

09.09.2011

## Vorkurs Mathematik (WS 2011/2012)

5. Übungsblatt

Dr. Matjaž Erat, Dr. Anton Mellit

Besprechung am 12.09.2011 in der Übung

Alle Informationen zum Vorkurs finden Sie auf:

<http://www.mi.uni-koeln.de/~anmellit/vorkurs/>

---

**Aufgabe 1.** Auf der Ebene liegen  $n$  verschiedene Geraden. Keine zwei Geraden sind parallel zueinander und keine drei schneiden sich in einem Punkt. Zeigen Sie per Induktion, dass die Anzahl der Schnittpunkte gleich  $\frac{n(n-1)}{2}$  ist. In wieviel Teile zerlegen die Geraden die Ebene?

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie die folgende Identität:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Aufgabe 3.** Die Ebene wird durch endlich viele Geraden in Teilen zerlegt. Zeigen Sie, dass die Teile in zwei Farben eingefärbt werden können, so dass angrenzende Teile verschiedene Farben haben.

**Aufgabe 4.** Es sei  $a_1, a_2, \dots$  die Folge definiert durch

$$a_1 = 0,$$

$$a_2 = 1,$$

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n-1} - (1 - \sqrt{2})^{n-1}}{2\sqrt{2}}.$$