollar 6.2, statt nichtnegativer Schnittkrümmung nur nichtnegative Ricci-Krümmung vorauszusetzen, wie in [BG00] gezeigt wurde.

Folgendes Korollar wird in Abschnitt 8 wesentlich verallgemeinert wieder auftauchen:

Korollar 6.3. *Seien Σ und S zwei Räume mit Krümmung ≥ 1. Sei $f : \Sigma \to S * S^0$ eine Submetrie. Dann spaltet Σ in $\Sigma = \tilde{\Sigma} * S^0$ und f ist die Suspension über einer Submetrie $g : \tilde{\Sigma} \to S$. Insbesondere ist eine Submetrie von einem Raum mit Krümmung ≥ 1 auf eine euklidische Sphäre S^k eine Isometrie.*

Beweis. Betrachte den Kegel über f und wende Korollar 6.2 an. □

Bemerkung 6.6. Man kann Proposition 6.1 unproblematisch zu einem viel interessanter klingenden Satz in Analogie zu [Wal94] verallgemeinern:

Ist $f : X \to Y$ eine Submetrie zwischen nichtnegativ gekrümmten Räumen und ist S eine Seele von Y ([Per91]), so ist $f^{-1}(S)$ im Raum X totalkonvex.

Bevor wir mit der Untersuchung homogener Submetrien beginnen, möchten wir noch eine lustige Quelle von diesen angeben.

Beispiel 6.7. Sei $f : X \to Y$ eine Submetrie zwischen nicht-kompakten nichtnegativ gekrümmten Räumen. Für jeden Grundpunkt $x \in X$ und $y = f(x)$, jede Nullfolge r_j konvergiert dann die Folge $(r_j X, x)$ bzw. $(r_j Y, y)$ in der G.H.-Topologie gegen den Kegel $C(\partial_\infty X)$ bzw. $C(\partial_\infty Y)$ über dem idealen Rand $\partial_\infty X$ von X bzw. $\partial_\infty Y$ von Y ([Shi94] oder [GK95]). Man kann leicht sehen, daß die Folge f_{r_j} der skalierten Submetrien gegen eine von der Folge unabhängige homogene Submetrie zwischen den asymtotischen Kegeln $C(\partial_\infty X)$ und $C(\partial_\infty Y)$ konvergiert.

6.2. Spezielles.

PROPOSITION 6.4. *Seien Σ und S zwei Alexandrov-Räume mit Krümmung ≥ 1, $f : C\Sigma \to CS$ eine homogene Submetrie zwischen den Kegeln. Dann gilt :*

1. *Das Urbild der* 0 *ist ein totalkonvexer Unterkegel CV von $C\Sigma$, der durch eine totalkonvexe Teilmenge $V \subset \Sigma$ bestimmt ist;*
2. *Der Kegel CH über der polaren Teilmenge $H \subset \Sigma$ von V (vgl. Definition 2.4) ist die Menge der* horizontal*en Vektoren, i.e. es besteht aus allen Elementen $h \in C\Sigma$ mit $|f(h)| = |h|$.*

Beweis. Wir betrachten die natürliche homogene Submetrie $p : CS \to R^+$ und die Komposition $g = p \circ f$. Da $|p(w)| = |w|$ für jedes $w \in CS$ gilt, reicht es die Behauptungen für homogene Submetrien $g : C\Sigma \to R^+$ zu zeigen. (1) folgt dabei direkt aus Proposition 6.1 und da für einen Punkt $h \in H$ der Abstand von th zu CV genau t ist, ergibt sich auch (2). □

Um dumme Ausnahmen zu vermeiden, nehmen wir ab jetzt an, daß S und V nicht verschwinden. In Σ gilt $d(V, H) = \frac{\pi}{2}$. Für jedes $x \in \Sigma \setminus (V \cup H)$ gibt es also höchstens eine Kürzeste der Länge $\frac{\pi}{2}$ zwischen H und V, die durch x läuft. Wir zeigen nun, daß diese Kürzeste tatsächlich immer existiert; insbesondere gilt deswegen $\mathrm{Pol}(H) = V$. Wenn man die Aussage auf den Kegel $C\Sigma$ überträgt so lautet sie (s. Abschnitt 2.3 oder [LS97]):

Lemma 6.5. *Sei $f : C\Sigma \to CS$ eine homogene Submetrie, $x \in C\Sigma \setminus (CV \cup CH)$ beliebig. Dann gibt es eindeutig bestimmte $h \in CH$, $v \in CV$ mit $x = h + v$ und $\langle h, v \rangle = 0$. Diese h und v sind eindeutige Projektionen von x auf CH bzw. CV und es gilt $f(x) = f(h)$.*

Beweis. Sei $f(x) = y$. Sei γ die *horizontal*e Hochhebung des Strahles in S durch 0 und y, die durch x läuft und sei $\tilde{\gamma}$ der zu γ parallele Strahl durch 0. Setze $v = \gamma(0)$, s.d. v automatisch in CV liegt. Nach Definition gilt $\gamma(t) = v + \widetilde{\gamma(t)}$. Für alle, also auch für sehr grosse t muß $f(\widetilde{\gamma(t)} + v) = f(\gamma(t)) = t \cdot f(\gamma(1))$ gelten, und wir sehen, daß mit γ auch $\tilde{\gamma}$ *horizontal* ist und $f(\gamma(t)) = f(\tilde{\gamma}(t))$ gilt. Da γ senkrecht auf dem Strahl (tv) steht, steht auch $\tilde{\gamma}$ senkrecht auf tv und wir erhalten $\langle h, v \rangle = 0$. Der Rest ist klar. □

Wenn wir die Zerlegung $x = h + v$ benutzen, so wird immer stillschweigend $\langle h, v \rangle = 0$ verstanden. Die Menge aller solchen $h \in CH$ ist für ein festes v ein Kegel CH^v, der nur von der Richtung $\frac{v}{|v|} = \bar{v}$ abhängt. H^v ist also die Teilmenge der Elemente aus H, die in Σ Abstand $\frac{\pi}{2}$ zu $\bar{v}$ haben.

Bemerkung 6.8. Wir erinnern, daß $h + v$ für $h \in CH^v$ nicht eindeutig bestimmt ist und zwar in eineindeutiger Weise von der Kürzesten hv abhängt.

Bevor wir mit der Analyse der Submetrien fortfahren, sagen wir zwei Worte über die Mengen H^v. Zunächst folgt aus der Krümmungsschranke direkt:

Lemma 6.6. (1) *Ist $v_1 v v_2$ eine Kürzeste in V, so gilt $H^v \subset H^{v_1} \cap H^{v_2}$.*

(2) *Ist $\gamma = h_1 h h_2$ eine Kürzeste in H und liegt h in H^v, so liegen auch h_1 und h_2 in H^v und für jede Kürzeste η zwischen v und h_1 schließen η und γ ein sphärisches Dreieck ein.*

Nun wählen wir das beste, d.h. das kleinste H^v. Sei nämlich V_0 eine abzählbare überall dichte Teilmenge von V. Wir wählen einen Punkt $v_0 \in V$, s.d. für jedes $v \in V_0$ die Kürzeste vv_0 (die in diesem Fall eindeutig bestimmt ist) über v_0 hinaus ausgedehnt werden kann. Die Menge solcher Punkte v_0 ist nicht leer und hat nach [OS94] volles Maß.

Für jedes $h \in H^{v_0}$ und jedes $v \in V_0$ gilt dann nach Lemma 6.6: $d(v,h) = \frac{\pi}{2}$ und, da V_0 überall dicht in V liegt, ist die Bedingung sogar für jedes $v \in V$ erfüllt. Falls wir nun $\tilde{H} = H^{v_0}$ setzen, erhalten wir folgendes

Lemma 6.7. *$\tilde{H} = \cap_{v\in V} H^v$, i.e. $\tilde{H}$ ist die Menge der Punkte $h \in H$, die Abstand $\frac{\pi}{2}$ zu jedem Punkt aus V haben. Insbesondere ist $\tilde{H}$ unabhängig von V_0 und v_0.*

Bemerkung 6.9. Im allgemeinen braucht $\tilde{H}$ nicht konvex zu sein, wie Beispiel 6.4 belegt, vgl. jedoch Lemma 12.1.

Nun kehren wir zu homogenen Submetrien zurück und beschreiben *nah*e Punkte. Eine kurze Rechnung bevor wir zu grösseren schreiten. Für $h_1, h_2 \in CH$ gilt:

$$\begin{aligned}
0 &\le d(h_1,h_2)^2 - d(f(h_1),f(h_2))^2 \\
&= |h_1|^2 + |h_2|^2 - 2\langle h_1,h_2\rangle - (|f(h_1)|^2 + |f(h_2)|^2 - 2\langle f(h_1), f(h_2)\rangle) \\
&= 2(\langle f(h_1), f(h_2)\rangle - \langle h_1,h_2\rangle).
\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist damit immer nichtnegativ, und verschwindet genau dann, wenn die *horizontal*en Vektoren h_1 und h_2 *nah* sind.

PROPOSITION 6.8. *Zwei Punkte $x_1 = h_1 + v_1$ und $x_2 = h_2 + v_2$ sind* nah *genau dann, wenn h_1 und h_2* nah *sind, $v_1 = v_2 =: v$ und $\langle v + h_1, v + h_2\rangle = \langle v, v\rangle + \langle h_1, h_2\rangle$ gilt.*

Beweis. Nach Voraussetzung muß gelten (beachte $\langle v_i, h_i\rangle = 0$):

$$
\begin{aligned}
0 &= d(x_1,x_2)^2 - d(f(x_1),f(x_2))^2\\
&= |x_1|^2 - 2\langle x_1,x_2\rangle + |x_2|^2 - d(f(h_1),f(h_2))^2\\
&= |h_1|^2 + |v_1|^2 - 2\langle x_1,x_2\rangle + |h_2|^2\\
&\quad + |v_2|^2 - (|h_1|^2 + |h_2|^2 - 2\langle f(h_1),f(h_2)\rangle)\\
&= |v_1|^2 + |v_2|^2 - 2\langle v_1+h_1, v_2+h_2\rangle + 2\langle f(h_1),f(h_2)\rangle\\
&\geq |v_1|^2 + |v_2|^2 - 2\langle v_1,v_2\rangle - 2(\langle v_1,h_2\rangle + \langle h_1,v_2\rangle)\\
&\quad - 2(\langle h_1,h_2\rangle - \langle f(h_1),f(h_2)\rangle)\\
&\geq d(v_1,v_2)^2 - 2(\langle h_1,h_2\rangle - \langle f(h_1),f(h_2)\rangle),
\end{aligned}
$$

da $\langle v_i, h_j\rangle \leq 0$ gilt. Damit dieser nichtnegative Ausdruck verschwindet, muß $v_1 = v_2$ gelten und h_1 und h_2 müssen *nah* sein.

Seien nun $x_1 = v + h_1$ und $x_2 = v + h_2$ mit *nah*en h_1 und h_2 gegeben, so sieht man aus der obigen Rechnung:

$$d(x_1,x_2)^2 - d(f(x_1),f(x_2))^2 = -\langle v+h_1, v+h_2\rangle + |v|^2 + \langle h_1,h_2\rangle.$$

Die Behauptung folgt unmittelbar. □

Bemerkung 6.10. Beachte, daß wegen Fakt 2.3 die letzte Bedingung dazu äquivalent ist, daß die Kürzesten vh_1 und vh_2 ein euklidisches Dreieck einschliessen.

Aus Proposition 6.8 folgt eine Reihe wichtiger Korollare:

Korollar 6.9. *Ist ein Punkt $x \in C\Sigma$* nah *zu einem* horizontal*en Punkt h, so ist x auch* horizontal.

Dies wiederum impliziert:

Korollar 6.10. *$f : CH \to CS$ ist eine Submetrie.*

Natürlich ist die Submetrie $f : CH \to CS$ der Kegel über einer Submetrie von H auf S, die wir auch mit f bezeichnen (es ist einfach die Einschränkung von f auf die Teilmenge H von CH).

Es gilt aber wesentlich mehr, nämlich:

Lemma 6.11. *Ist $f : C\Sigma \to CS$ wie oben, so ist für jedes $v \in V$ die Einschränkung $f : CH^v \to CS$ auch eine Submetrie.*

Beweis. Seien $h \in CH^v$, $y \in CS$ gegeben. Wähle in $C\Sigma$ ein $z = h + v$. Sei x eine zu z *nah*e Hochhebung von y. Dann gilt nach Proposition 6.8 $x = \bar{h} + v$ mit einem $\bar{h} \in CH^v$, das *nah* zu h ist und auf y abgebildet wird. Das ergibt die Behauptung. □

Da jedes $v \in V$ mindestens einen *nah*en Punkt $x \neq v$ besitzt (S ist nach Annahme nicht leer), ist H^v für jedes v nicht leer und wir erhalten:

Korollar 6.12. *H liegt $\frac{\pi}{2}$-dicht in Σ.*

Nun gehen wir daran, alles bewiesene zusammenzufassen.

Definition 6.1. Sei Σ ein Raum mit Krümmung ≥ 1. Wir nennen eine Teilmenge $H \subset \Sigma$ gut, wenn H totalkonvex und $\frac{\pi}{2}$-dicht in Σ liegt und für $V = \mathrm{Pol}(H)$ gilt: jedes $x \in \Sigma \setminus (H \cup V)$ liegt auf einer Kürzesten der Länge $\frac{\pi}{2}$ zwischen H und V.

Σ ist natürlich eine gute Teilmenge von sich selbst. Ist H eine gute Teilmenge von Σ, so kann man für jedes $v \in V$ wie oben die Menge $H^v \subset H$ definieren, und Lemma 6.6 sowie Lemma 6.7 gelten; $\tilde{H}$ wird ebenfalls wie oben definiert.

THEOREM 6.13. *Ist $f : C\Sigma \to CS$ eine homogene Submetrie, so ist die Menge H der* horizontal*en Vektoren eine gute Teilmenge von Σ und die induzierte Submetrie $\bar{f} : H \to S$ hat die Eigenschaft, daß für jedes $v \in V$ die Einschränkung $\bar{f} : H^v \to S$ wieder eine Submetrie ist.*

Andererseits bestimmt eine Submetrie $f : H \to S$ einer guten Teilmenge eines Raumes Σ, deren sämtliche Einschränkungen $f : H^v \to S$ Submetrien sind, eine eindeutige homogene Submetrie $\bar{f} : CX \to CS$.

Beweis. Wir müssen noch die zweite Hälfte zeigen. Sei also $f : H \to S$ wie oben gegeben. Ist $H = \Sigma$, so gibt es nichts zu zeigen. Sonst hat jedes $x \in CX$ eine eindeutige Zerlegung $x = t_1 h + t_2 v$ mit $t_1, t_2 \in R$, $v \in V$, $h \in H^v$. Wir setzen dann $\bar{f}(x) = t_1 \cdot f(h) \in CS$. Die Rechnung aus Proposition 6.8 zeigt, daß $\bar{f}$ 1-Lipschitz ist und um festzustellen, daß $\bar{f}$ eine Submetrie ist, muß man noch folgendes beweisen:

Für jede Kürzeste vh zwischen einem $v \in V$ und $h \in H^v$ und jedes $y \in S$ existiert ein $\bar{h} \in f^{-1}(y) \cap H^v$, das *nah* zu h liegt, und s.d. vh und $\bar{h}$ in $C\Sigma$ ein euklidisches Dreieck einschließen.

Nun ist aber die Einschränkung $f : H^v \to S$ eine Submetrie. Wir wählen eine Kürzeste zwischen $f(h)$ und y und heben sie zu einer *horizontal*en Kürzesten $h\bar{h}$ in H^v hoch. Aus Lemma 6.6 folgt jetzt, daß vh und $h\bar{h}$ in Σ ein sphärisches Dreieck einschließen. $\square$

In drei Fällen ist es besonders einfach, die Eigenschaften von f zu überprüfen.

(1) $H = \Sigma$. Dann besagt Theorem 6.13, daß eine Kegelabbildung $Cf : C\Sigma \to CS$ genau dann eine Submetrie ist, wenn $f : \Sigma \to S$ eine Submetrie ist.

(2) $S = \{\text{pt}\}$. In diesem Fall besagt Theorem 6.13, daß homogene Submetrien $f : C\Sigma \to R^+$ eineindeutig guten Teilmengen $H \subset \Sigma$ entsprechen.
(3) Für jedes v gilt $H^v = \tilde{H} = H$. Dann definiert jede Submetrie $f : H \to S$ eine eindeutige homogene Submetrie $\bar{f} : C\Sigma \to CS$. Dieser Fall wird im nächsten Abschnitt genauer behandelt.

6.3. Spezielle homogene Submetrien. Sei Σ ein Raum der Krümmung ≥ 1, H eine gute Teilmenge von Σ, $V = \mathrm{Pol}(H)$. Dann lassen sich die natürlichen Einbettungen von H und V nach $H * V$ auf eine eindeutige Weise zu einer 1-Lipschitzabbildung $P_H : \Sigma \to H * V$ erweitern, indem man Kürzeste zwischen H und V auf entsprechende Kürzeste abbildet. Der Beweis der Tatsache, daß P_H 1-Lipschitz ist, folgt aus dem Kirszbrauntheorem (Proposition 2.11) und ist in Proposition 11.1 ausgeführt. (Dort ist die Situation minimal anders, aber der Beweis bleibt identisch).

PROPOSITION 6.14. *Sei $P_H : \Sigma \to H * V$ wie oben. Dann sind äquivalent:*
(1) *P_H ist surjektiv;*
(2) *$H = \tilde{H}$;*
(3) *P_H ist eine Submetrie.*

Beweis. (1) und (2) sind äquivalent nach der Definition von P_H und natürlich folgt (1) aus (3). Die etwas kompliziertere Implikation von (2) nach (3) ist genau der Gegenstand von Proposition 11.1. □

Definition 6.2. Falls P_H den Bedingungen des letzten Satzes genügt, nennen wir die gute Teilmenge H fastspaltend. Ist P_H eine Isometrie (i.e. sind Kürzeste zwischen allen h und v eindeutig bestimmt), nennen wir H spaltend.

Definition 6.3. Wir nennen eine homogene Submetrie $f : C\Sigma \to CS$ spaltend, bzw. fastspaltend, wenn die *horizontal*e Menge $H \subset \Sigma$ spaltend, bzw. fastspaltend ist.

Bemerkung 6.11. Die homogene Submetrie aus Beispiel 6.4 gibt für $\Sigma = S^n_4$ das Beispiel einer fastspaltenden homogenen Submetrie $f : C\Sigma \to R^+$, die nicht spaltend ist.

Jede homogene Submetrie $f : C\Sigma \to CS$ läßt sich mit Hilfe der oben definierten 1-Lipschitz Abbildung $P = P_H : \Sigma \to H * V$ und der Projektion $pr : CH \times CV \to CH$ als folgende Komposition darstellen

$$C\Sigma \xrightarrow{CP} CH \times CV \xrightarrow{pr} CH \xrightarrow{f} CS.$$

Die beiden letzten Abbildungen sind Submetrien, und wir wissen aus Proposition 6.14, daß die 1-Lipschitz Abbildung CP genau dann eine Submetrie ist, wenn f eine fastspaltende Submetrie ist, i.e. wenn $H = \tilde{H}$ gilt. Wir sehen also, daß jede fastspaltende homogene Submetrie eine natürliche Faktorisierung in drei einfache Submetrien besitzt (vgl. Beispiel 6.1).

Bedauerlicherweise braucht eine Komposition von spaltenden homogenen Submetrien nicht fastspaltend zu sein, wie folgendes Beispiel belegt.

Beispiel 6.12. Betrachte den Kegel $Cf : R^3 \to CS = R^+ \times R^+$ über der Submetrie f aus Beispiel 1.3 und $g : CS \to R^+$ die Projektion auf den ersten Faktor. Die Komposition $g \circ Cf$ ist nicht fastspaltend.

Ein einfaches Kriterium für die Fastspaltung ergibt sich aus Lemma 6.11:

Lemma 6.15. *Ist die Einschränkung $f : H \to S$ eine Isometrie, so ist f fastspaltend.*

Definition 6.4. Wir nennen eine homogene Submetrie $f : C\Sigma \to CS$ regulär, falls $f : H \to S$ eine Isometrie ist.

Komposition von regulären homogenen Submetrien ist selbst regulär.

Bemerkung 6.13. Die Menge der homogenen (fast)spaltenden bzw. regulären Submetrien ist abgeschlossen, i.e. sind homogene Submetrien $f_j : C\Sigma_j \to CS_j$ (fast)spaltend bzw. regulär, so hat auch die Limes-Submetrie $f = \lim_\omega(f_j)$ die entsprechende Eigenschaft. Ferner ist ein Produkt $f \times g$ von regulären bzw. (fast)spaltenden Submetrien regulär bzw. (fast)spaltend.

Wir werden in Abschnitt 8 den Beweis der folgenden fundamentalen Proposition nachtragen:

PROPOSITION 6.16. *Sei $f : C\Sigma \to CS$ eine homogene Submetrie. Ist V oder H ein* rund*er Raum , so ist f spaltend, ist S ein* rund*er Raum, so ist f regulär und spaltend.*

Definition 6.5. Sei nun $f : X \to Y$ eine Submetrie zwischen beliebigen Alexandrov-Räumen. Wir sagen, daß f in einem Punkt x regulär, bzw. spaltend, bzw. fastspaltend ist, wenn die homogene Submetrie $Df_x : T_xX \to T_{f(x)}Y$ die entsprechende Eigenschaft hat. Ein Punkt $y \in Y$ heißt (fast)spaltend, bzw. regulär bezüglich f, wenn f in jedem $x \in F_y$ (fast)spaltend, bzw. regulär ist. Wir nennen die Submetrie f regulär, bzw. (fast)spaltend, wenn f in jedem Punkt regulär, bzw. (fast)spaltend ist.

Jede Riemannsche Submersion ist regulär. Jede diskrete Submetrie und jede Quotientenabbildung unter einer isometrischen Gruppenoperation ist spaltend. Letzteres folgt z.B. daraus, daß die Isometriegruppe eines Alexandrov-Raumes eine Liegruppe ist ([FY94]).

Bemerkung 6.14. Eine kleine Unstimmigkeit sei angemerkt, um Verwirrungen vorzubeugen. Ist $f : C\Sigma \to CS$ eine homogene reguläre, bzw. (fast)spaltende Submetrie (Definition 6.3, Definition 6.4), so braucht f nicht in jedem Punkt von $C\Sigma$ regulär, bzw. (fast)spaltend zu sein (Definition 6.5). So kann man leicht sehen, daß eine homogene reguläre Submetrie f genau dann in jedem Punkt $x \in C\Sigma$ regulär ist, wenn f eine Projektion ist.

Bemerkung 6.15. Wir haben die Vermutung, daß ein Grenzwert von in jedem Punkt spaltenden Submetrien in jedem Punkt spaltend ist. Daraus würde sich leicht ergeben, daß eine Komposition von in jedem Punkt spaltenden Submetrien selbst spaltend ist, im Gegensatz zu Beispiel 6.12

Aus Proposition 6.16 ergibt sich, daß für jede Submetrie $f : X \to Y$ jeder *rund*e Punkt $y \in Y$ regulär ist, insbesondere ist die Hausdorffdimension der Menge der nichtregulären Punkte $\leq \dim(Y) - 1$ und wenn Y keinen Rand hat, sogar $\leq \dim(Y) - 2$. Außerdem enthält die Menge der regulären Punkte eine überall dichte offene Teilmenge (die Teilmenge der *dick*en Punkte).

7. Fasern

In diesem Abschnitt sei $f : X \to Y$ eine feste Submetrie zwischen Alexandrov-Räumen der Dimension n bzw. m. Wir untersuchen die Struktur der Fasern $F_y = f^{-1}(y)$.

7.1. Neue Märchen.

Bemerkung 7.1. Diese Märchen werden weiter nicht benutzt.

Ist y ein *sehr dick*er Punkt, so kann man Punkte $y_1, ...y_n$ in der Nähe von y finden, so daß die Abbildung $P = (d_{y_1}, ..., d_{y_n})$ eine Fastisometrie einer kleinen Umgebung U von y auf eine offene Teilmenge von R^n ist. Die Komposition $(d_{F_{y_1}}, ..., d_{F_{y_n}}) = P \circ f : f^{-1}(U) \to R^n$ ist eine fast reguläre Abbildung, im Sinne von [BGP92],p.46, deren Fasern mit den Fasern von f übereinstimmen. Aus der Arbeit [BGP92],p.47, ergibt sich dann:

PROPOSITION 7.1. *Ist y ein* sehr dick*er Punkt, so haben Komponenten der Faser F_y gegenseitigen Abstand $> \epsilon$; auf jeder Komponente ist die innere Metrik zur induzierten Metrik lokal Lipschitz-äquivalent.*

7.2. Struktur der Fasern. Wir wollen zeigen, daß dieses Resultat für jede Faser einer Submetrie gilt.

THEOREM 7.2. *Die Komponenten jeder Faser F_y haben Abstand $\geq \epsilon(y)$ voneinander und auf jeder Komponente ist die innere Metrik zur induzierten Metrik lokal Lipschitz-äquivalent.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur in dem Fall der nichtnegativen Krümmung. Fleißiger Leser mag sich für die Krümmungsschranke -1 kleinere Änderungen überlegen.

Wähle ein kleines ϵ. Wähle ρ so klein, daß in eine ϵ-dichte Teilmenge von Richtungen aus Σ_y eine Kürzeste der Länge ρ läuft. Seien nun x_0, x_1 zwei beliebige Punkte aus F_y mit $s = d(x_0, x_1) << \rho$.

Sei m die Mitte einer Kürzesten x_0x_1 und p eine Projektion von m auf F_y, d.h. $d(m,p) = d(m, F_y)$. Sei $v \in H_p$ die Anfangsrichtung einer Kürzesten pm. Wähle eine Richtung $w \in H_p$ in die eine *horizontale* Kürzeste $p\bar{m}$ der Länge ρ läuft, mit $d(v,w) < \epsilon$. Wähle schließlich eine Kürzeste $m\bar{m}$.

Für $i = 0$ oder $i = 1$ gilt $\angle x_i m\bar{m} \leq \frac{\pi}{2}$. Setze für dieses i: $b = |x_i\bar{m}|$. Setze ferner $a = |mp|$ und $c = |m\bar{m}|$.

Zunächst gilt $b^2 \leq c^2 + (\frac{s}{2})^2$. Andererseits ist $p\bar{m}$ *horizontal*, d.h. wir haben $b \geq \rho$. Haben wir ϵ klein genug gewählt, so gilt $c^2 \leq \rho^2 + a^2 - (2-\epsilon)a\rho$, folglich $\rho^2 \geq c^2 - a^2 + (2-\epsilon)a\rho \geq c^2 + a\rho$ (beachte, daß $a < s << \rho$ nach Annahme gilt). Damit ist $(\frac{s}{2})^2 \geq a\rho$ erfüllt. Zusammengenommen erhalten wir $\frac{2a}{s} \leq \frac{s}{2\rho}$.

Nun sehen wir für $j = 0, 1$:

(*) $d(x_j, p) \leq d(x_j, m) + d(m,p) = \frac{s}{2} + a = \frac{s}{2}(1 + \frac{2a}{s}) \leq \frac{s}{2}(1 + \frac{s}{2\rho})$.

Wir bennenen den Punkt p in $x_{\frac{1}{2}}$ um und nennen es eine Fastmitte zwischen x_0 und x_1. Wir konstruieren jetzt genauso Fastmitten $x_{\frac{1}{4}}$ bzw. $x_{\frac{3}{4}}$ zwischen x_0 und $x_{\frac{1}{2}}$ bzw. zwischen $x_{\frac{1}{2}}$ und x_1. So fortfahrend bekommen für jede dyadische Zahl $t \in [0,1]$ einen Punkt $x_t \in F_y$. Wir zeigen nun, daß diese Abbildung auf der Menge der dyadischen Zahlen L-Lipschitz ist (für eine feste Zahl L) und sich damit zu einer L-Lipschitz Kurve zwischen x_0 und x_1 fortsetzen läßt.

Gilt $\frac{s}{\rho} < \epsilon$, so folgt aus (*) durch Induktion über k für jedes $n = 0, 1, ...2^k - 1$:

$d(x_{\frac{n}{2^k}}, x_{\frac{n+1}{2^k}}) \leq s \cdot \frac{(1+\epsilon)^k}{2^k} \leq s \cdot (\frac{2}{3})^k$.

Jetzt folgt unter Benutzung von (*) durch erneute Induktion:

$d(x_{\frac{n}{2^k}}, x_{\frac{n+1}{2^k}}) \leq \frac{s}{2^k}(1 + \frac{2}{3})(1 + (\frac{2}{3})^2)...(1 + (\frac{2}{3})^k)$.

Da das unendliche Produkt $(1 + \frac{2}{3})(1 + (\frac{2}{3})^2)...$ konvergiert, erhalten wir die gewünschte Lipschitzkonstante. $\square$

7.3. Holonomie. Nun wollen wir Fasern miteinander vergleichen lernen, i.e. wir brauchen eine Holonomie. Diese wird nun beschrieben.

Sei $\gamma : [0, b] \to Y$ eine Kürzeste, $y = \gamma(0)$, $z = \gamma(b)$, v sei die Anfangsrichtung von γ. Wir nehmen an, daß für jedes x in der Faser F_y von y die *horizontale* Hochhebung von v nach H_x eindeutig bestimmt ist. (Das ist nach Korollar 6.3 der Fall, wenn v in Σ_y einen Antipoden besitzt; für wesentlich allgemeinere Fälle siehe nächsten Abschnitt).

In diesem Fall ist nach Lemma 5.4 die *horizontale* Hochhebung $\tilde{\gamma}_x$ von γ durch x eindeutig bestimmt und wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung $p_\gamma : F_y \to F_z$, die x auf $\tilde{\gamma}_x(b)$ schickt. Unmittelbar sieht man ein, daß diese Abbildung stetig, surjektiv und eigentlich ist. Ist w die Eingangsrichtung von γ in $\Sigma_z Y$, so erkennt man nach nochmaligem Anwenden von Lemma 5.4, daß für jedes $x \in F_z$ das Urbild von x bezüglich p_γ natürlich homöomorph zur Menge $Df_x^{-1}(w) \cap H_x$ der *horizontalen* Hochhebungen von w nach H_x ist. Nach Definition sind x und $p_\gamma(x)$ immer *nah*, s.d. die Holonomie eine Art metrische Projektion darstellt. Ist die Kürzeste γ festgelegt, oder die Richtung v klar, so schreiben wir für p_γ einfach p_{yz} .

Sind p_{yz} und p_{zy} wohldefiniert (für ein festes γ zwischen y und z), so sind es zueinander inverse Homöomorphismen. Ist m ein innerer Punkt einer Kürzesten yz, für die p_{yz} definiert ist, so gilt $p_{yz} = p_{mz} \circ p_{ym}$ und p_{ym} ist ein Homöomorphismus. Wenn es also nur um topologische Eigenschaften von Holonomien p_{yz} geht, kann man immer annehmen, daß die Kürzeste yz über y hinaus ausgedehnt werden kann.

Ist $y \in Y$ ein regulärer Punkt, so ist also für jedes $z \in Y$ und jede Kürzeste yz die Holonomie $p_{yz} : F_y \to F_z$ wohldefiniert. Ist z dabei auch regulär, so sieht man, daß p_{yz} ein Homöomorphismus ist, folglich sind je zwei reguläre Fasern homöomorph. (Beachte, daß der Homöomorphismus nicht kanonisch ist und von der Kürzesten yz abhängt). Damit ist der Homöomorphietyp der regulären Faser eindeutig bestimmt und wir können von der regulären Faser sprechen.

Ist nun y ein innerer Punkt einer von z ausgehenden Kürzesten, so kann man über die Holonomie p_{yz} deutlich mehr sagen:

PROPOSITION 7.3. *Sei γ eine Kürzeste zwischen y und $\bar{z}$ in Y, sei z ein innerer Punkt von γ. Dann ist die Holonomie $p_\gamma : F_z \to F_y$ L-Lipschitz mit einer Konstanten L, die nur von der Krümmungsschranke k und den Längen $|y\bar{z}|$ und $|z\bar{z}|$ abhängt und zwar $L = \frac{r_1}{r_2}$, wobei r_1 bzw. r_2 der Umfang des Kreises mit Radius $|y\bar{z}|$ bzw. $|z\bar{z}|$ in M_k^2 ist.*

Beweis. Für beliebige $x_1, x_2 \in F_z$ setzen wir $p_i = p_\gamma(x_i) \in F_y$ und bezeichnen als $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ Punkte aus $F_{\bar{z}}$, für die $\gamma_i = \bar{x}_i x_i p_i$ *horizontale* Hochhebungen von γ sind.

Wir definieren die Abbildung T von $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, p_1, p_2\}$ nach M_k^2, die $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ auf a, p_1 auf b und p_2 auf c schickt, s.d. $d(a,b) = d(a,c) = d(\bar{x}_i, p_i) = d(\bar{z}, y)$ und $d(b,c) = d(p_1, p_2)$ gilt. T ist 1-Lipschitz und muß sich nach Proposition 2.11 1-Lipschitz auf ganz X ausdehnen lassen. Dabei müssen Kürzeste γ_1 und γ_2 auf ab bzw. ac isometrisch abgebildet werden. Da T 1-Lipschitz ist erhalten wir:
$\frac{d(p_1,p_2)}{d(x_1,x_2)} \leq \frac{d(b,c)}{d(T(x_1),T(x_2))}$.
Letzteres hat aber genau den in der Aussage des Satzes angegebenen Wert. □

Genauso erhält man sogar mehr. Bezeichne nämlich für positive Zahlen r, ρ und jedes $y \in Y$ als $W_y^{r,\rho}$ die Menge der Punkte z aus Y, mit Abstand $\leq r$ zu y, für die die Kürzeste yz über z hinaus um die Länge ρ ausgedehnt werden kann. Nach [OS94] hat für kleines ρ die Menge $W_y^{r,\rho}$ fast das Volumen des r-Balles um y. Sei $V_y^{r,\rho}$ das Urbild von $W_y^{r,\rho}$ bezüglich f. Für jedes x aus $V_y^{r,\rho}$ ist dann die Projektion $p(x)$ auf F_y wohldefiniert und der Beweis von Proposition 7.3 läßt sich auf diese Abbildung p übertragen. Wir erhalten:

Lemma 7.4. *Die Projektion $p : V_y^{r,\rho} \to F_y$ ist eine Lipschitzabbildung.*

Jetzt kann man Früchte ernten:

Korollar 7.5. *Jede Faser F_y hat Hausdorffdimension $\leq n - m$. Jede reguläre Faser hat Hausdorffdimension $n - m$.*

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $P : V_y^{r,\rho} \to F_y \times W_y^{r,\rho}$, die in der ersten Koordinate auf F_y wie oben projeziert und in der zweiten einfach die Submetrie f ist. P ist surjektiv und wegen Lemma 7.4 ist P eine Lipschitzabbildung. Es folgt

$$\dim_H(F_y) \leq \dim_H(V_y^{r,\rho}) - \dim_H(W_y^{r,\rho}) \leq \dim_H(X) - \dim_H(Y).$$

Die reguläre Faser hat wegen Proposition 5.6 topologische Dimension $n - m$. Aus $\dim_H \geq \dim$ folgt jetzt die Behauptung. □

Wir erhalten folgendes Korollar:

Korollar 7.6. *Hat Y keinen Rand, so ist das Urbild der Menge D der* dick*en Punkte zusammenhängend.*

Beweis. Hat Y keinen Rand, so ist das Komplement K von D eine abgeschlossene Menge mit $\dim(K) \leq \dim_H(K) \leq m - 2$. Da jede Faser F_y die Ungleichung $\dim(F_y) \leq \dim_H(F_y) \leq n - m$ erfüllt, muß wegen Fakt 2.2 $\dim(f^{-1}(K)) \leq n - 2$ gelten. Da X eine Cantor-Mannigfaltigkeit ist, erhalten wir das gewünschte Resultat. □

Aus der Existenz von Holonomien folgt ebenfalls direkt:

Lemma 7.7. *Eine Submetrie ist diskret, bzw. zusammenhängend, bzw. injektiv (i.e. isometrisch), wenn die reguläre Faser diskret, bzw. zusammenhängend ist, bzw. aus einem Punkt besteht.*

7.4. Letzte Märchen. Wir erwähnen zwei hübsche Resultate, die weiter nicht verwendet werden und deswegen ohne exakten Beweis bleiben.

Man kann zeigen, daß falls x_j eine Folge aus Elementen einer Faser $F = F_y$ ist, die gegen ein Element x aus der Richtung v konvergieren, $\liminf V_{x_n} \geq S^0 * \Sigma_v(V_x)$ gilt. Man schaut sich nämlich den Beweis der Tatsache $\liminf \Sigma_{x_n} \geq S^0 * \Sigma_v(\Sigma_x)$ an und sieht, daß die dort definierte längennichtverkürzende Abbildung $S^0 * \Sigma_v(V_x)$ nach $\lim V_{x_n}$ schickt.

Daraus folgt, wenn man eine Sekunde überlegt:

PROPOSITION 7.8. *In jeder Faser F enthält die Menge F_0 der Punkte x, deren vertikale Räume V_x* sehr dick *sind, eine offene in der Faser dichte Teilmenge. Insbesondere enthält jede Faser eine in der Faser offene, dichte Teilmenge, in der die Submetrie spaltend ist.*

Jetzt kann man schließen:

PROPOSITION 7.9. *Ist $f : X \to Y$ eine Submetrie und ist $y \in Y$ regulär, so ist f in jedem Punkt über y spaltend.*

8. Reguläre Teile

Wir zeigen in diesem Abschnitt, wie bereits angekündigt, daß jede Submetrie über *rund*en Punkten regulär und spaltend ist und noch ein paar andere hübsche Sätze.

Wir beginnen mit einem Schlüsselresultat.

Lemma 8.1. *Seien Σ, S Räume mit Krümmung ≥ 1. Seien $y, z \in S$ zwei Punkte mit: $\mathrm{rad}_z S = max(d_z) = d(y,z) > \frac{\pi}{2}$. Ist $f : \Sigma \to S$ eine Submetrie, so ist y ein Fixpunkt von f.*

Beweis. Sei x ein Urbild von y. Da $d_{F_z} = d_z \circ f$ gilt, muß d_{F_z} in x ein Maximum annehmen. Gäbe es noch ein Urbild x_1 von y, so müßte für jede Kürzeste γ zwischen x und x_1 eine *horizontal*e Kürzeste η zwischen x und $\bar{z} \in F_z$ existieren, die mit γ einen Winkel $\leq \frac{\pi}{2}$ einschließt. Dann ergäbe sich aus der Krümmungsschranke aber, daß $d(y,z) = d(x,\bar{z}) > d(x_1,\bar{z})$ gelten muß, was der 1-Lipschitz Eigenschaft von f widerspricht. □

Ist S ein *rund*er Raum, so gibt es für jedes y ein z mit $d(y,z) = \mathrm{rad}_z(S) > \frac{\pi}{2}$ (Fakt 2.21) und aus Lemma 8.1 schließen wir:

PROPOSITION 8.2. *Seien Σ, S Räume mit Krümmung ≥ 1, $f : \Sigma \to S$ eine Submetrie. Ist S* rund*, so ist f eine Isometrie.*

Wir erhalten einen Teil des Beweises von Proposition 6.16, nämlich:

Korollar 8.3. *Ist $f : X \to S$ eine Submetrie, so ist f über jedem* rund*en Punkt regulär.*

Wir beweisen jetzt eine nach unserer Meinung erstaunliche Verallgemeinerung von Proposition 8.2. Beachte, daß in den folgenden zwei Sätzen über den Raum N nur vorausgesetzt wird, daß er in einem Alexaxandrov-Raum Σ enthalten ist. N selbst kann beliebig wild sein. Zunächst ein

Lemma 8.4. *Sei Σ ein Alexandrov-Raum mit Krümmung ≥ 1, N eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von Σ. Ist $p : N \to S^k$ eine surjektive 1-Lipschitz Abbildung, so ist p eine Isometrie.*

Beweis. Seien x_1, x_2 in N beliebig, $y_i = p(x_i)$. Sei ferner a der Antipodenpunkt von y_1 und z ein Urbild von a. Dann ist z ein Antipode von x_1 und wir erhalten: $\pi = |zx_2| + |x_2x_1| \geq |ay_2| + |y_2y_1| = \pi$. Wir erhalten $|x_2x_1| = |y_2y_1|$. □

PROPOSITION 8.5. *Sei Σ ein Raum mit Krümmung ≥ 1, S ein* rund*er Raum und N eine beliebige (!!) abgeschlossene Teilmenge von Σ. Ist $f : N \to S$ eine Submetrie, so ist f injektiv, d.h. eine Isometrie.*

Beweis. Da die Menge der Riemannschen Punkte in S überall dicht liegt, reicht es zu zeigen, daß jeder Riemannsche Punkt $y \in S$ ein Fixpunkt der Submetrie f ist. Sei x ein Urbild eines Riemannschen Punktes y und sei $z \in S$ so gewählt, daß $y = A(z)$ gilt (vgl. Fakt 2.21), i.e. d_z nimmt in y sein Maximum an.

Jede von y ausgehende Kürzeste kann zu einer von x ausgehenden, in N liegenden hororizontalen Kürzesten hochgehoben werden. Sei $G \subset \Sigma_x N \subset \Sigma_x \Sigma$ der Abschluß der Menge der Anfangsrichtungen von eben erwähnten *horizontal*en Kürzesten. Die auf natürliche Weise definierte Projektion $p : G \to \Sigma_y S$ ist surjektiv und 1-Lipschitz. Aus $\Sigma_y S = S^k$ folgt nun (Lemma 8.4), daß p eine Isometrie ist. Insbesondere gilt wegen Lemma 2.14 $\Sigma_x \Sigma = G * \mathrm{Pol}(G)$. Sei nun $K \subset G$ die Teilmenge der Richtungen, in die eine *horizontal*e Kürzeste von x zu F_z läuft. Nach unserer Wahl nimmt d_{F_z} auf N in x sein Maximum an, deswegen muß K im Raum G $\frac{\pi}{2}$-dicht liegen. Dann liegt K auch in $\Sigma_x \Sigma$ $\frac{\pi}{2}$-dicht. Falls jetzt x_1 ein zweites Urbild von y in N wäre, so könnte man für jede Kürzeste $\gamma = xx_1$ eine in N liegende *horizontal*e Kürzeste η zwischen F_z und x finden, die mit γ einen Winkel $\leq \frac{\pi}{2}$ einschlöße. Wir hätten dann $d(x_1, F_z) < d(x, F_z) = d(y, z)$ -Widerspruch. □

PROPOSITION 8.6. *Seien Σ, S, Z Räume mit Krümmung ≥ 1, N eine beliebige (!!) Teilmenge von Σ und $f : N \to S * Z$ eine Submetrie, für die S und Z in $\underline{Fix(f)}$ liegen. Ist S* rund*, so ist f eine Isometrie.*

Beweis. Sei $p \in Z$ beliebig und betrachte $\bar{N} = f^{-1}(S * \{p\})$. Die Einschränkung $f : \bar{N} \to S * \{p\}$ ist eine Submetrie und es reicht zu zeigen, daß diese injektiv ist. Wir identifizieren $f^{-1}(p)$ mit p und $f^{-1}(S)$ mit S.

Sei $x \in \bar{N}$ beliebig. Das Bild $f(x)$ liegt auf einer Kürzesten zwischen S und p, also muß auch x auf einer *horizontal*en Kürzesten zwischen S und p liegen (der Hochhebung der Kürzesten durch $f(x)$). Damit erhalten wir eine natürliche Abbildung $D : \Sigma_p\bar{N} \to \Sigma_p(S * \{p\}) = S$. D ist wieder eine Submetrie (es folgt z.B. daraus, daß in diesem Fall $T_p\bar{N} = \lim_\omega(\frac{1}{r_j}\bar{N}, p)$ für jede Nullfolge r_j gilt. D ist einfach die induzierte Submetrie). Wegen Proposition 8.5 ist D injektiv. Daraus folgt die Injektivität von f. $\square$

Nun kommen wir in die gewohnte Situation zurück. Alle vorkommenden Räume sind wieder Alexandrov-Räume.

PROPOSITION 8.7. *Ist $f : \Sigma \to S * Z$ eine Submetrie und ist S* rund*, so spaltet Σ in $S * W$ und f ist gleich $id * g$ für eine Submetrie $g : W \to Z$.*

Beweis. Wegen Proposition 8.5 liegt S in $\underline{Fix(f)}$. Sei $\bar{S}$ das zu S isometrische Urbild von S. Wir sehen, daß $f^{-1}(Z) = \mathrm{Pol}(\bar{S})$ gilt und jeder Punkt aus Σ auf einer Kürzesten zwischen $\bar{S}$ und $W := f^{-1}(Z)$ liegt. Aus Lemma 2.23 folgt, daß für alle $y \in \bar{S}$ und $w \in W$: $d(y, w) = \frac{\pi}{2}$ gelten muß. Aus Proposition 11.1 wissen wir nun, daß eine natürliche Submetrie $P : \Sigma \to \bar{S} * W$ existiert, für die $\bar{S}$ und W in der Fixpunktmenge liegen. Wegen Proposition 8.6 ist P eine Isometrie. Die Behauptung ist jetzt klar. $\square$

Nun beweisen wir den Rest von Proposition 6.16, wie schon mehrfach angekündigt.

Sei $f : C\Sigma \to CS$ eine homogene Submetrie. Aus Lemma 2.23 folgt, daß falls H oder V *rund* sind, $d(h, v) = \frac{\pi}{2}$ für alle $h \in H$ und $v \in V$ gilt, i.e. f ist fastspaltend. In beiden Fällen erhalten wir eine Submetrie $P : \Sigma \to H * V$, mit $H \cup V \subset \underline{Fix(P)}$. Diese Submetrie muß dann wegen Proposition 8.6 eine Isometrie sein, i.e. f ist spaltend.

Ist nun S *rund*, so ist f wegen Korollar 8.3 regulär und H ist *rund*. Damit ist f auch spaltend.

9. Diskrete Sachen

Diskrete Submetrien, denen wir uns jetzt zuwenden, sind, wie schon einmal erwähnt, besonders einfach aber trotzdem sehr interessant.

PROPOSITION 9.1. *Für eine Submetrie $f : X \to Y$ sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(1) *Die Submetrie ist diskret;*
(2) *Es gibt keine vertikalen Richtungen.*
(3) *Jede Richtung ist* horizontal*;*
(4) $\dim(X) = \dim(Y)$*;*

Beweis. Nach Lemma 5.2 sind (2) und (1) äquivalent. (3) und (2) sind nach Proposition 6.4 äquivalent. Ist x ein Punkt in der regulären Faser F_y, so folgt aus (3) $\Sigma_x = H_x = \Sigma_y$ und damit (4). Aus (4) folgt aber, daß für ein y mit $\Sigma_y Y = S^k$ und jedes $x \in F_y$ in $\Sigma_x X$ keine vertikalen Vektoren existieren und damit die reguläre Faser F_y diskret ist. $\square$

Bemerkung 9.1. Wir sehen also, daß eine nicht diskrete Submetrie die Dimension verkleinert. Damit kann man jede zusammenhängende Submetrie als Komposition von zusammenhängenden Submetrien darstellen, die alle in eben diesem Sinne irreduzibel sind (d.h. sich nicht als nichttriviale Komposition von zusammenhängenden Submetrien darstellen lassen). Bedauerlicherweise ist diese Zerlegung nicht eindeutig bestimmt, wie man leicht einsieht. Beachte, daß solche Faktorisierungen der Submetrie $f : X \to \{\mathrm{pt}\}$ zusammenhängenden Submetrien $f : X \to Y$ entsprechen.

Sei $f : X \to Y$ eine diskrete Submetrie. Sei $y \in Y$ beliebig und sei ϵ so gewählt, daß Punkte aus F_y gegenseitigen Abstand $> 3\epsilon$ voneinander haben. Betrachtet man dann für jedes $x \in F_y$ den Ball $B_\epsilon(x)$, so sieht man, daß für jedes z aus diesem Ball jeder zu z *nah*e Punkt z_1 auch in diesem Ball liegt. Insbesondere ist $f : B_\epsilon(x) \to B_\epsilon(y)$ eine Submetrie, die x als Fixpunkt hat. Folglich ist jede Kürzeste xz für jeden Punkt $z \in B_\epsilon(x)$ *horizontal* und wir erhalten:

Lemma 9.2. *Sei $f : X \to Y$ eine diskrete Submetrie. Dann existieren auf jeder Kürzesten γ zwischen x und $\bar{x}$ in X eine Folge von Punkten $x = x_1, x_2, ..., x_n = \bar{x}$, s.d. x_i und x_{i+1}* nah *sind, i.e. jede Kürzeste in X wird in endlich viele Kürzeste in Y gefaltet.*

Ist y zudem regulär, so folgt aus der Existenz der Holonomie, daß jeder andere Punkt aus $B_\epsilon(x)$ auch ein Fixpunkt der Submetrie $f : B_\epsilon(x) \to B_\epsilon(y)$ ist, d.h. $f : B_\epsilon(x) \to B_\epsilon(y)$ ist in diesem Fall eine Isometrie. Wir erhalten also:

PROPOSITION 9.3. *Für jede diskrete Submetrie ist die Menge der regulären Punkte offen und f ist über dieser Menge eine Überlagerung.*

Da die Menge der regulären Punkte volles Maß hat, sehen wir ferner:

Lemma 9.4. *Ist X ein Alexandrov-Raum mit endlichem Volumen, so gilt für jede diskrete Submetrie $f : X \to Y$:* $\mathrm{vol}(Y) = \frac{1}{k}\mathrm{vol}(X)$, *wobei k die Mächtigkeit der regulären Faser ist.*

Bemerkung 9.2. Wir sehen, daß bei einer diskreten Submetrie $f : X \to Y$ die Richtungsräume über den regulären Punkten gleich bleiben, während die Richtungsräume über anderen Punkten größer werden und der Raum X mehr als Y einer Mannigfaltigkeit ähnelt.

Eine natürliche diskrete Submetrie gibt es über jedem Raum Y mit nichtleerem Rand. Verklebt man nämlich Y längs des Randes mit sich selbst, so entsteht nach [PP94a] ein Raum $\tilde{Y}$ mit derselben Krümmungsschranke und die kanonische Abbildung $f : \tilde{Y} \to Y$ ist natürlich eine Submetrie.

Ist andererseits Y ein Raum ohne Rand, so können wir diskrete Submetrien über Y mit dem folgenden hübschen Satz beschreiben, der direkt aus Proposition 9.3 und Korollar 7.6 folgt.

PROPOSITION 9.5. *Sei Y ein Raum ohne Rand. Dann entsprechen diskrete Submetrien mit Basis Y (deren Totalraum ein Alexandrov-Raum ist) eineindeutig zusammenhängenden Überlagerungen der totalkonvexen, offenen Menge D der* dick*en Punkte von Y, deren Vervollständigungen von unten beschränkte Krümmung haben.*

Nun beschreiben wir eine interessante Klasse von diskreten Submetrien. Sei Y ein kompakter 2-dimensionaler Alexandrov-Raum ohne Rand. Y ist dann eine topologische Mannigfaltigkeit und die Menge S der Punkte mit nicht-*rund*em Link ist endlich. Falls Y nicht die Sphäre ist oder falls die Kardinalität von S größer 2 ist,kann man, wie in der Theorie der zweidimensionalen Orbifolds (vgl. [Thu78]), eine endliche zusammenhängende Überlagerung $\tilde{X}$ von $\tilde{Y} = Y \setminus S$ finden, die in Punkten über S so oft wie nur möglich verzweigt, i.e. falls in $y \in S$ für den Richtungsraum $\frac{\pi}{k} \geq \mathrm{rad}(\Sigma_y Y) > \frac{\pi}{k+1}$ gilt, so ist in jedem Urbild von y der Verzweigungsgrad genau k.

Man stellt leicht fest, daß der Abschluß X von $\tilde{X}$ dieselbe Krümmungsschranke wie Y hat und daß jeder Punkt in X *rund* ist.

Bemerkung 9.3. Wir möchten vom letzten Beispiel ausgehend ein weiteres Feld für submetrielle Betätigungen erwähnen. Es ist nicht unnatürlich, wenn auch etwas gewagt, zu hoffen, daß man mit Hilfe von

Submetrien einige (alle?) extremale Teilmengen eines gegebenen Alexandrov-Raumes auflösen kann, d.h. Submetrien $f : X \to Y$ zu finden, s.d. der Raum X weniger extremale Teilmengen als Y besitzt.

10. Faktorisierungssatz

In diesem Abschnitt zeigen wir induktiv über die Dimension von X:

THEOREM 10.1. *Jede Submetrie $f : X \to Y$ zwischen Alexandrov-Räumen läßt sich als Komposition einer zusammenhängenden und einer diskreten Submetrie darstellen.*

Wir beginnen mit einem Lemma, das die Aussage lokalisiert:

Lemma 10.2. *Sei $f : X \to Y$ eine Submetrie. Dann sind äquivalent:*

(1) *f faktorisiert als $p \circ \bar{f}$, wobei $\bar{f}$ eine zusammenhängende und p eine diskrete Submetrie ist.*
(2) *Die Zerlegung von X in Zusammenhangskomponenten der Fasern von f ist äquidistant.*
(3) *Ist für eine Kürzeste yz in Y die Holonomie $p_{yz} : F_y \to F_z$ wohldefiniert, so bildet sie Zusammenhangskomponenten surjektiv auf Zusammenhangskomponenten ab.*

Beweis. Bis auf die Implikation (3) nach (2) ist alles trivial. Sei also (3) erfüllt. Sei zunächst K die Zusammenhangskomponente einer Faser. Wählt man ϵ so klein, daß andere Zusammenhangskomponente der Faser von K Abstand $> 2\epsilon$ zu K haben, so folgt aus (3), daß für jede andere Zusammenhangskomponente $\bar{K}$ einer anderen Faser mit $d(K, \bar{K}) < \epsilon$ die Komponenten K und $\bar{K}$ äquidistant sind.

Seien nun A und B zwei beliebige Komponenten von zwei Fasern, und sei $\gamma : [a, b] \to Y$ eine Kürzeste zwischen A und B der Länge $d = d(A, B)$. Bezeichne für jedes $t \in [a, b]$ als F_t die Zusammenhangskomponente der Faser durch $\gamma(t)$, insbesondere ist $A = F_a$, $B = F_b$. Für jedes t sei ϵ_t wie oben für $K = F_t$ gewählt. Wir finden endlich viele t_k, s.d. Bälle U_k um $\gamma(t_k)$ mit Radius ϵ_{t_k} ganz γ überdecken. Wenn wir ein paar t_k rausschmeissen, können wir annehmen, daß $t_{k+1} > t_k$ gilt und daß der Schnitt von U_{k+1} und U_k einen Punkt $\gamma(t_{k+\frac{1}{2}})$ enthält, wobei $t_k < t_{k+\frac{1}{2}} < t_{k+1}$ gilt.

Nach Wahl der U_k erhalten wir für jede Zahl $j = 0, \frac{1}{2}, 1, .., n$ und jedes $x_j \in F_{t_j} : d(x_j, F_{t_{j+\frac{1}{2}}}) = t_{j+\frac{1}{2}} - t_j$. Durch Summieren erhält man daraus: $d(x_{t_j}, F_{t_i}) \leq |t_j - t_i|$. Insbesondere gilt für jedes $q \in A$: $d(q, B) \leq d$ und da dasselbe für B gilt, sind A und B äquidistant. $\square$

Wir sehen, daß die Faktorisierung von f, falls sie existiert, eindeutig ist. Die zusammenhängende Submetrie $\bar{f}$ nennen wir in diesem Fall die universelle Hochhebung von f.

Sei also Theorem 10.1 für Dimensionen $< n$ bewiesen. Wir zeigen, daß die Bedingung (3) aus Lemma 10.2 erfüllt ist, auch wenn $\dim(X) = n$ gilt.

Wir beginnen, wie immer, mit einfachen Lemmata:

Lemma 10.3. *Sei $f : C\Sigma \to CS$ eine homogene Submetrie. Dann ist für jede Zusammenhangskomponente F_0 einer Faser F die Menge $F_0 \cap CH$ eine Zusammenhangskomponente der Faser $F \cap CH$ der Submetrie $f : CH \to CS$.*

Beweis. Lemma 6.5 ergibt, daß F aus allen Elementen der Form $x = h + v$ besteht, wobei h in $F \cap CH^v$ liegt. Direkt folgt, daß F_0 aus allen Elementen der Form $h + v$ besteht, wobei h in $F_0 \cap CH^v$ liegt. Insbesondere ist $F_0 \cap CH$ zusammenhängend. Da F_0 in F offen und abgeschlossen ist, ist auch $F_0 \cap CH$ in $F \cap CH$ offen und abgeschlossen. Zusammengenommen ist $F_0 \cap CH$ eine Zusammenhangskomponente der Faser $F \cap CH$. $\square$

Lemma 10.4. *Sei $f : C\Sigma \to CS$ eine homogene Submetrie,* $\dim(\Sigma) = n - 1$. *Sei F^0_y eine Zusammenhangskomponente einer Faser F_y. Dann sind F^0_y und CV äquidistant.*

Beweis. Für jedes $x \in F^0_y \subset F_y$ gilt $d(x, CV) = d(F_y, CV) = d(y, 0) = |y|$. Wir müssen also zeigen, daß $d(v, F^0_y) = |y|$ für jedes $v \in V$ gilt, oder äquivalent dazu, daß F^0_y einen zu v *nah*en Punkt enthält.

Wegen Lemma 10.3 ist es äquivalent dazu, daß die Zusammenhangskomponente $F^0_y \cap CH$ der Faser $F_y \cap CH$ der Submetrie $f : CH \to CS$ nichttrivialen Schnitt mit CH^v besitzt. Wir müssen also beweisen, daß jede Zusammenhangskomponente jeder Faser der Submetrie $f : H \to S$ nichttrivialen Schnitt mit $\tilde{H}$ hat.

Nach Induktion sind die Komponenten der Fasern von $f : H \to S$ äquidistant. Sei F^0_y eine Zusammenhangskomponente einer Faser F_y, die $\tilde{H}$ nicht schneidet. Dann gilt es auch für eine Zusammenhangskomponente der Faser jedes Punktes in einer kleinen Umgebung von y, i.e. wir können o.B.d.A. annehmen, daß y ein Riemannscher Punkt ist.

Sei in diesem Fall F^1_y eine Zusammenhangskomponente von F_y, die $\tilde{H}$ in einem Punkt h schneidet. Sei $\bar{h}$ ein Punkt von F^0_y mit $d(h, \bar{h}) = d(h, F^0_y)$, i.e. jede Kürzeste $h\bar{h}$ ist *horizontal* bezüglich der universellen Hochhebung $\bar{f} : H \to \bar{S}$ von f. Wegen Lemma 9.2 ist ein Anfangsstück hh_0 von $h\bar{h}$ *horizontal* bezüglich f, i.e. h_0 ist ein zu h bezüglich f *nah*er

Punkt. Wegen der Regularität von y ist h_0 der einzige zu h *nah*e Punkt in der Faser $f^{-1}(f(h_0))$. Da nach Lemma 6.11 die Einschränkung von f auf $\tilde{H}$ eine Submetrie ist, muß h_0 in $\tilde{H}$ liegen. Wir haben also eine Kürzeste $hh_0\bar{h}$ in H für die h_0 in $\tilde{H}$ liegt.

Wegen Lemma 6.6 liegt dann auch $\bar{h}$ in $\tilde{H}$ - Widerspruch. $\square$

Nun können wir endlich Theorem 10.1 beweisen.

Sei $f : X \to Y$ eine Submetrie, $\dim(X) = n$. Sei $p_{zy} : F_z \to F_y$ eine Holonomie, $\bar{F}$ sei eine Komponente von F_z. Die Menge $G = p_{zy}(\bar{F})$ ist abgeschlossen und wir müssen zeigen, daß G in F_y offen ist. Sei sonst x_1 ein Punkt in $F_y \setminus G$, der nicht weit von G liegt und wähle ein x aus G mit $d(x_1, x) = d(x_1, G)$ und eine Kürzeste $\eta : [0, t] \to F_y$ in der inneren Metrik von F_y zwischen x_1 und x. Da die innere Metrik in F_y zur induzierten Metrik lokal Lipschitz-äquivalent ist, gilt für jedes $\bar{x}$ auf η: $d(\bar{x}, G) \geq Ld(\bar{x}, x)$ mit einem festen L. (d bedeutet immer die induzierte Metrik, nicht die innere!). Wir wählen eine Folge von Punkten x_k auf η mit $d(x_k, x) = \frac{1}{k}$.

Seien nun z_k die Folge von Punkten auf der Kürzesten zy mit $d(z_k, y) = \frac{1}{100Lk}$. Wir haben $p_{zy} = p_{zy} \circ p_{zz_k}$ und die zweite Abbildung ist ein Homöomorphismus. Wir bezeichnen die Komponente $p_{zz_k}(\bar{F})$ von F_{z_k} als F_k.

Nun betrachten wir für einen Ultrafilter ω die Konvergenz $f : \frac{1}{k}(X, x) \to (Y, y)$ gegen $Df_x : T_xX \to T_yY$. Die Fasern $F_{z_k} \subset \frac{1}{k}(X, x)$ konvergieren gegen eine Faser F der homogenen Submetrie Df_x, die Folge x_k gegen ein $v \in V_x$. Sei F_0 der ω-Limes der Komponenten F_k. Wegen $d(x_k, G) \geq 100d(F_k, F_y)$ enthält F_0 keinen zu v *nah*en Punkt. Wenn wir jetzt zeigen, daß F_0 offen und abgeschlossen ist, erhalten wir einen Widerspruch zu Lemma 10.4.

F_0 ist als ω-Limes natürlich abgeschlossen. Die Offenheit in F beweisen wir jetzt mit dem Kirszbrauntheorem (Proposition 2.11).

Wegen Theorem 7.2 ist der Abstand von $\bar{F}$ zu anderen Komponenten von F_z größer $\epsilon > 0$. Wir betrachten die Abbildung $P : F_z \cup F_y \to M_k^2$, die F_y auf einen Punkt a, $\bar{F}$ auf einen Punkt b und alle anderen Komponenten von F_z auf einen Punkt c abbildet, s.d. $d(b, c) = \epsilon$ und $d(a, b) = d(a, c) = d(F_y, F_z) = d(y, z)$ gilt.

Diese Abbildung ist offensichtlich 1-Lipschitz und muß sich nach Proposition 2.11 1-Lipschitz auf ganz X ausdehnen lassen. Dabei muß jede *horizontal*e Kürzeste zwischen F_z und F_y isometrisch auf die Kürzeste ab bzw. ac abgebildet werden und wir sehen, daß der Abstand zwischen F_k und anderen Komponenten von F_{z_k} in $\frac{1}{k}(X, x)$ uniform von unten beschränkt ist. Daraus ergibt sich natürlich die Offenheit von F_0 in F.

11. Spaltungen und Submetrien

Wir zeigen nun einen Satz, der Spaltungen von Alexandrov-Räumen in Verbindung mit Submetrien bringt.

PROPOSITION 11.1. *Sei Σ ein Alexandrov-Raum mit Krümmung ≥ 1. Seien ferner H und V konvexe Teilmengen von Σ mit der Eigenschaft, daß für alle $h \in H$ und $v \in V : d(h, v) = \frac{\pi}{2}$ gilt. Sei N die Menge aller Punkte, durch die eine Kürzeste von H nach V läuft. Dann lassen sich die natürlichen Einbettungen von H und V nach $H * V$ eindeutig zu einer 1-Lipschitzabbildung $P : N \to H * V$ ausdehnen und P ist eine Submetrie. Insbesondere ist P genau dann eine Isometrie, wenn es injektiv ist.*

Beweis. Falls eine 1-Lipschitzausdehnung $P_{H,V} : N \to H * V$ existiert, so muß es jede Kürzeste zwischen H und V auf die entsprechende Kürzeste in $H * V$ schicken. Da in Σ keine Verzweigungen existieren, ist für $x \in N \setminus (H \cup V)$ die x enthaltende Kürzeste zwischen H und V eindeutig bestimmt und die Abbildung $P_{H,V}$ wohldefiniert, stetig und surjektiv.

Geht man von H und V zu kleineren konvexen Teilmengen $\bar{H} \subset H$ und $\bar{V} \subset V$ über, so ist die für die entsprechende Teilmenge $\bar{N}$ von N definierte Abbildung $P_{\bar{H},\bar{V}} : \bar{N} \to \bar{H} * \bar{V}$ die Einschränkung der Abbildung $P_{H,V}$. Deswegen dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß H und V Kürzeste γ_1 bzw. γ_2 sind. Da in diesem Fall $H * V$ eine konvexe Teilmenge von S^3 ist, folgt aus Proposition 2.11, daß P tatsächlich 1-Lipschitz sein muß.

Nun zeigen wir, daß $P_{H,V}$ eine Submetrie ist. Zunächst eine leichte Bemerkung.

(*) Sei $v \in V$ beliebig gewählt. Für $h_1, h_2 \in H$ und beliebige Kürzeste vh_1 und h_1h_2 müssen vh_1 und $h_1h_2 \subset H$ nach Toponogov ein sphärisches Dreieck einschließen, das unter P isometrisch abgebildet wird.

Es folgt, daß jedes p aus N mit v innerhalb von N durch eine Kürzeste verbunden ist und jede solche Kürzeste ist *horizontal*. Wir erhalten also eine 1-Lipschitz Abbildung $D : T_vN \to T_v(V * H) = (T_vV) * H$. Bezeichne in T_vN als K die Menge der Richtungen, in die eine Kürzeste von v nach H läuft. Wir sehen, daß T_vN die Form $(T_vV) * K$ hat und die Abbildung D hat die Form $id * D_0$, wobei D_0 die Einschränkung von D auf K ist. Nun ist aber D_0 wegen (*) eine Submetrie. Wir sehen, daß D und damit auch P Submetrien sind. $\square$

Bemerkung 11.1. Beachte, daß N nicht konvex zu sein braucht. Ist es jedoch konvex, so kann man Σ durch N ersetzen und in die etwas einfachere und deutlich hübschere Situation aus Abschnitt 6.3 gelangen.

Mit Proposition 8.6 erhalten wir den wichtigen Spezialfall:

Korollar 11.2. *Seien Σ, H, V wie oben und sei H* rund. *Dann ist die Submetrie $P_{H,V}$ eine Isometrie.*

Daraus folgt nun mit Hilfe von Lemma 2.21:

PROPOSITION 11.3. *Sei Σ ein Raum mit Krümmung ≥ 1, H ein abgeschlossener, (total)konvexer,* rund*er Teilraum von Σ. Dann spannen H und $\mathrm{Pol}(H)$ eine zu $H * \mathrm{Pol}(H)$ isometrische (total)konvexe Teilmenge von Σ ein.*

12. Mannigfaltigkeiten

Dieser Abschnitt ist eine Art Vorschau einer Fortsetzung, in der wir Submetrien von Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschreiben. Wir beweisen einige leichte Resultate über Submetrien von Sphären, die im zweiten Teil der Dissertation benutzt werden.

12.1. Differentiale. Wie gewohnt fangen wir mit einem leichten Lemma an.

Lemma 12.1. *Jede konvexe $\frac{\pi}{2}$-dichte Teilmenge H von S^n ist gut (vgl. Definition 6.1), i.e. für $V = \mathrm{Pol}(H)$ liegt jedes $x \in S^n \setminus (H \cup V)$ auf einer Kürzesten der Länge $\frac{\pi}{2}$ zwischen H und V. Für jedes v ist H^v konvex und $\tilde{H}$ ist die maximale in H enthaltene totalgeodätische Sphäre.*

Beweis. Wenn die Aussage nicht direkt einleuchtet, kann man sie aus Theorem 6.13 und Beispiel 6.2 folgern. □

Nun folgen aber schon die ersten Sätze über Differentiale von Submetrien in den Riemannschen Punkten.

Aus Lemma 12.1 und Theorem 6.13 erhalten wir:

Lemma 12.2. *Ist $f : CS^{n-1} = R^n \to C\Sigma$ eine homogene Submetrie, $H \subset S^{n-1}$ die Menge der* horizontal*en Richtungen, so ist $\tilde{H}$ die maximale in H enthaltene Sphäre. Insbesondere ist Σ Basis der Submetrie $f : S^k \to \Sigma$ mit einem $k < n$.*

Eine Unmenge von Folgerungen ergibt sich:

Lemma 12.3. *Für eine homogene Submetrie $f : R^n \to C\Sigma$ sind äquivalent:*

(1) f *ist spaltend;*
(2) f *ist fastspaltend;*
(3) *Die Menge* H *der* horizontal*en Richtungen ist eine Sphäre;*
(4) *Die Menge* V *der vertikalen Richtungen ist leer oder eine Sphäre.*
(5) *In* S^{n-1} *existieren keine antipodalen Punkte* h, v *mit* $h \in H$ *und* $v \in V$.
(6) *Die Menge* H *der* horizontal*en Vektoren ist invariant unter der Antipodenabbildung.*

Desweiteren

Lemma 12.4. *Für eine homogene Submetrie* $f : R^n \to C\Sigma$ *sind äquivalent:*

(1) f *ist regulär;*
(2) Σ *ist eine Sphäre* S^l*;*
(3) Σ *ist ein* rund*er Raum;*
(4) Σ *ist ein* dick*er Raum.*

Übertragen auf die Differentiale bedeutet das:

PROPOSITION 12.5. *Sei* M *eine Alexandrov-Raum, in dem jeder Punkt ein Riemannscher Punkt ist;* $f : M \to B$ *eine Submetrie. Dann ist jeder Richtungsraum* $\Sigma_y B$ *von* B *die Basis einer Submetrie von einer Sphäre* S^k *(k kann natürlich variiren).* f *ist in* x *regulär genau dann, wenn* $\Sigma_{f(x)}B$ *eine Sphäre ist. In diesem Fall ist* f *in jedem Punkt der Faser* $F_{f(x)}$ *regulär. Insbesondere stimmt die Menge der regulären Punkte der Submetrie* f *mit der Menge der Riemannschen Punkte und mit der Menge der* dick*en Punkte von* B *überein, folglich ist sie offen und totalkonvex.* f *ist im Punkte* $x \in M$ *spaltend genau dann, wenn der* horizontal*e Raum* H_x *eine euklidische Sphäre ist.*

12.2. Fasern. Schon wieder leitet die Erzählung ein sehr leichtes Lemma ein.

Lemma 12.6. *Sei* $M_k^n = M$. *Punkte* m_1, m_2, x, y *aus* M *mögen* $d(x, m_i) \geq d(y, m_i)$ *erfüllen. Dann gilt auch für jedes* h *auf der Kürzesten zwischen* m_1 *und* m_2 *die Ungleichung* $d(x, h) \geq d(y, h)$.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $P : \{m_1, m_2, x, y\} \to M_k^2$, die x und y auf einen Punkt a, m_1 auf b und m_2 auf c schickt, s.d. $d(a, b) = d(x, m_1)$, $d(a, c) = d(x, m_2)$ und $d(b, c) = d(m_1, m_2)$ gilt.

P ist 1-Lipschitz und muß sich 1-Lipschitz auf ganz M ausdehnen lassen (wegen Proposition 2.11). Dabei muß das Dreieck $m_1 m_2 x$ isometrisch abgebildet werden und wir sehen, daß $d(y, h) \geq d(x, h)$ gelten muß. □

Korollar 12.7. *Sei $A \subset M_k^n$ beliebig, $a \in A$. Dann ist die Menge N_a der Punkte $x \in M$ mit $d(x, A) = d(x, a)$ konvex.*

Unmittelbar folgt daraus

PROPOSITION 12.8. *Sei $M = M_k^n$ $f : M \to B$ eine Submetrie, $m \in M$. Dann ist die Menge N_m der zu m* nah*en Punkte konvex.*

Wir erinnern an

Definition 12.1. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir sagen, daß eine Teilmenge $F \subset M$ positive Reichweite hat, wenn in einer Umgebung U von F die Projektion auf F eindeutig bestimmt ist, d.h. wenn für jedes $u \in U$ genau ein $p \in F$ mit $d(u, p) = d(u, F)$ existiert.
Enthält U alle Punkte mit Abstand $< r$ zu C, so sagen wir, daß die Reichweite von F größer als r ist.

Der Begriff ist von Federer ([Fed59]) im euklidischen Raum eingeführt worden. In allgemeinen Mannigfaltigkeiten wurde er in [Ban82] und [Kle80] untersucht. Es stellt sich heraus ([Ban82]), daß der Begriff nicht von der Metrik sondern nur vom $C^{1,1}$-Atlas der Mannigfaltigkeit abhängt.
Beispiele von Mengen positiver Reichweite sind konvexe Mengen und $C^{1,1}$-Untermannigfaltigkeiten. Die in Beispiel 1.5 konstruierte Teilmenge S von H^3 hat Reichweite ∞.
Wir werden folgenden Satz ([Fed59],p.450) benutzen.

Fakt 12.9. *Jede Menge F positiver Reichweite enthält eine überall dichte, in F offene Teilmenge U, die eine $C^{1,1}$ Untermannigfaltigkeit von M ist.*

Nun können wir leicht folgenden Satz beweisen.

PROPOSITION 12.10. *Sei $M = M_k^n$, $f : M \to B$ eine Submetrie, dann hat jede Faser von f positive Reichweite.*

Proposition 12.10 ergibt sich direkt aus der folgenden

PROPOSITION 12.11. *Sei $f : M \to B$ wie oben. Dann gibt es für jeden Punkt $y \in B$ eine positive Zahl ϵ, s.d. in jede Richtung $v \in \Sigma_y B$ eine Kürzeste der Länge ϵ läuft.*

Beweis. Sei $x \in F_y$ ein beliebiges Urbild von y. Da $df_x : \tilde{H}_x \to \Sigma_y B$ eine Submetrie ist, reicht es zu zeigen, daß in jede Richtung aus $\tilde{H}_x$ eine *horizontal*e Kürzeste fester positiver Länge läuft. Betrachte die totalgeodätische Untermannigfaltigkeit T von M, die im Punkte x als

Tangentialraum $C\tilde{H}_x$ hat (beachte, daß $\tilde{H}_x$ eine Sphäre ist) und betrachte den Durchschnitt $T \cap N_x$. Es ist eine konvexe Menge und wir brauchen nur zu zeigen, daß x nicht am Rand von $T \cap N_x$ liegt.

Nun läuft aber in $\Sigma_y B$ in fast jede Richtung eine Kürzeste. Folglich läuft in eine dichte Menge von Richtungen aus $\tilde{H}_x$ eine *horizontal*e Kürzeste in $T \cap N_x$. Daraus ergibt sich die Behauptung. $\square$

Als Korollar erhalten wir aus Fakt 12.9 und Proposition 12.3 die für allgemeine Alexandrov-Räume ohne Beweis weggekommene Proposition 7.8.

Korollar 12.12. *Ist $M = M_k^n$, $f : M \to B$ eine Submetrie, so gibt es in jeder Faser F eine offene dichte Teilmenge O, in der die Submetrie spaltend ist.*

12.3. Submetrien von Sphären. Nun ein erstes Resultat über Submetrien von Sphären. Aus Korollar 4.8 und Lemma 8.1 erhalten wir unmittelbar:

Lemma 12.13. *Sie $f : S^n \to B$ eine Submetrie. Dann sind für einen Punkt $y \in B$ äquivalent:*
(1) *In B besitzt y einen Antipoden.*
(2) *Es gibt ein $z \in B$, mit $\mathrm{rad}_z = d(z, y) > \frac{\pi}{2}$.*
(3) *y ist ein Fixpunkt von f.*

Jetzt sehen wir mühelos

PROPOSITION 12.14. *Sei $f : S^n \to B$ eine Submetrie. Dann spaltet B in $B = S^k * B_0$ und es gilt $\mathrm{diam}(B_0) \leq \frac{\pi}{2}$.*

Beweis. Betrachte die kanonische Zerlegung $B = S^k * B_0$ mit $\mathrm{diam}(B_0) < \pi$. Dann liegt S^k in der Fixpunktmenge von f, S^n spaltet in $S^k * S^{n-k-1}$ und f ist das Produkt $id * f_0$, wobei f_0 die Einschränkung der Submetrie f auf S^{n-k-1} ist.

Gälte nun $\mathrm{diam}(B_0) > \frac{\pi}{2}$, so hätte nach Lemma 8.1 f_0 einen Fixpunkt $y \in B_0$ und dieser Punkt hätte wegen Lemma 12.13 einen Antipoden, was $\mathrm{diam}(B_0) < \pi$ widerspräche. $\square$

12.4. Spaltende Submetrien. Wir wollen zeigen, daß wenn $f : S^n \to B$ eine spaltende Submetrie ist, und man in eine *horizontal*e Richtung mit einer Geodätischen losläuft, man immer *horizontal* bleibt. Dies ist im wesentlichen eine Aussage über Fokalpunkte von $C^{1,1}$-Untermannigfaltigkeiten. Da wir keine passende Referenz gefunden haben, beweisen wir dies mit Hilfe von Quasigeodätischen, obwohl das einem Kanonenschuß auf Spatzen gleicht.

Definition 12.2. Sei Σ ein Alexandrov-Raum mit Krümmung ≥ 1. Punkte $x, y \in \Sigma$ heißen polar, wenn in Σ gilt: $d_x + d_y \leq \pi$.

Bemerkung 12.1. Hat x in Σ einen Antipoden y, so ist y natürlich der einzige polare Punkt von x. Im allgemeinen sind polare Punkte nicht eindeutig definiert (in einem Raum mit diam $\leq \frac{\pi}{2}$ sind je zwei Punkte polar), aber jeder Punkt besitzt einen polaren Punkt (vgl.[PP94b]).

Bemerkung 12.2. Man sollte polare Punkte nicht mit der polaren Teilmenge verwechseln.

Petrunin hat Quasigeodätische als raffinierte Verallgemeinerungen von Geodätischen in Alexandrov-Räumen definiert. Und zwar sind es nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven, die gewissen Konvexitätsbedingngen genügen. Wir werden die komplizierte Definition nicht wiederholen und nur einige Resultate aus [PP94b] angeben, die wir benötigen.

Wir werden folgende Resultate benutzen:

Fakt 12.15. *Eine Lipschitzkurve ist genau dann eine Quasigeodätische, wenn sie lokal um jeden Punkt eine Quasigeodätische ist. Jede Quasigeodätische von einem offenen oder abgeschlossenenen Intervall, läßt sich zu einer auf ganz R definierten Quasigeodätischen ausdehnen. In jede Richtung $v \in \Sigma_x X$ läuft eine Quasigeodätische.*

Fakt 12.16. *Quasigeodätische bilden eine abgeschlossenen Menge, i.e. ein punktweiser Limes einer Folge von Quasigeodätischen ist eine Quasigeodätische und die Längen vertauschen mit dem Limes.*

Fakt 12.17. *Seien γ_1 und γ_2 zwei Quasigeodätische, die von einem Punkt x ausgehen. Die Zusammensetzung von γ_1 und γ_2 ist genau dann eine Quasigeodätische, wenn die Anfangsrichtungen von γ_1 und γ_2 polar in $\Sigma_x\Sigma$ sind.*

Fakt 12.18. *Läuft in Richtung $v \in \Sigma_x X$ eine Kürzeste η der Länge r, so stimmt jede Quasigeodätische in Richtung v auf dem Anfangsstück der Länge r mit η überein.*

Bemerkung 12.3. Quasigeodätische sind enorm wichtig, weil der Vergleichssatz von Toponogov sich auf sie übertragen läßt. Dieses grundlegende Resultat wird für uns jedoch keine Rolle spielen.

Sei nun $f : S^n \to B$ eine Submetrie. Dann ergibt sich aus Fakt 12.18 und Proposition 12.11:

PROPOSITION 12.19. *Jede Quasigeodätische in B besteht aus einer Zusammensetzung von Kürzesten. Genauer gilt: Sei $\gamma : [0, \infty) \to B$*

eine Quasigeodätische. Sei $t_0 = 0$ *und sei für* $i \geq 1$ *die Zahl* $t_i \in [0, \infty]$ *maximal gewählt, s.d.* $\gamma[t_{i-1}, t_i]$ *eine Kürzeste ist. Dann ist* t_i *wohldefiniert und mit* $i \to \infty$ *laüft* t_i *auch gegen* ∞. *Insbesondere besteht jede endliche Quasigeodätische (auch offene!) aus endlich vielen Kürzesten.*

Wieder Mal ein triviales

Lemma 12.20. *Sei* Σ *ein Raum mit Krümmung* ≥ 1, $f : \Sigma \to S$ *eine Submetrie. Sind* x_1 *und* x_2 *polare Punkte in* Σ *(vgl. Definition 12.2), so sind auch ihre Bilder* $f(x_1), f(x_2)$ *in* S *polar. Insbesondere sind Bilder von antipodalen Punkten immer polar.*

Definition 12.3. Wir nennen eine offene Geodätische γ in M *horizontal*, wenn in jedem Punkt t die Ein- und Ausgangsrichtungen γ_t^- und γ_t^+ *horizontal* sind.

Lemma 12.21. *Sei* $\gamma : (0, a) \to M$ *eine* horizontal*e Geodätische. Dann ist ihr Bild* $f(\gamma)$ *eine Quasigeodätische in* B.

Beweis. Ist x auf γ beliebig, so sind wegen Proposition 12.11 ein kurzes Ein- und Ausgangsstück von γ in x *horizontal*e Kürzeste. Da wegen Lemma 12.21 die Richtungen $Df_x(\gamma^+)$ und $Df_x(\gamma^-)$ in $\Sigma_y B$ polar sind, folgt jetzt die Behauptung aus Fakt 12.17. □

Jetzt können wir endlich beweisen

PROPOSITION 12.22. *Sei* $f : S^n \to B$ *eine spaltende Submetrie,* h *eine* horizontal*e Richtung. Dann ist die ganze Geodätische* $\gamma : [0, \infty)$ *in Richtung* h horizontal. *Jedes endliche Segment von* γ *ist eine Zusammensetzung aus endlich vielen* horizontal*en Kürzesten.*

Beweis. Wir nehmen die größte Zahl t_1, s.d. $\gamma[0, t_1]$ eine *horizontal*e Kürzeste ist. Die Richtung γ^+ in $\gamma(t_1)$ ist *horizontal*, weil f spaltend ist, und wir können induktiv t_n so maximal wählen, daß $\gamma[t_{i-1}, t_i]$ eine *horizontal*e Kürzeste ist. Wir müssen nur ausschließen, daß die Zahlen t_n gegen eine endliche Zahl t konvergieren. Im Fall einer solchen Konvergenz, wäre aber die Geodätische $\gamma(0, t)$ *horizontal* und ihr Bild $f(\gamma)$ wäre eine endliche Quasigeodätische, die nicht aus endlich vielen Kürzesten besteht. Wir erhielten einen Widerspruh zu Proposition 12.19. □

13. Ausblick

In diesem Abschnitt stellen wir Resultate zusammen, die für Submetrien von Mannigfaltigkeiten gelten. Sei also M eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit (es reicht vorauszusetzen, daß M nur von beiden seiten beschränkte Krümmung hat), $f : M \to B$ eine Submetrie.

PROPOSITION 13.1. *B ist ein Alexandrov-Raum. Es gibt eine kanonische disjunkte Zerlegung $B = B_0 \cup B_1 ... \cup B_k$ in Strata. Jede Einschränkung $f : f^{-1}(B_l) \to B_l$ ist ein lokales Faserbündel. Jedes B_l ist eine $C^{1,1}$-Mannigfaltigkeit, im Raum B lokalkonvex und die Metrik auf B_l ist durch eine Riemannsche Lipschitzstetige Metrik gegeben. Das Stratum B_k der maximalen Dimension ist offen überall dicht und totalkonvex. Die Einschränkung $f : f^{-1}(B_k) \to B_k$ ist eine Riemannsche $C^{1,1}$-Submersion.*

Bemerkung 13.1. Es scheint möglich zu sein, zu beweisen, daß jedes Stratum B_l lokal von beiden seiten beschränkte Krümmung hat. Dazu ist es notwendig eine $C^{1,1}$-O'Neill-Formel zu zeigen. Wir haben die Argumente noch nicht überprüft.

PROPOSITION 13.2. *Ist $f : M \to B$ eine Submetrie, so ist jede Faser eine Menge positiver Reichweite.*

PROPOSITION 13.3. *Die Submetrie ist spaltend genau dann, wenn jede Faser eine $C^{1,1}$-Untermannigfaltigkeit ist. In diesem Fall ist jede wohldefinierte Holonomie ein Lipschitz-Faserbündel.*

PROPOSITION 13.4. *Ist f eine spaltende Submetrie, so ist auch jedes Differential eine spaltende Submetrie.*

PROPOSITION 13.5. *Ist jede reguläre Faser eine C^2-Untermannigfaltigkeit, so ist die Submetrie spaltend. Ist jede reguläre Faser C^k, so ist jede Faser C^{k-1} und f ist über der Menge der regulären Punkte eine Riemannsche C^k-Submersion.*

PROPOSITION 13.6. *Sei M der euklidische Raum oder die euklidische Sphäre, $f : M \to B$ eine spaltende Submetrie. Dann ist jede Faser eine C^∞-Untermannigfaltigkeit. Jede reguläre Faser ist isoparametrisch.*

Und schließlich:

PROPOSITION 13.7. *Spaltende zusammenhängende Submetrien $f : S^n \to B$, für die die Menge der regulären Punkte konstante Krümmung 1 hat, entsprechen eineindeutig isoperimetrischen Faserungen von S^n.*

Literatur

[Ban82] V. Bangert. Sets with positive reach. *Arch.Math.(Basel)*, 38(1):54–57, 1982.

[Ber87] V. Berestovskii. Submetries of three-dimensional forms of nonnegative curvature. *Sibirsk.Mat.Zh.*, 28(4):44–56, 1987.

[Ber88] V. Berestovskii. Homogeneous spaces with an intrinsic metric. *Dokl.Akad.Nauk.SSSR*, 301(2):268–271, 1988.

[BG00] V. Berestovskii and L. Guijarro. A metric characterization of Riemannian submersions. *Ann. Global Anal. Geom.*, 18(2):251–257, 2000.

[BGP92] Y. Burago, M. Gromov, and G. Perelmann. A.D.Alexandrov spaces with curvatures bounded below. *Russian Math. Surveys*, 47(2):1–58, 1992.

[Fed59] H. Federer. Curvature measures. *Trans.Amer.Math.Soc.*, 93:418–491, 1959.

[Fuk88] K. Fukaya. A boundary of the set of the Riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters. *J.Differential Geom*, 28(1):1–21, 1988.

[FY94] K. Fukaja and T. Yamaguchi. Isometry groups of singular spaces. *Math.Z*, 216(1):31–44, 1994.

[GG87] D. Gromoll and K. Grove. A generalization of Berger's rigidity theorem for positively curved manifolds. *Ann.Sci.Ecole Norm.Sup.*, 20(2):227–239, 1987.

[GG88] D. Gromoll and K. Grove. The low-dimensional metric foliations of Euclidean spheres. *J.Differential Geom.*, 28:143–156, 1988.

[GK95] L. Guijarro and V. Kapovitch. Restrictions on the geometry at infinity of nonnegatively curved manifolds. *Duke Math.J*, 78(2):257–276, 1995.

[GP91] K. Grove and P. Petersen. Manifolds near the boundary of existence. *J.Differential Geom.*, 33(2):379–394, 1991.

[GP93] K. Grove and P. Petersen. A radius sphere theorem. *Invent.Math*, 112(3):577–583, 1993.

[GW97] D. Gromoll and G. Walschap. Metric fibrations in Euclidean space. *Asian J. Math.*, 1(4):716–728, 1997.

[Heb81] J. Hebda. The regular focal locus. *J.Differential Geom*, 1981.

[HL85] A. Hurd and P. Loeb. *An introduction to nonstandard analysis.* Pure and Applied Mathematics, 1985.

[HW41] W. Hurewicz and H. Wallman. *Dimension theory.* Princton Mathematical Series, 1941.

[KL97] B. Kleiner and B. Leeb. Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math*, 86:115–197, 1997.

[Kle80] N. Kleinjohann. Convexity and the unique point property in Riemannian geometry. *Arch.Math.(Basel)*, 35(6):574–582, 1980.

[LS97] U. Lang and V. Schroeder. Kirszbraun's theorem and metric spaces of bounded curvature. *Geom.Funct.Anal*, 7(3):535–560, 1997.

[OS94] Y. Otsu and T. Shioya. The Riemannian structure of Alexandrov spaces. *J.Differential Geom.*, 39(3):629–658, 1994.

[Per91] G. Perelman. Alexandrov spaces with curvatures bounded below. Preprint, 1991.

[Per94] G. Perelman. Elements of Morse theory on Alexandrov spaces. *St.Petersburg Math J.*, 5(1):207–214, 1994.

[Pet98] A. Petrunin. Parallel transportation for Alexandrov space with curvature bounded below. *Geom.Funct.Anal.*, 8:123–148, 1998.

[PP94a] G. Perelman and A. Petrunin. Extremal subsets in Alexandrov spaces and the generalized Liberman theorem. *St.Petersburg Math J.*, 5(1):215–227, 1994.

[PP94b] G. Perelman and A. Petrunin. Quasigeodesics and gradient curves in Alexandrov spaces. Preprint, 1994.

[Shi94] T. Shioya. Mass of rays in Alexandrov spaces of nonnegative curvature. *Comment.Math.Helv.*, 69(2):208–228, 1994.

[Thu78] W. Thurston. *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*. Princton Lecture Notes, 1978.

[Wal94] G. Walschap. Soul-preserving submersions. *Michigan Math.J.*, 41(3):609–617, 1994.

[Yam91] T. Yamaguchi. Collapsing and pinching under a lower curvature bound. *Ann. of Math.*, 113(2):317–357, 1991.