

Algebraische Gruppen

Eine Einführung

P. Littelmann, Universität Wuppertal

August 17, 2003

Chapter 1

Einige Beispiele algebraischer Gruppen

Um zu erklären, was eine algebraische Gruppe genau ist, schauen wir uns zunächst ein paar Beispiele an.

1.1 Die Gruppe \mathbb{C}^*

Die Menge der invertierbaren komplexen Zahlen bildet eine Gruppe bezüglich der Multiplikation. Uns interessieren die *rationalen Darstellungen* dieser Gruppe, d.h., die Möglichkeiten, diese Gruppe als Vektorraumautomorphismen (als *Symmetrien*) auf rationale Weise zu realisieren.

Dabei versteht man unter einer *rationalen komplexen endlichdimensionalen Darstellung* der Gruppe \mathbb{C}^* ein Paar (ρ, V) , wobei V ein endlichdimensionaler Vektorraum ist und ρ ist ein Gruppenhomomorphism

$$\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow GL(V)$$

mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine Basis $\mathbb{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, so daß die Matrizen $\rho(z) \in GL(V)$ für $z \in \mathbb{C}^*$ durch Laurentpolynome beschrieben werden können. Genauer gesagt, es gibt Laurentpolynome $f_{i,j}$ in $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$, so daß bezüglich der Basis \mathbb{B} für alle $z \in \mathbb{C}^*$ die Matrix $\rho(z)$ von der Form ist:

$$\rho(z) = \begin{pmatrix} f_{1,1}(z) & f_{1,2}(z) & \dots & f_{1,n}(z) \\ f_{2,1}(z) & f_{2,2}(z) & \dots & f_{2,n}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n,1}(z) & f_{n,2}(z) & \dots & f_{n,n}(z) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Diese Begingung ist in der Tat unabhängig von der Wahl der Basis, denn:

Übung 1.1.1 Zeige: Existiert eine Basis von V , so daß die Matrizen $\rho(z)$ durch Laurentpolynome beschrieben werden können, so können die Matrizen für jede Basis von V durch Laurentpolynome beschrieben werden.

Ist eine endlichdimensionale rationale Darstellung gegeben, so möchte man gerne die darstellenden Matrizen in möglichst einfacher Gestalt haben.

Satz 1.1.1 Ist $\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow GL(V)$ eine endlichdimensionale rationale Darstellung, so gibt es eine Basis von V und $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, so daß die darstellenden Matrizen von der Form sind:

$$\rho(z) = \begin{pmatrix} z^{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{k_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & z^{k_n} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die oben angegebenen Darstellungen sind offensichtlich alle rationale Darstellungen. Sei nun umgekehrt $\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow GL(V)$ eine beliebige endlichdimensionale rationale Darstellung und sei $\mathbb{C}_{\text{fin}}^*$ die Untergruppe von \mathbb{C}^* der komplexen Zahlen endlicher Ordnung. Da zum Beispiel alle Zahlen der Form $e^{2\pi i/n}$, $n \in \mathbb{N}$, in $\mathbb{C}_{\text{fin}}^*$ liegen, enthält diese Untergruppen unendlich viele Elemente.

Wie man an der Jordannormalenform einer Matrix A leicht sieht, folgt aus $A^k = Id$ für ein $k \in \mathbb{N}$, daß A diagonalisierbar ist. Die Matrizen $\rho(z)$, $z \in \mathbb{C}_{\text{fin}}^*$, bilden somit eine Menge von kommutierenden diagonalisierbaren Matrizen. Es gibt also eine Basis von V , so alle $\rho(z)$, $z \in \mathbb{C}_{\text{fin}}^*$, gleichzeitig auf Diagonalgestalt werden können.

Ohne Einschränkung kann man (mit Hilfe von Übung 1.1.1) also bereits annehmen, daß die Matrizen $\rho(z)$, $z \in \mathbb{C}_{\text{fin}}^*$, Diagonalgestalt haben. Folglich gilt für die Laurentpolynome $f_{i,j}$:

$$\forall i \neq j : f_{i,j}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}_{\text{fin}}^*.$$

Da ein Laurentpolynom nur endlich viele Nullstellen in \mathbb{C}^* hat, aber $\mathbb{C}_{\text{fin}}^*$ eine Menge mit unendlich vielen Elementen ist, ist dies nur möglich falls $f_{i,j} = 0$ für all $i \neq j$. Die $\rho(z)$ haben also Diagonalgestalt für alle $z \in \mathbb{C}^*$.

Es bleibt die Form der Laurentpolynome $f_{i,i}$ zu untersuchen. Da ρ ein Gruppenhomomorphismus ist, folgt, daß die $f_{i,i} \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, $1 \leq i \leq n$, Gruppenhomomorphismen sind:

$$f_{i,i} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*.$$

Insbesondere gilt: $f_{i,i}(z) \cdot f_{i,i}(z^{-1}) = 1$. Ist $f(z) = \sum_{j=m'}^m a_j z^j$ ein Laurentpolynom mit $m' \leq m$, so ist

$$f(z) \cdot f(z^{-1}) = \left(\sum_{j=m'}^m a_j z^j \right) \left(\sum_{\ell=m'}^m a_\ell z^{-\ell} \right) = \sum_{k=(m'-m)}^{(m-m')} \left(\sum_{j-\ell=k} a_j a_\ell \right) z^k$$

Ist $m \neq m'$, so sind die Koeffizienten von $z^{(m'-m)}$ und $z^{(m-m')}$ verschieden von 0. Die Laurentpolynome, die Gruppenhomomorphismen sind, sind also alle von der Form az^k mit $a \in \mathbb{C}^*$ und $k \in \mathbb{N}$. Da $f_{i,i}(1) = 1$, folgt $a = 1$ und somit sind die $f_{i,i}$ von der Form $f_{i,i}(z) = z^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. •

Definition 1.1.1 Eine *rationale komplexe Darstellung* der Gruppe \mathbb{C}^* ist ein Paar (V, ρ) , wobei V ein \mathbb{C} -Vektorraum ist und $\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow GL(V)$ ein Gruppenhomomorphismus ist, mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $v \in V$ gibt es einen endlichdimensionalen Unterraum $U \subset V$ mit $v \in U$ und $\rho(z)(U) \subset U$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$, und die Einschränkung der Darstellung: $\rho|_U : \mathbb{C}^* \rightarrow GL(U)$, $z \mapsto \rho(z)|_U$, ist eine rationale komplexe endlichdimensionale Darstellung.

Beispiel 1.1.1 Sei ρ die rationale Darstellung von \mathbb{C}^* auf dem \mathbb{C}^2 gegeben durch

$$\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow GL(\mathbb{C}^2), \quad z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Sei $\mathbb{C}[x, y]$ der Ring der Polynome in 2 Variablen. Wir interpretieren die Polynome als Funktionen auf dem \mathbb{C}^2 : Für

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} x^i y^j \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{sei} \quad f(v) := \sum_{i,j=1}^m c_{i,j} a^i b^j.$$

Wir definieren eine Darstellung $\rho^* : \mathbb{C}^* \rightarrow GL(\mathbb{C}[x, y])$ wie folgt: Für $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ und $z \in \mathbb{C}^*$ sei $\rho^*(z)(f)$ die Funktion definiert durch:

$$(\rho^*(z)(f))(v) := f((\rho(z^{-1}))(v)). \quad (1.3)$$

Diese Darstellung ist rational: Für ein Monom $x^k y^m$ gilt

$$\rho^*(z)(x^k y^m) = z^{(m-k)} x^k y^m$$

Da die Monome $x^k y^m$, $k, m \in \mathbb{N}$ eine Basis bilden, liegt somit offensichtlich jedes Element in einem endlichdimensionalen Unterraum von $\mathbb{C}[x, y]$, der stabil ist unter $\rho(\mathbb{C}^*)$, und die Einschränkung der Darstellung auf diesen Unterraum ist rational.

Übung 1.1.2 Sei G eine beliebige Gruppe, sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine komplexe endlichdimensionale Darstellung und sei $\mathbb{C}[V]$ der Ring der Polynome auf V . Zeige: ρ^* definiert (wie in (1.3)) eine Darstellung:

$$\rho^* : G \rightarrow GL(\mathbb{C}[V]), \quad g \rightarrow \rho^*(g) : \begin{cases} \mathbb{C}[V] \rightarrow \mathbb{C}[V] \\ f \rightarrow \rho^*(g)(f) : V \rightarrow \mathbb{C} \\ v \mapsto f(\rho(g)^{-1}(v)). \end{cases}$$

Zeige, daß die Darstellung *lokal endlich* ist, d.h., zu jedem Polynom p in $\mathbb{C}[V]$ gibt es einen endlichdimensionalen Unterraum $U \subset \mathbb{C}[V]$ mit $p \in U$ und $\rho^*(g)(u) \in U$ für alle $u \in U$. Hinweis: Zeige zunächst, daß der Unterraum $\mathbb{C}[V]_m$ der homogenen Polynome vom Grad m stabil ist unter G , d.h., $\rho^*(g)(p) \in \mathbb{C}[V]_m$ für alle $p \in \mathbb{C}[V]_m$.

Übung 1.1.3 Sei $\rho : \mathbb{C}^* \rightarrow GL(V)$ eine endlichdimensionale rationale komplexe Darstellung. Dann ist die oben definierte Darstellung (Übung 1.1.2) auf dem Polynomring $\mathbb{C}[V]$ eine rationale komplexe Darstellung.

1.2 Invarianten mehrerer Vektoren

Sei $V = \mathbb{C}^2$ der zweidimensionale komplexe Vektorraum und sei G die Gruppe $G = GL_2(\mathbb{C})$ der invertierbaren 2×2 Matrizen. Die Gruppe operiert in der üblichen Weise auf V :

$$gv = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \text{ für } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}), \quad v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Betrachte die folgende Äquivalenzrelation auf $V \oplus V$:

$$(u_1, u_2) \sim (w_1, w_2) \Leftrightarrow \exists g \in SL_2(\mathbb{C}) : gu_i = w_i, \quad i = 1, 2.$$

Sei $u_i = \begin{pmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, dann ist die Abbildung:

$$\pi : V \oplus V \rightarrow \mathbb{C}, \quad (u_1, u_2) \mapsto \det(u_1, u_2) := \det \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix}$$

konstant auf den Äquivalenzklassen. Im Folgenden schreiben wir die Paare von Vektoren als Matrizen. Man erhält als Normalformen für die Äquivalenzklassen:

- i) Ist $\lambda = \det(u_1, u_2) \neq 0$, so ist $(u_1, u_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, in diesem Fall entspricht also die Faser der Abbildung π über λ genau einer Äquivalenzklasse.
- ii) Ist $\lambda = \det(u_1, u_2) = 0$, so liegen unendlich viele Äquivalenzklassen in der Faser der Abbildung. Repräsentanten der Klassen sind

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und die Familie } \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } a \in \mathbb{C}.$$

Beachte,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \epsilon a & \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } 0 < \epsilon \ll 1 \quad (1.4)$$

diese Äquivalenzklassen enthalten also in ihrem Abschluß die Nullmatrix.

Satz 1.2.1 *Jede polynomiale (stetige) Funktion F auf $V \oplus V$, die konstant ist auf den Äquivalenzklassen, ist ein Polynom (stetige Funktion) in \det , d.h., sie ist von der Form $F = f \circ \pi$, wobei f eine polynomiale (stetige) Funktion in einer Variablen ist.*

Beweis. Sei $F : V \oplus V \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf den Äquivalenzklassen konstante stetige Funktion. Sei $i : \mathbb{C} \rightarrow V \oplus V$ die Abbildung $\lambda \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, und betrachte die Abbildung: $\tilde{f} := F \circ i \circ \pi$. Ist $\det(u_1, u_2) \neq 0$, so liegen die Paare von Vektoren (u_1, u_2) und $i \circ \det(u_1, u_2)$ in der gleichen Äquivalenzklasse, und somit gilt $\tilde{f}(u_1, u_2) = F(u_1, u_2)$. Ist $\det(u_1, u_2) = 0$, so folgt aus (1.4) wegen der Stetigkeit: $F(u_1, u_2) = F(0, 0)$, und somit $\tilde{f}(u_1, u_2) = F(u_1, u_2)$ auch in diesem Fall. Setze nun $f := F \circ i$. •

In der Sprache der universellen Eigenschaften ausgedrückt kann man den Satz 1.2.1 wie folgt umschreiben:

$$\begin{array}{ccc} \pi : V \oplus V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & F \searrow & \swarrow f \\ & & \mathbb{C} \end{array} \quad (1.5)$$

Die Abbildung $\pi : V \oplus V \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine surjektive Abbildung mit der Eigenschaft, daß es zu jeder stetigen Funktion F , die konstant ist auf den Äquivalenzklassen, eine stetige Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $F = f \circ \pi$.

Da jede stetige Funktion der Form $f \circ \pi$ konstant ist auf den Äquivalenzklassen, kann man diese Eigenschaft wie folgt ausdrücken: Das Paar (π, \mathbb{C}) , genannt der *kategorische Quotient*, hat die folgenden Eigenschaften: Die Abbildung $\pi : V \oplus V \rightarrow \mathbb{C}$ ist *surjektiv*, und die Abbildung $\mathbb{C}[\mathbb{C}] \rightarrow \mathbb{C}[V \oplus V]$, $p \rightarrow p \circ \pi$, induziert einen *Isomorphismus* zwischen den *Polynomen* auf \mathbb{C} und den *Polynomen* auf $V \oplus V$, die *konstant sind auf den Äquivalenzklassen*.

Übung 1.2.1 Sei $W = V \oplus V \oplus V$, und sei \sim die folgende Äquivalenzrelation:

$$(u_1, u_2, u_3) \sim (w_1, w_2, w_3) \Leftrightarrow \exists g \in SL_2(\mathbb{C}) : gu_i = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Äquivalenzklassen sind also genau die Bahnen der Aktion

$$SL_2(\mathbb{C}) \times W \longrightarrow W, \quad (g, (u_1, u_2, u_3)) \mapsto (gu_1, gu_2, gu_3)$$

Sei $u_i = \begin{pmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, 3$, und sei π die Abbildung:

$$\pi : W \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad (u_1, u_2, u_3) \mapsto \begin{pmatrix} \det(u_1, u_2) \\ \det(u_1, u_3) \\ \det(u_2, u_3) \end{pmatrix}$$

Zeige: Das Paar (π, \mathbb{C}^3) ist ein kategorischer Quotient, d.h., π ist surjektiv, und Abbildung $\mathbb{C}[\mathbb{C}^3] \rightarrow \mathbb{C}[W]$, $p \rightarrow p \circ \pi$, induziert einen *Isomorphismus* zwischen den *Polynomen* auf \mathbb{C}^3 und den *Polynomen* auf W , die konstant sind auf den Äquivalenzklassen.

1.3 Einige Darstellungen der Gruppe $SL_2(\mathbb{C})$

Sei $SL_2(\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren 2×2 -Matrizen $g \in GL_2(\mathbb{C})$ mit Determinante $\det g = 1$. Eine *rationale komplexe endlichdimensionalen Darstellung* der Gruppe $SL_2(\mathbb{C})$ ist ein Paar (ρ, V) , wobei V ein endlichdimensionaler Vektorraum ist und ρ ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\rho : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V)$$

mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine Basis $\mathbb{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, so daß die Matrizen $\rho(g) \in GL(V)$ für $g \in SL_2(\mathbb{C})$ durch Polynome aus $\mathbb{C}[M_2]$ beschrieben werden. Genauer gesagt, es gibt Polynome $f_{i,j} \in \mathbb{C}[x_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$,

so daß bezüglich der Basis \mathbb{B} für alle $g \in SL_2(\mathbb{C})$ die Matrix $\rho(g)$ von der Form ist:

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} f_{1,1}(g) & f_{1,2}(g) & \cdots & f_{1,n}(g) \\ f_{2,1}(g) & f_{2,2}(g) & \cdots & f_{2,n}(g) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n,1}(g) & f_{n,2}(g) & \cdots & f_{n,n}(g) \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Eine beliebige Darstellung der Gruppe $SL_2(\mathbb{C})$ nennt man *lokal endlich*, wenn es zu jedem $v \in V$ einen endlichdimensionalen Unterraum $U \subset V$ gibt mit $v \in U$ und $\rho(g)(U) \subset U$ für alle $g \in SL_2(\mathbb{C})$.

Wie im Fall der Gruppe \mathbb{C}^* nennt man eine komplexe Darstellung der Gruppe $SL_2(\mathbb{C})$ *rational*, wenn sie lokal endlich ist, und die Einschränkung der Darstellung: $\rho|_U : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(U)$, $g \mapsto \rho(g)|_U$, auf endlichdimensionale stabile Unterräume jeweils rationale komplexe endlichdimensionale Darstellungen sind.

Beispiel 1.3.1 Die *natürliche Darstellung* $\rho : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$, $g \mapsto g$, auf dem \mathbb{C}^2 ist eine rationale Darstellung.

Beispiel 1.3.2 Die *duale Darstellung* $\rho^* : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$, $g \mapsto {}^t g^{-1}$, ist eine rationale Darstellung.

Übung 1.3.1 Zeige: Die Darstellung in Beispiel 1.3.2 ist rational.

Bemerkung 1.3.1 Um den Namen *duale Darstellung* zu verstehen, machen wir folgende Identifikation. Sei $\rho : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung, und sei $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ der Dualraum der linearen Funktionen auf V . Aus Übung 1.1.2 folgt, daß ρ^* , definiert durch

$$\rho^* : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V^*), \quad g \mapsto \rho^*(g) : \begin{cases} V^* \rightarrow V^* \\ \ell \rightarrow \rho^*(g)(\ell) : V \rightarrow \mathbb{C} \\ v \mapsto \ell(\rho(g)^{-1}(v)). \end{cases}$$

eine Darstellung definiert, genannt die *duale Darstellung*. Es ist es die Einschränkung der Darstellung in Übung 1.1.2 auf die linearen Funktionen.

Sei nun $\{e_1, e_2\}$ die kanonische Basis von $V = \mathbb{C}^2$ und sei $\{x_1, x_2\}$ die duale Basis. Ist $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$, so ist $g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ und damit:

$$\rho^*(g)(x_1)(e_1) = x_1 \left(\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = d$$

und ebenso: $\rho^*(g)(x_1)(e_2) = -b$, $\rho^*(g)(x_2)(e_1) = -c$, $\rho^*(g)(x_2)(e_2) = a$.
Folglich: $\rho^*(g)(x_1) = dx_1 - bx_2$ und $\rho^*(g)(x_2) = -cx_1 + ax_2$. Das heißt,
bezüglich der Basis $\{x_1, x_2\}$ hat die darstellende Matrix $\rho^*(g)$ die Gestalt:

$$\rho^*(g) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = {}^t g^{-1}.$$

Damit folgt aus Übung 1.3.1, daß die duale Darstellung rational ist.

Wir wollen nun die Darstellung aus Übung 1.1.2 in diesem Fall etwas genauer anschauen. Sei $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ der Ring der polynomialen Funktionen auf dem \mathbb{C}^2 , versehen mit der üblichen Graduierung durch den Grad der Polynome:

$$\mathbb{C}[x_1, x_2] = \bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}[x_1, x_2]_m \text{ mit } \mathbb{C}[x_1, x_2]_m = \langle x_1^m, x_1^{m-1}x_2, x_1^{m-2}x_2^2, \dots, x_2^m \rangle.$$

Aus Übung 1.1.2 folgt, daß die homogenen Polynome $\mathbb{C}[x_1, x_2]_m$ vom Grad m einen stabilen Unterraum für die Darstellung ρ^* bilden. Die Einschränkung der Darstellung der $SL_2(\mathbb{C})$ auf dem Raum $\mathbb{C}[x_1, x_2]_m$ wird mit

$$\rho_m : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(\mathbb{C}[x_1, x_2]_m)$$

bezeichnet. Sei $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}[x_1, x_2]_m$ die Basis $\{x_1^m, x_1^{m-1}x_2, \dots, x_2^m\}$:

Übung 1.3.2 Berechne die Matrizen $\rho_m(\underline{t})$, $\rho_m(\underline{u}^+)$, $\rho_m(\underline{u}^-)$ für die Elemente

$$\underline{t} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{u}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \underline{u}^+ = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis \mathbb{B} .

Wir betrachten die Darstellungen $\rho_m : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(\mathbb{C}[x_1, x_2]_m)$ etwas genauer. Sei $U \subset \mathbb{C}[x_1, x_2]_m$ ein Unterraum, der stabil ist unter der $SL_2(\mathbb{C})$, d.h., $\rho_m(g)(u) \in U$ für alle $u \in U$.

Übung 1.3.3 Zeige: Ist $u = \sum_{j=0}^m p_j x_1^{m-j} x_2^j \in U$, so liegt jedes Monom $x_1^{m-j} x_2^j$ mit $p_j \neq 0$ auch in U . Hinweis: Benütze die Matrizen $\rho_m(\underline{t})$.

Ist $U \neq 0$, so liegt also mindestens ein Monom $x_1^{m-j} x_2^j$ in U . Indem man die Matrizen $\rho_m(\underline{u}^\pm)$ benützt, zeigt man leicht:

Übung 1.3.4 Zeige: Ist $U \neq 0$, so ist $U = \mathbb{C}[x_1, x_2]_m$.

Eine Darstellung, die als einzige stabile Unterräume nur sich selbst und 0 hat, nennt man *einfach* oder auch *irreduzibel*.

1.4 Die allgemeine lineare Gruppe GL_n

Sei zunächst k ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper, und sei $M_n(k)$ die Menge der $n \times n$ -Matrizen, und sei $GL_n(k)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen:

$$GL_n(k) = \{A \in M_n(k) \mid \det A \neq 0\}.$$

Im Folgenden werden wir einige wichtige Untergruppen einführen, die später immer wieder auftauchen werden. Solange keine Mißverständnisse möglich sind, werden wir den Körper k in den Bezeichnungen nicht mehr anführen und nur noch M_n , GL_n usw. schreiben.

Das Standardbeispiel für eine *Boreluntergruppe* (genaue Definition einer Boreluntergruppe folgt später) ist die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen:

$$\begin{aligned} B_n &= \{(a_{i,j}) \in GL_n \mid a_{i,j} = 0 \forall i > j\} \quad \text{obere } \Delta\text{-Matrizen} \\ &= \left\{g \in GL_n \mid g = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Verlangt man zusätzlich, daß die Eigenwerte alle 1 sind, so bekommen wir die Gruppe U_n :

$$\begin{aligned} U_n &= \{(a_{i,j}) \in B_n \mid a_{i,i} = 1 \forall i = 1, \dots, n\} \quad \text{unipotente } \Delta\text{-Matrizen} \\ &= \left\{g \in GL_n \mid g = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Eine andere wichtige Untergruppe ist die der Diagonalmatrizen, ein Beispiel für einen *maximalen Torus*. (genaue Definition eines Torus folgt später)

$$\begin{aligned} T_n &= \{(a_{i,j}) \in B_n \mid a_{i,j} = 0 \forall i \neq j\} \quad \text{Diagonalmatrizen} \\ &= \left\{g \in M_n \mid g = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, * \neq 0\right\} \end{aligned}$$

Für die Elemente $\underline{t} \in T_n$ werden wir die folgende Abkürzung benutzen:

$$\underline{t} = \text{diag}(t_1, \dots, t_n) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t_n \end{pmatrix}.$$

Übung 1.4.1 $U_n \subset B_n$ ist ein Normalteiler, und $B_n = T_n U_n = U_n T_n$.

Warum diese Untergruppen eine wichtige Rolle spielen werden, sieht man an den folgenden Beispielen (in Form von Übungen), die wir später in größerer Allgemeinheit ausführen werden.

Übung 1.4.2 Sei $k = \mathbb{C}$. Unter einem Torus $T \subset GL_2$ versteht man eine kommutative zusammenhängende Gruppe von diagonalisierbaren Matrizen. Zeige: Es gibt ein $g \in GL_2$ mit $gTg^{-1} \subset T_2$. Die Gruppe T_2 ist also ein maximaler Torus in diesem Sinne.

Übung 1.4.3 Für zwei Teilmengen $A, B \subset GL_2$ sei AB die Menge der Produkte ab mit $a \in A, b \in B$, und sei $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Zeige:

$$GL_2 = B_2 \cup B_2 s B_2$$

1.5 Fahnen

Eine Interpretation der obigen disjunkten Zerlegung kann man wie folgt geben: Eine invertierbare Matrix $A \in M_n$ ist das gleiche wie eine geordnete Basis des k^n , d.h., der erste Basisvektor entspricht dem ersten Spaltenvektor der Matrix, der zweite Basisvektor entspricht dem zweiten Spaltenvektor der Matrix usw. Diese Beziehung kann man abschwächen, indem man statt von Basen von *Fahnen* spricht. Eine Fahne im k^n ist eine Folge von Untervektorräumen:

$$\mathbf{F} : F_0 = \{0\} \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n = k^n$$

mit $\dim F_i = i$. Bezeichne mit \mathcal{F} die Menge aller Fahnen im k^n .

Ist $g \in GL_n$ und $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$ eine Fahne, so bezeichne mit $g\mathbf{F}$ die Fahne

$$g\mathbf{F} : gF_0 = \{0\} \subset gF_1 \subset gF_2 \subset \dots \subset gF_{n-1} \subset gF_n = k^n$$

Dies definiert eine Operation $GL_n \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

Bezeichne mit $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis des k^n , d.h.,

$$\mathbb{B} = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Als *Standardfahne* \mathbb{F} bezeichnen wir die Fahne

$$\mathbb{F} : \mathbb{F}_0 = \{0\} \subset \mathbb{F}_1 = \langle e_1 \rangle \subset \mathbb{F}_2 = \langle e_1, e_2 \rangle \subset \dots \subset \mathbb{F}_n = k^n.$$

Einer invertierbaren Matrix g kann man nun direkt eine Fahne \mathbf{F}^g zuordnen: $F_0^g = \{0\}$, F_1^g ist der Unterraum, der aufgespannt wird von dem ersten Spaltenvektor der Matrix, F_2^g ist der Unterraum, der aufgespannt wird von den ersten beiden Spaltenvektoren der Matrix, F_3^g ist der Unterraum, der aufgespannt wird von den ersten drei Spaltenvektoren der Matrix und so weiter.

Zum Beispiel für $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ erhält man

$$F_0^g = \{0\} \subset F_1^g = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subset F_2^g = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subset F_3^g = k^3$$

Übung 1.5.1 Zeige: $\mathbf{F}^{gh} = g\mathbf{F}^h$, also insbesondere: $\mathbf{F}^g = g\mathbb{F}$

Übung 1.5.2 Zeige: $\mathbf{F}^g = \mathbb{F} \Leftrightarrow g \in B_n$.

Bemerkung 1.5.1 Sind $g, h \in GL_n$, so daß die erste Spalte von g ein Vielfaches der ersten von h ist, und die zweite Spalte von g ist eine Linearkombination der ersten beiden Spalten von h , und die dritte Spalte von g ist eine Linearkombination der ersten drei Spalten von h usw., dann gilt $\mathbf{F}^g = \mathbf{F}^h$.

Allgemeiner gilt:

Satz 1.5.1 Ist $g \in GL_n$ und ist $b \in B_n$, so gilt $\mathbf{F}^g = \mathbf{F}^{gb}$. Umgekehrt, sind $g, h \in GL_n$ und ist $\mathbf{F}^g = \mathbf{F}^h$, so gibt es ein $b \in B_n$ mit $g = hb$.

Beweis. Ist $b \in B_n$, so unterscheiden sich g und gb genau wie in Bemerkung 1.5.1 beschrieben, also $\mathbf{F}^g = \mathbf{F}^{gb}$. Andererseits, sei $\mathbf{F}^g = \mathbf{F}^h$. Nach Übung 1.5.1 wissen wir dann $\mathbb{F} = \mathbf{F}^{h^{-1}g}$. Aus Übung 1.5.2 folgt somit $h^{-1}g = b$ für ein $b \in B_n$ und damit $g = hb$. •

Anders ausgedrückt besagt der Satz 1.5.1 folgendes: Zwei Matrizen ergeben die gleiche Fahne dann und nur dann wenn sie in der gleichen Nebenklasse in GL_n/B_n liegen. Folglich erhält man:

Korollar 1.5.1 Die Menge aller Fahnen im k^n kann identifiziert werden mit der Menge aller Nebenklassen GL_n/B_n .

Ist $\sigma \in S_n$ eine Permutation, so sei \mathbb{F}^σ die Fahne:

$$\mathbb{F}^\sigma : \mathbb{F}_0^\sigma = \{0\} \subset \mathbb{F}_1^\sigma = \langle e_{\sigma(1)} \rangle \subset \mathbb{F}_2^\sigma = \langle e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)} \rangle \subset \dots \subset \mathbb{F}_n^\sigma = k^n.$$

Die Zerlegung in Übung 1.4.3 läßt sich in der Sprache der Fahnen wie folgt ausdrücken:

Übung 1.5.3 Zeige für $n = 2$: $\mathcal{F} = \mathbb{F} \cup B_2 \mathbb{F}^\sigma$, wobei σ die Transposition $(1, 2)$ ist.

1.6 Einige klassische Gruppen

Im Folgenden zum Abschluß des Kapitels einige klassische Gruppen.

Beispiel 1.6.1 Die *spezielle lineare Gruppe* SL_n und einige ihrer wichtigsten Untergruppen B , U und T :

$$\begin{aligned} SL_n &= \{A \in M_n(k) \mid \det A = 1\} \\ B = SL_n \cap B_n &= \{A = (a_{i,j}) \in SL_n \mid a_{i,j} = 0 \forall i > j\} \\ U = SL_n \cap U_n &= \{A = (a_{i,j}) \in B \mid a_{i,i} = 1 \forall i = 1, \dots, n\} \\ T = SL_n \cap T_n &= \{\underline{t} \in T_n \mid \det \underline{t} = 1\} \end{aligned}$$

Beispiel 1.6.2 Sei $q : k^n \rightarrow k$ eine nicht-ausgeartete quadratische Form. Die *orthogonale Gruppe* $O(q)$ ist definiert als

$$O(q) = \{A \in GL_n \mid q(Ax) = q(x) \forall x \in k^n\}.$$

Für $q = x_1x_n + x_2x_{n-2} + \dots$ sei $J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann werden die *spezielle orthogonale Gruppe* $SO_{n,J}$ und die Untergruppen $B \supset T$ definiert durch

$$\begin{aligned} SO_{n,J} &= \{A \in SL_n \mid {}^t A J A = J\} \\ B = SO_{n,J} \cap B_n \cap SL_n &= \{A = (a_{i,j}) \in SO_{n,J} \mid a_{i,j} = 0 \forall i > j\} \\ U = SO_{n,J} \cap U_n \cap SL_n &= \{A = (a_{i,j}) \in B \mid a_{i,i} = 1 \forall i = 1, \dots, n\} \\ T = SO_{n,J} \cap T_n \cap SL_n &= \{\underline{t} \in T_n \mid \det \underline{t} = 1, t_i = t_{n+1-i}^{-1} \forall i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Ist $k = \mathbb{C}$, dann sind alle nicht-ausgearteten quadratischen Formen zueinander konjugiert und entsprechend auch die (speziellen) orthogonalen Gruppen. Dann spricht man oft einfach nur von “der” (speziellen) orthogonalen Gruppe O_n beziehungsweise SO_n .

Beispiel 1.6.3 Sei $n = 2m$ eine gerade positive Zahl und sei $\varphi : k^n \times k^n \rightarrow k$ eine nicht-ausgeartete schief-symmetrische Bilinearform. Die *symplektische Gruppe* $Sp(q)$ wird definiert als

$$Sp(\varphi) = \{A \in GL_n \mid \varphi(Ax, Ay) = \varphi(x, y) \forall x \in k^n\}.$$

Für $\varphi = \sum_{i=1}^m x_i y_{2m+1-i} - \sum_{i=1}^m x_{2m+1-i} y_i$ sei $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

dann wird die Gruppe $Sp_{2m, J}$ mit ihren Untergruppen B , U und T definiert durch:

$$\begin{aligned} Sp_{2m, J} &= \{A \in GL_n(k) \mid {}^t A J A = J\} \\ B = Sp_{2m} \cap B_n &= \{A = (a_{i,j}) \in Sp_{2m} \mid a_{i,j} = 0 \forall i > j\} \\ T = Sp_{2m} \cap T_n &= \{\underline{t} \in T_{2m} \mid t_i = t_{2m+1-i}^{-1} \forall i = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Ist $k = \mathbb{C}$, dann sind alle nicht-ausgearteten schiefsymmetrischen Formen zueinander konjugiert und entsprechend auch die symplektischen Gruppen, dann spricht man wie im Fall der orthogonalen Gruppe of nur von “der” symplektischen Gruppe.

Zum Abschluß dieses Kapitels einige

Literaturhinweise

Standardbücher über algebraische Gruppen und Darstellungen

BOREL, ARMAND: Linear algebraic groups. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 126. Springer-Verlag, New York, 1991.

HUMPHREYS, JAMES E: Linear algebraic groups. Graduate Texts in Mathematics, No. 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

JANTZEN, JENS CARSTEN: Representations of algebraic groups. Pure and Applied Mathematics, 131. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1987.

SPRINGER, T. A.: Linear algebraic groups. Second edition. Progress in Mathematics, 9. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

Bücher über algebraische Gruppen, Liegruppen, Invariantentheorie etc.

GOODMAN, ROE und WALLACH, NOLAN: Representations and Invariants of the Classical Groups, Encyclopedia of Math 68, Cambridge University Press 1998.

FULTON, WILLIAM und HARRIS, JOE: Representations Theory, Graduate Texts in Math **129**, Springer Verlag, New York 1991.

KRAFT, HANSPETER: Geometrische Methoden in der Invariantentheorie,.

MNEIMNÉ, RACHED und TESTARD, FRÉDÉRIC: Introduction à la théorie des groupes de Lie classique, Hermann, Paris 1997.

VINBERG, ERNEST: Linear Representations of Groups, Basler Lehrbücher, Birkhäuser Verlag, Basel 1989.

WEYL, HERMANN: Classical Groups, Princeton Univ. Press, 1946.

Bücher über Liealgebren und Liegruppen

BOURBAKI, N.: Groupes et Algèbres de Lie, Chapitre I–IX, Hermann, Paris (1968–)

HUMPHREYS, JAMES E.: Introduction to Lie algebras and representation theory. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, (1978).

SERRE, J. P.: Algèbres de Lie semisimples complexes, W. A. Benjamin, inc., New York-Amsterdam (1966) (Englische Version: Complex semisimple Lie algebras, Springer Monographs in Mathematics, Verlag, Berlin 2001).

Notizen von Sommerkursen zu Thema Algebraische Gruppen, Lie Gruppen etc.

Representations of reductive groups. Edited by ROGER W. CARTER and MEINOLF GECK. Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

Lectures on Lie Groups and Lie Algebras. Edited by ROGER W. CARTER, GRAEME SEGAL and IAN MACDONALD. London Mathematical Society, Student Texts **32**, Cambridge, 1995.

Chapter 2

Algebraische Geometrie - Grundlagen

2.1 Affine Varietäten

Im Folgenden sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Unter einer *affinen algebraischen Menge* verstehen wir eine Teilmenge $Y \subset k^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, die definiert wird als Nullstellengebilde von endlich vielen polynomialen Gleichungen. Anders gesagt, es gibt Polynome $f_1, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n]$, so daß

$$Y = \{v \in k^n \mid f_1(v) = \dots = f_r(v) = 0\}$$

Sind Y und X affine algebraische Mengen mit

$$Y = \{v \in k^n \mid f_1(v) = \dots = f_r(v) = 0\}, \quad X = \{v \in k^n \mid g_1(v) = \dots = g_s(v) = 0\}$$

dann sind auch $X \cup Y$ und $X \cap Y$ affine algebraische Mengen mit

$$X \cup Y = \{v \in k^n \mid (f_1 g_1)(v) = (f_1 g_2)(v) = \dots = (f_r g_s)(v) = 0\}$$

und

$$X \cap Y = \{v \in k^n \mid f_1(v) = \dots = f_r(v) = g_1(v) = \dots = g_s(v) = 0\}.$$

Beispiel 2.1.1 $SL_n = \{A \in M_n \mid \det A - 1 = 0\}$ ist eine affine algebraische Menge. Da Untergruppen B , T und U der SL_n durch zusätzliche polynomialen Gleichungen beschrieben werden ($x_{i,j} = 0$ für $i > j$ für B , $x_{i,j} = 0$ für $i > j$ und $x_{i,i} - 1 = 0$, $i = 1, \dots, n$ für U , und $x_{i,j} = 0$ für $i \neq j$ für T), sind dies auch affine algebraische Mengen.

Übung 2.1.1 Begründe: Die Gruppen $SO_{n,J}$ und $Sp_{2m,J}$ sowie ihre Untergruppen B, U, T in den Beispielen 1.6.2 und 1.6.3 sind affine algebraische Mengen.

Seien $Y_1 \subset k^{n_1}$ und $Y_2 \subset k^{n_2}$ affine algebraische Mengen. Ein *Morphismus* affiner algebraischer Mengen $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$ ist eine Abbildung, für die eine polynomiale Abbildung $\tilde{\psi} : k^{n_1} \rightarrow k^{n_2}$ existiert, so daß man ein kommutatives Diagramm hat:

$$\begin{array}{ccc} \psi & : & Y_1 \rightarrow Y_2 \\ & & \bigcap \qquad \qquad \bigcap \\ \tilde{\psi} & : & k^{n_1} \rightarrow k^{n_2} \end{array}$$

Ein Isomorphismus wird dann auf die offensichtliche Art definiert: Ein Morphismus $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$ wird ein *Isomorphismus* genannt, wenn es einen Morphismus $\psi' : Y_2 \rightarrow Y_1$ gibt, so daß $\psi \circ \psi'$ and $\psi' \circ \psi$ jeweils die identische Abbildung ist.

Bemerkung 2.1.1 Achtung, es reicht nicht zu verlangen, daß $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$ ein bijektiver Morphismus, denn die Umkehrabbildung nicht notwendigerweise ein Morphismus.

Übung 2.1.2 Sei $Y = \{v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid x^3 - y^2 = 0\}$. Zeige: Die Abbildung $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2, t \mapsto (t^2, t^3)$, ist ein bijektiver Morphismus von \mathbb{C} auf Y , aber kein Isomorphismus von affinen algebraischen Mengen.

Am Begriff des Isomorphismus wird klar, daß die Beschreibung der Objekte *einzig und allein* durch die Einbettung $Y \subset k^n$ auf die Dauer sehr umständlichen ist. So werden zum Beispiel in der Gruppentheorie die Gruppen $\mathbb{C}^* = GL_1$ und $G \subset GL_2$ definiert durch

$$\begin{aligned} G &= \{t \in M_2(\mathbb{C}) \mid \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{C}^*\} \\ &= \{X = (x_{i,j}) \in M_2(\mathbb{C}) \mid x_{1,2} = x_{2,1} = 0, x_{1,1}x_{2,2} - 1 = 0\}, \end{aligned}$$

als “gleich” angesehen, da \mathbb{C}^* durch die Darstellungsabbildung ρ in (1.2) isomorph (als Gruppe) abgebildet wird auf die Gruppe G (und G ist offensichtlich eine affine algebraische Menge). Dies legt nahe, sich der doch sehr lästigen Abhängigkeit von der Einbettung zu entledigen und eine Beschreibung zu finden, die unabhängig davon ist.

Betrachten wir zunächst einen Morphismus $f : Y \rightarrow k$ für $Y \subset k^n$, so existiert gemäß der Definition ein Polynom $\tilde{f} \in k[x_1, \dots, x_n]$, so daß

$f = \tilde{f}|_Y$. Zwei solche Polynome \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 ergeben den gleichen Morphismus dann und nur dann wenn $\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ auf Y verschwindet. Die Menge $I(Y)$ der auf Y vollständig verschwindenden Polynome bildet ein Ideal, es wird das *Verschwindungsideal* von Y genannt:

$$I(Y) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f|_Y \equiv 0\}.$$

Bemerkung 2.1.2 Da die definierenden Gleichungen von Y in $I(Y)$ liegen, gilt offensichtlich: $Y = \{v \in k^n \mid f(v) = 0 \forall f \in I(Y)\}$.

Der Quotient des Polynomringes $k[x_1, \dots, x_n]$ nach dem Ideal $I(Y)$ beschreibt also genau die Morphismen von Y nach k , oder genauer, die *regulären Funktionen* auf Y .

Definition 2.1.1 Die Algebra $k[x_1, \dots, x_n]/I(Y)$ wird die Algebra der *regulären Funktionen* auf Y oder auch der *Koordinatenring* von Y genannt, und mit $k[Y]$ bezeichnet.

Beispiel 2.1.2 Der Polynomring $k[x_1, \dots, x_n]$ ist die Algebra der regulären Funktionen auf dem k^n .

Wie verhält sich nun diese Algebra unter Morphismen von affinen algebraischen Mengen? Seien $Y_1 \subset k^{n_1}$ und $Y_2 \subset k^{n_2}$ algebraische Mengen, sei $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$ ein Morphismus. Dann stellt sich die natürliche Frage ob für $f \in k[Y_2]$ die Abbildung $f \circ \psi : Y_1 \rightarrow k$ wieder eine reguläre Funktion ist und wir somit einen Algebrhomomorphismus

$$\psi^\# : k[Y_2] \rightarrow k[Y_1]$$

bekommen. Sei also $\tilde{\psi} : k^{n_1} \rightarrow k^{n_2}$ eine polynomiale Abbildung, so daß ψ die Einschränkung von $\tilde{\psi}$ auf Y_1 ist. Es gibt also Polynome $h_1, \dots, h_{n_2} \in k[x_1, \dots, x_{n_1}]$, so daß für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{n_1})$ gilt:

$$\tilde{\psi}(\underline{x}) = (h_1(\underline{x}), \dots, h_{n_2}(\underline{x})).$$

Die Verknüpfung $f \mapsto f \circ \tilde{\psi}$ induziert daher einen Algebrhomomorphismus

$$\tilde{\psi}^\# : k[y_1, \dots, y_{n_2}] \rightarrow k[x_1, \dots, x_{n_1}]$$

zwischen der Algebra der regulären Funktionen auf dem k^{n_2} und der Algebra der regulären Funktionen auf dem k^{n_1} . Da nach Voraussetzung $\psi(Y_1) \subset Y_2$ folgt $f \circ \tilde{\psi} \in I(Y_1)$ falls $f \in I(Y_2)$, also $\tilde{\psi}^\#(I(Y_2)) \subset I(Y_1)$, bekommen

wir einen induzierten k -Algebrahomomorphism $\psi^\sharp : k[Y_2] \rightarrow k[Y_1]$ und ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \psi^\sharp & : & k[Y_2] = k[y_1, \dots, y_{n_2}] / I(Y_2) \rightarrow k[Y_1] = k[x_1, \dots, x_{n_1}] / I(Y_1) \\ & & \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \tilde{\psi}^* & : & k[y_1, \dots, y_{n_2}] \rightarrow k[x_1, \dots, x_{n_1}] \end{array}$$

Allgemeiner hat man folgende “Übersetzung” von Morphismen zwischen algebraischen Mengen und Algebrahomomorphismen.

Theorem 2.1.1 *Die Abbildung $\psi \rightarrow \psi^\sharp$, die jedem Morphismus $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$ den Algebrahomomorphism $\psi^\sharp : k[Y_2] \rightarrow k[Y_1]$ zuordnet, ist eine Bijektion, d.h., für jeden Algebrahomomorphism $\phi : k[Y_2] \rightarrow k[Y_1]$ gibt es einen eindeutigen Morphismus $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$, so daß $\phi = \psi^\sharp$.*

Beweis. Sei $\phi : k[Y_2] \rightarrow k[Y_1]$ ein Algebrahomomorphism. Durch Verknüpfung mit der Quotientenabbildung $k[y_1, \dots, y_{n_2}] \rightarrow k[Y_2]$ erhält man einen Homomorphism $\phi' : k[y_1, \dots, y_{n_2}] \rightarrow k[Y_1]$. Wähle Polynome f_1, \dots, f_{n_2} in $k[x_1, \dots, x_{n_1}]$ mit $\bar{f}_j = \phi'(y_j) \bmod I(Y_1)$, und sei

$$\tilde{\phi} : k[y_1, \dots, y_{n_1}] \rightarrow k[x_1, \dots, x_{n_1}] \quad \text{definiert durch} \quad \tilde{\phi}(y_j) = f_j.$$

Für den Morphismus $\tilde{\psi} : k^{n_1} \rightarrow k^{n_2}$, definiert durch

$$v \mapsto (f_1(v), f_2(v), \dots, f_{n_2}(v)),$$

gilt: $\tilde{\psi}^\sharp = \tilde{\phi}$. Sei nun $h \in I(Y_2)$ und $v \in k^{n_1}$, dann gilt nach Konstruktion $h(\psi(v)) = (h \circ \psi)(v) = (\psi^\sharp(h))(v) = (\tilde{\phi}(h))(v)$, und damit folgt

$$\forall v \in Y_1 : h(\psi(v)) = (\phi'(h))(v) = 0 \implies \psi(Y_1) \subset Y_2.$$

(siehe Bemerkung 2.1.2). Man erhält somit einen Morphismus $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$, der, nach Konstruktion, die Eigenschaft hat: $\psi^\sharp = \phi$. •

Als Konsequenz bekommen wir die folgende Charakterisierung von isomorphen affinen algebraischen Mengen:

Korollar 2.1.1 *Zwei affine algebraische Mengen sind dann und nur dann isomorph, wenn die Koordinatenringe isomorph sind.*

Eine kommutative k -Algebra wird *endlich erzeugt* genannt, wenn sie als Algebra bereits von endlich vielen Elementen erzeugt wird, oder, anders gesagt, wenn es einen surjektiven Homomorphism $\phi : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow R$ für ein geeignetes n gibt.

Definition 2.1.2 Eine *affine Varietät* definiert über dem Körper k ist ein Paar $(Z, k[Z])$ bestehend aus einer Menge Z zusammen mit einer endlich erzeugten reduzierten k -Algebra $k[Z]$ von Funktionen $f : Z \rightarrow k$, die folgende Bedingung erfüllt: Es gibt eine affine algebraische Menge $X \subset k^n$ und eine bijektive Abbildung $\phi : Z \rightarrow X$, so daß die Verknüpfung $f \circ \phi$ für $f \in k[X]$ einen Isomorphismus $\phi^\sharp : k[X] \rightarrow k[Z]$ definiert.

Die Algebra $k[Z]$ wird der *Koordinatenring von Z* oder die *Algebra der regulären k -wertigen Funktionen auf Z* genannt.

Ein *Morphismus* $\psi : Z_1 \rightarrow Z_2$ zwischen affinen Varietäten ist eine Abbildung ψ , so daß die Verknüpfung $f \circ \psi$ für $f \in k[Z_2]$ einen Homomorphismus $\psi^\sharp : k[Z_2] \rightarrow k[Z_1]$ definiert.

Ein Isomorphismus ist dann ein Morphismus $\psi : Z_1 \rightarrow Z_2$, so daß ein Morphismus $\psi' : Z_2 \rightarrow Z_1$ existiert mit der Eigenschaft $\psi \circ \psi'$ und $\psi' \circ \psi$ sind jeweils die identische Abbildung. Theorem 2.1.1 garantiert dann, daß affine Varietäten mit isomorphen Modellen (=affinen algebraischen Mengen) zueinander isomorph sind.

Beispiel 2.1.3 Sei $k[GL_n] := k[x_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n; \det^{-1}]$ die Unter algebra erzeugt durch die $x_{i,j}$ und \det^{-1} im Körper der rationalen Funktionen $k(x_{i,j})$ auf dem Vektorraum M_n der $n \times n$ Matrizen.

Die rationalen Funktionen in $k[GL_n]$ sind wohldefinierte Funktionen auf der GL_n , und das Paar

$$(GL_n, k[GL_n]) \text{ ist eine affine Varietät.}$$

Beweis. Sei $V = M_n \oplus k$, der Polynomring $k[V] = k[y_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n; y]$ ist dann der Koordinatenring. Betrachte die affine algebraische Menge:

$$Z = \{(y_{i,j}, y) \in V \mid y \det(y_{i,j}) - 1 = 0\}.$$

Für $\phi : GL_n \rightarrow V$, $g \rightarrow (g, \frac{1}{\det g})$, gilt $y_{i,j} \circ \phi = x_{i,j}$ und $y \circ \phi = \det^{-1}$. Die Abbildung ϕ definiert eine Bijektion von GL_n auf Z , und für $f \in k[Z]$ definiert die Verknüpfung $f \rightarrow f \circ \phi$ einen k -Algebrahomomorphismus $\phi^\sharp : k[Z] \rightarrow k[GL_n]$, der offensichtlich injektiv und surjektiv ist. •

In die Sprache der affinen Varietäten übersetzt ergibt Theorem 2.1.1:

Theorem 2.1.2 Seien $(Y, k[Y])$ und $(Z, k[Z])$ affine Varietäten. Die Abbildung, die jedem Morphismus $\phi : Y \rightarrow Z$ von affinen Varietäten den k -Algebrahomomorphismus $\phi^\sharp : k[Z] \rightarrow k[Y]$ zuordnet, induziert eine Bijektion zwischen der Menge $\text{Mor}(Y, Z)$ von Morphismen zwischen Y und Z und der Menge $\text{Alg}_k(k[Z], k[Y])$ der k -Algebra Homomorphismen zwischen $k[Z]$ und $k[Y]$.

2.2 Das maximale Spektrum

Theorem 2.1.2 legt nahe, daß alle wichtigen Informationen über eine affine Varietät in dem Koordinatenring zu finden sind. Um dies zu präzisieren, werden wir das maximale Spektrum eines Ringes einführen.

Ein Ring oder eine k -Algebra R wird *reduziert* genannt, wenn es keine nilpotenten Elemente gibt, d.h., wenn es für $r \in R$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $r^n = 0$, dann ist $r = 0$. Die Algebra der regulären Funktionen einer affinen Varietät hat offensichtlich diese Eigenschaft.

Sei $R = k[f_1, \dots, f_r]$ eine endlich erzeugte reduzierte k -Algebra. Dann gibt es zwei Möglichkeiten, R als Koordinatenring einer affinen Varietät zu sehen, wir brauchen dazu aber etwas Algebra. Sei $k[x_1, \dots, x_r]$ ein Polynomring. Durch den Homomorphismus

$$\phi : k[x_1, \dots, x_r] \rightarrow R \tag{2.1}$$

kann man die Algebra R als Quotient $R \simeq k[x_1, \dots, x_r]/I$ des Polynomrings präsentieren, wobei $I = \ker \phi$.

Ein Ring S wird *noethersch* genannt, wenn jedes Ideal $J \subset S$ endlich erzeugt ist, d.h.: $\exists f_1, \dots, f_t \in J$ gibt mit $J = (f_1, \dots, f_t)$.

Theorem 2.2.1 *Eine endlich erzeugte k -Algebra ist noethersch.*

Beweis. Wir wissen bereits, daß der Polynomring $k[x_1, \dots, x_m]$ noethersch ist (Vorlesung Algebra I). Ist $J \subset R$ ein Ideal, so ist das Urbild $\tilde{J} = \phi^{-1}(J) \subset k[x_1, \dots, x_m]$ ein Ideal. Seien $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_t$ Erzeuger von \tilde{J} , dann bilden die Bilder g_1, \dots, g_t mit $g_i = \phi(\tilde{g}_i)$ ein Erzeugendensystem des Ideals J in R , d.h., $J = (g_1, \dots, g_t)$. •

Da jedes Ideal $I \subset k[x_1, \dots, x_r]$ endlich erzeugt ist, bekommen wir als Konsequenz die folgenden Abbildungen zwischen Idealen in Polynomringen und affinen algebraischen Teilmengen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{affine algebraische} \\ \text{Mengen im } k^m \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{I} \\ \xleftarrow{V} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ideale in} \\ S = k[x_1, \dots, x_m] \end{array} \right\}$$

definiert durch (2.2)

$$Y \longrightarrow I_Y := \{f \in S \mid f|_Y \equiv 0\}$$

$$V(I) = \{y \in k^m \mid f(y) = 0 \forall f \in I\} \longleftarrow I$$

Das Ideal I_Y wird auch das *Verschwindungsideal* von Y genannt.

Bei den Abbildungen handelt es sich nicht um Bijektionen. Zum Beispiel sei $J_m \subset k[x]$ das Ideal erzeugt von x^m , dann ist $V(J_m) = \{0\}$ für alle $m \geq 1$. Wir haben immer offensichtlich $J \subset I(V(J))$ für ein Ideal $J \subset k[x_1, \dots, x_m]$. Als das *Radikal* \sqrt{J} eines Ideals J bezeichnet man das Ideal

$$\sqrt{J} = \{f \in k[x_1, \dots, x_m] \mid \exists r \in \mathbb{N} : f^r \in J\}.$$

Man sagt ein Ideal ist ein *Radikalideal* falls $J = \sqrt{J}$.

Übung 2.2.1 Sei $J \subset A$ ein Ideal in einem Ring A , und sei \sqrt{J} wie oben definiert. Zeige: \sqrt{J} ist ein Ideal, und $J = \sqrt{J}$ dann und nur dann wenn A/J reduziert ist.

Theorem 2.2.2 (Hilberts Nullstellensatz) Sei $J \subset k[x_1, \dots, x_r]$ ein Ideal und sei $Y = V(J)$ die zugehörige affine algebraische Menge. Dann ist

$$I(V(J)) = \sqrt{J} \quad \text{und} \quad k[Y] = k[x_1, \dots, x_r]/\sqrt{J}.$$

Die Abbildungen in (2.2) definieren also Bijektionen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{affine algebraische} \\ \text{Mengen im } k^m \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{I} \\ \xleftarrow{V} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Radikalideale in} \\ S = k[x_1, \dots, x_m] \end{array} \right\}$$

Sei nun wieder $I = \ker \phi$ der Kern des Homomorphismus ϕ in (2.1) und sei $Y = V(I)$. Da R eine reduzierte Algebra ist folgt für alle $f \in S$:

$$f \in \sqrt{I} \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N} : f^r \in I \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N} : \phi(f)^r = 0 \Leftrightarrow \phi(f) = 0 \Leftrightarrow f \in I.$$

Das Ideal I ist also ein Radikalideal und somit ist $k[Y] \simeq k[x_1, \dots, x_m]/I$. Zusammengefaßt erhalten wir also:

Satz 2.2.1 Jede endlich erzeugte reduzierte k -Algebra ist isomorph zum Koordinatenring einer affinen Varietät.

Um eine Konstruktion zu geben, die unabhängig von der Wahl eines Erzeugendensystem ist, betrachten wir für $R = k[Y]$

$$\text{MaxSpec } R = \{\mathfrak{m} \subset R \mid \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal}\}.$$

Maximale Ideal existieren immer (Vorlesung Algebra I), diese Menge ist also nicht leer. Wir können zudem R als eine Algebra von k -wertigen Funktionen auf $\text{MaxSpec } R$ auffassen: Sei $\mathfrak{m} \in \text{MaxSpec } R$, dann ist R/\mathfrak{m} ein Körper

erhalten durch eine algebraische Körpererweiterung von k . Da k algebraisch abgeschlossen ist folgt $R/\mathfrak{m} \simeq k$ und somit ist die Abbildung:

$$f : \text{MaxSpec } R \longrightarrow k, \quad \mathfrak{m} \mapsto f \bmod \mathfrak{m} \quad (2.3)$$

eine wohldefinierte Funktion. Mehr noch, diese Abbildung von R in die Menge $\text{Abb}(\text{MaxSpec } R, k)$ der Abbildungen von $\text{MaxSpec } R$ nach k ist injektiv: Sei $y \in Y$, dann ist $I_y \subset R$ ein Radikalideal und $R/I_y = k$ ist der Koordinatenring einer Ein-Punkt Varietät. Damit ist I_y ein maximales Ideal, und beachte, daß $f \bmod I_y = f(y)$. Sind nun $f, f' \in R$ so, daß $f' \bmod \mathfrak{m} = f \bmod \mathfrak{m}$ für alle maximalen Ideale, so gilt insbesondere $f(y) = f'(y)$ für alle $y \in Y$, also $f = f'$.

Wir zeigen nun: das Paar $(\text{MaxSpec } R, R)$ ist eine affine Varietät im Sinne der Definition 2.1.2. Sei wieder $I = \ker \phi$ der Kern des Homomorphismus ϕ in (2.1) und sei $Y = V(I)$, dann wissen wir bereits, daß Y eine affine algebraische Menge ist mit einem Koordinatenring $k[Y]$ isomorph zu R .

Satz 2.2.2 *Die Abbildung $\tilde{\phi} : Y \rightarrow \text{MaxSpec } R$, $y \mapsto I_y$ und die Abbildung $\phi : \text{MaxSpec } R \rightarrow Y$, $\mathfrak{m} \mapsto V(\mathfrak{m})$, sind zueinander inverse Bijektionen, und die Verknüpfung $f \circ \phi$ für $f \in k[Y]$ induziert einen Isomorphismus $\phi^\sharp : k[Y] \rightarrow R$.*

Korollar 2.2.1 *Das Paar $(\text{MaxSpec } R, R)$ ist eine affine Varietät.*

Beweis. (Satz 2.2.2) Sei $\tilde{\phi} : Y \rightarrow \text{MaxSpec } R$ die Abbildung $y \mapsto I_y$. Umgekehrt, sei $\mathfrak{m} \in \text{MaxSpec } R$ ein maximales Ideal. Dann ist $R/\mathfrak{m} \simeq k$, die Quotientenabbildung $\psi : R \rightarrow R/\mathfrak{m}$ kann also aufgefaßt werden als ein Homomorphismus $\psi : R = k[Y] \rightarrow k$, wobei k aufgefaßt wird als der Koordinatenring einer Ein-Punkt-Varietät $y_{\mathfrak{m}}$. Nach Theorem 2.1.1 gibt es entsprechend einen eindeutig bestimmten Morphismus von affinen algebraischen Mengen $\varphi : y_{\mathfrak{m}} \rightarrow Y$, so daß $\varphi^* = \psi$. Das Bild $y \in Y$ ist dann der eindeutig bestimmte Punkt, der die gemeinsame Nullstelle aller $f \in \mathfrak{m}$ ist, also $y = V(\mathfrak{m})$. Sei $\phi : \text{MaxSpec } R \rightarrow Y$ definiert durch $\mathfrak{m} \mapsto V(\mathfrak{m})$. Die Abbildungen ϕ und $\tilde{\phi}$ sind offensichtlich invers zueinander, und die Komposition $f \circ \phi$ ist genau die in (2.3) definierte Interpretation von f als Funktion auf $\text{MaxSpec } R$. Der Homomorphismus $\phi^\sharp : k[Y] \rightarrow R$ ist offensichtlich surjektiv und, wie oben gesehen, injektiv, und definiert somit einen Isomorphismus. •

Ist also R eine endlich erzeugte reduzierte k -Algebra, oder ist Y eine affine Varietät mit Koordinatenring R , so schreiben wir im Folgenden einfach

$Y = \text{MaxSpec } R$ für die zugehörige affine Varietät. Der Zusammenhang zwischen R und $\text{MaxSpec } R$ läßt sich formeller wie folgt ausdrücken:

Eine *Kategorie* ist eine Sammlung von Größen mit einer Klasse $\text{Ob}\mathcal{C}$, deren Element Objekte der Kategorie genannt werden, zusammen mit einer Familie von Mengen $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ für jedes geordnete Paar $X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}$. Die Elemente von $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ werden *Morphismen* genannt und mit $\phi : X \rightarrow Y$ bezeichnet. Zu jedem geordneten Tripel X, Y, Z gibt es eine Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z), \quad (\phi, \psi) \mapsto \psi \circ \phi$$

genannt die Verknüpfung von ψ und ϕ . Die Objekte und Morphismen müssen folgende Bedingungen erfüllen.

a) Jeder Morphismus ϕ bestimmt eindeutig zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$, so daß $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$, die Vereinigung $\text{Mor}\mathcal{C} = \bigcup_{X, Y \in \text{Ob}\mathcal{C}} \text{Hom}(X, Y)$ ist also disjunkt.

b) Für jedes $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$ gibt es den identischen Morphismus $\text{id}_X : X \rightarrow X$, der eindeutig bestimmt ist durch die Eigenschaft $\phi \circ \text{id}_X = \phi$ und $\text{id}_X \circ \psi = \psi$ wenn immer die Verknüpfung definiert ist.

c) Die Komposition ist assoziativ: $(\phi \circ \psi) \circ \eta = \phi \circ (\psi \circ \eta)$ für für alle $\eta \in \text{Hom}(X, Y)$, $\psi \in \text{Hom}(Y, Z)$, $\eta \in \text{Hom}(Z, W)$.

Statt $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$ schreibt man oft einfach $X \in \mathcal{C}$, und statt $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ schreibt man auch einfach $\phi \in \text{Mor}\mathcal{C}$ oder $\phi \in \text{Mor}(X, Y)$.

Beispiel 2.2.1 Die Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ hat als Objekte alle Mengen, und für zwei Mengen $X, Y \in \mathbf{Set}$ ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ die Menge aller Abbildungen von X nach Y . Die Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Vek}(k)$ hat als Objekte alle Vektorräume über dem Körper k , und für zwei Vektorräume $X, Y \in \mathbf{Vek}(k)$ ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ die Menge aller Homomorphismen von X nach Y .

Die Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Alg}_{\text{red}}^f(k)$ hat als Objekte alle endlich erzeugten reduzierten Algebren über dem Körper k , und für $R, S \in \mathbf{Alg}_{\text{red}}^f(k)$ ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(R, S)$ die Menge aller Algebrenhomomorphismen von R nach S .

Die Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{AffVar}(k)$ hat als Objekte die affinen Varietäten, definiert über dem Körper k , und für $X, Y \in \mathbf{AffVar}(k)$ ist $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ die Menge aller Morphismen $\phi : X \rightarrow Y$ von affinen Varietäten.

Ein *Funktor* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwischen zwei Kategorien besteht aus

a) einer Abbildung $\text{Ob}\mathcal{C} \longrightarrow \text{Ob}\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$.

b) einer Abbildung $\text{Mor}\mathcal{C} \longrightarrow \text{Mor}\mathcal{D}$, $\phi \mapsto F(\phi)$, so daß $F(\phi) : F(X) \rightarrow F(Y)$ für $\phi : X \rightarrow Y$.

c) Die Abbildung in b) respektiert Verknüpfungen wann immer es Sinn macht, d.h., wenn $\phi \circ \psi$ definiert ist, dann gilt $F(\phi \circ \psi) = F(\phi) \circ F(\psi)$, und, insbesondere, $F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$.

Beispiel 2.2.2 Die Abbildung $F : \mathbf{AffVar}(k) \rightarrow \mathbf{Alg}_{\text{red}}^f(k)$, die jeder affinen Varietät $(X, k[X])$ die Algebra $k[X]$ der regulären Funktionen zuordnet, ist ein Funktor.

Umgekehrt, die Abbildung $G : \mathbf{Alg}_{\text{red}}^f(k) \rightarrow \mathbf{AffVar}(k)$, die jeder reduzierten endlich erzeugten k -Algebra R die affine Varietät $(\text{MaxSpec } R, R)$ zuordnet, ist ein Funktor.

Ein Morphismus von Funktoren ist ein “eigenartig Ding”: Seien $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Ein Morphismus $f : F \rightarrow G$ von Funktoren ist eine Familie von Abbildungen $f(X) : F(X) \rightarrow G(X)$ für jedes $X \in \text{Ob}\mathcal{C}$, so daß für jedes $\phi \in \text{Hom}(X, Y)$ man ein kommutatives Diagramm hat:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f(X)} & G(X) \\ F(\phi) \downarrow & & \downarrow G(\phi) \\ F(Y) & \xrightarrow{f(Y)} & G(Y) \end{array}$$

Die Funktoren heißen *isomorph*: $f : F \rightarrow G$, wenn es einen Morphismus von Funktoren $g : G \rightarrow F$ gibt, so daß $gf = \text{id}_F$ und $fg = \text{id}_G$ gilt. Anders gesagt, F und G sind isomorph, wenn für alle $X \in \mathcal{C}$ ist der Morphismus $f : F(X) \rightarrow G(X)$ ein Isomorphismus.

Man sagt, daß ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ eine *Äquivalenz von Kategorien* definiert oder, daß die Kategorien *äquivalent* sind, wenn es einen Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ gibt, so daß der Funktor FG isomorph zum Funktor $\text{id}_{\mathcal{D}}$ und GF isomorph zum Funktor $\text{id}_{\mathcal{C}}$ ist. Theorem 2.1.2 läßt sich dann in der Sprache der Kategorien wir folgt übersetzen:

Theorem 2.2.3 Die Funktoren F und G in Beispiel 2.2.2 definieren eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der affinen Varietäten über k und der Kategorie der endlich erzeugten reduzierten k -Algebren.

In Beispiel 2.1.3 haben wir gesehen, daß die Gruppe $GL_n(k)$ mit Koordinatenring mit $k[GL_n] = k[x_{i,j}, \frac{1}{\det} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ eine affine algebraische Varietät ist. Die natürliche Darstellung $\text{id} : GL_n(k) \rightarrow GL(k^n)$ ist sicher ein Morphismus von Varietäten. Es gibt viele Standardmethoden um aus einer gegebenen Darstellung neue zu konstruieren, wie wir in den Beispielen in Kapitel 1 gesehen haben. Sei $\Lambda^r k^n$ die r -te äussere Potenz des k^n , die Gruppe GL_n operiert dann auf $\Lambda^r k^n$ durch $g(v_1 \wedge \dots \wedge v_r) = (gv_1) \wedge \dots \wedge (gv_r)$ für einen reinen Tensor.

Übung 2.2.2 Zeige: Die Darstellung

$$\rho : GL_n \rightarrow GL(\Lambda^r k^n), \quad g \mapsto \rho(g) : \begin{cases} \Lambda^r k^n & \longrightarrow \Lambda^r k^n \\ v_1 \wedge \dots \wedge v_r & \longrightarrow (gv_1) \wedge \dots \wedge (gv_r) \end{cases}$$

ist ein Morphismus von affinen Varietäten. Hinweis: Schauen Sie sich noch einmal die Aufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I/II an: Bezüglich der Basis $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}$ werden die Einträge der Matrix $\rho(g)$ genau durch alle $r \times r$ -Minoren von g gegeben.

In Beispiel 2.1.1 und Übung 2.1.1 haben wir gesehen, daß die $SL_n, O_n, SO_n \subset GL_n$ (Beispiele 1.6.1 & 1.6.2) und $Sp_{2m} \subset GL_{2m}$ (Beispiel 1.6.3) sowie ihre Untergruppen B, U und T alles affine Varietäten sind.

Übung 2.2.3 a) Zeige: Die Einschränkung von ρ (aus Übung 2.2.2) auf diese Untergruppen sind Morphismen von affinen Varietäten.

b) Sei $h \in GL_n$. Zeige: Die Abbildungen $\lambda_h, \rho_h, \tau_h : GL_n \rightarrow GL_n$, definiert durch $\lambda_h(g) = hg, \rho_h(g) = gh, \tau_h = hgh^{-1}$ sind Morphismen von affinen Varietäten. Zeige, daß die Einschränkungen wie in b) auch Morphismen von affinen Varietäten sind.

c) Sei $\text{inv} : GL_n \rightarrow GL_n$ definiert durch $g \mapsto g^{-1}$. Zeige: inv ist ein Morphismus von affinen Varietäten (und ebenso die Einschränkungen).

2.3 Die Zariski-Topologie

Eine andere wichtige Notation, die man aus der kommutativen Algebra benötigt, ist die *Zariski-Topologie*. Sei R eine endlich erzeugte reduzierte k -Algebra und sei $Y = \text{MaxSpec } R$. Für ein Ideal $I \subset R$ sei

$$\mathcal{V}(I) = \{\mathfrak{m} \in Y \mid I \subset \mathfrak{m}\}$$

die Menge der Maximalideale, die I enthalten. Zum Beispiel, ist $I = \mathfrak{m}$ ein maximales Ideal, dann ist $\mathcal{V}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, und ist $I = (0)$, dann hat man $\mathcal{V}(0) = Y$.

Übung 2.3.1 Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_i, i \in J$ Ideale in R . Zeige:

- (i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \implies \mathcal{V}(\mathfrak{a}) \supset \mathcal{V}(\mathfrak{b})$
- (ii) $\bigcap_{i \in J} \mathcal{V}(\mathfrak{a}_i) = \mathcal{V}(\sum_{i \in J} \mathfrak{a}_i)$.
- (iii) $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{b}) = \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathcal{V}(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$.

Die Eigenschaften (i)–(iii) bedeuten, daß die Teilmengen der Form $\mathcal{V}(I) \subset Y$ die Axiome eines Systems von abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf $Y = \text{MaxSpec } R$ erfüllen.

Definition 2.3.1 Die Topologie auf $Y = \text{MaxSpec } R$, die als abgeschlossene Teilmengen genau die Mengen der Form $\mathcal{V}(I)$ hat, $I \subset R$ Ideal, nennt man die *Zariski-Topologie* auf Y .

Beispiel 2.3.1 Die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von k sind genau die endlichen Teilmengen von k und k selbst.

Bemerkung 2.3.1 Die regulären Funktionen auf einer affinen Varietät sind stetig in der Zariski-Topologie.

Übung 2.3.2 Sei $\phi : X \rightarrow Z$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Zeige: Die Abbildung ist stetig in der Zariski-Topologie.

Beispiel 2.3.2 Sei Z eine affine Varietät und $X \subset Z$ eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge. Wir sprechen dann von einer *Untervarietät* von Z , da X in natürlicher Weise wieder eine affine Varietät ist. Ist $Z = \text{MaxSpec } R$ und $X = \mathcal{V}(I)$, so ist auch $X = \mathcal{V}(\sqrt{I})$. Die Algebra $S = R/\sqrt{I}$ ist reduziert, denn ist $s \in S$ und ist $\tilde{s} \in R$ ein Repräsentant, so gilt:

$$s^n = 0 \Rightarrow \tilde{s}^n \in \sqrt{I} \Rightarrow \tilde{s} \in \sqrt{I} \Rightarrow s = 0$$

Die Quotientenabbildung $R \rightarrow S = R/\sqrt{I}$ induziert eine Abbildung $\phi : \text{MaxSpec } S \rightarrow Z = \text{MaxSpec } R$, die eine Bijektion von $\text{MaxSpec } S$ auf X ist.

Übung 2.3.3 Sei $\phi : X \rightarrow Z$ ein Morphismus von affinen Varietäten und sei $Y \subset X$ eine Untervarietät. Zeige: Die Einschränkung von ϕ auf Y ist ein Morphismus von affinen Varietäten.

Definition 2.3.2 Sei $Z = \text{MaxSpec } R$ eine affine Varietät und sei $Y \subset X$ eine Teilmenge. Sei $I_X = \{f \in R \mid f|_X \equiv 0\}$ das Verschwindungsideal. Dann nennt man $V(I_X)$ den Zariskiabschluß von X , diese Menge wird auch mit $\overline{X} \subset Z$ bezeichnet.

Übung 2.3.4 Zeige: Der Zariskiabschluß $\overline{X} \subset Z$ ist der Schnitt $\bigcap Y$ über alle abgeschlossenen Teilmengen $Y \subset Z$ mit $Y \supset X$.

Lemma 2.3.1 Für eine Untergruppe $G \subset GL_n$ sei $\overline{G} \subset GL_n$ der Zariskiabschluß von G . Dann ist \overline{G} wieder eine Untergruppe der GL_n .

Beweis. Nach Übung 2.2.3 ist $\text{inv} : GL_n \rightarrow GL_n$ ein Morphismus von affinen Varietäten und somit stetig (Übung 2.3.2). Da $\text{inv}^2 = \text{id}$, ist es sogar ein Homeomorphismus und somit $\text{inv}(\overline{G}) = \overline{\text{inv}(G)} = \overline{G}$, d.h., \overline{G} enthält mit

jedem Element auch das Inverse. Es bleibt zu zeigen, daß \overline{G} multiplikativ abgeschlossen ist.

Sei zunächst $h \in G$, dann sind $\rho_h, \lambda_h : GL_n \rightarrow GL_n$ (Übung 2.3.2) mit den gleichen Argumenten wie oben alles Homeomorphismen. Somit folgt: $h\overline{G} = \overline{hG} = \overline{G}$, $\overline{G}h = \overline{Gh} = \overline{G}$, und es gilt daher für alle $h \in G$ und $g \in \overline{G}$: gh und hg liegen in \overline{G} . Insbesondere: $gG, Gg \subset \overline{G}$ für $g \in \overline{G}$.

Ist nun $g \in \overline{G}$, so gilt aus dem gleichen Grund: $g\overline{G} = \overline{gG} \subset \overline{G}$ und $\overline{G}g = \overline{Gg} \subset \overline{G}$, und somit ist \overline{G} multiplikativ abgeschlossen. •

Übung 2.3.5 Sei $\mathbb{C}_{\text{fin}}^* \subset \mathbb{C}^*$ die Untergruppe der komplexen Zahlen endlicher Ordnung. Zeige: $\overline{\mathbb{C}_{\text{fin}}^*} = \mathbb{C}^*$.

Übung 2.3.6 Sei $U_2(\mathbb{C}) \subset GL_2$ die Gruppe der komplexen hermiteschen Matrizen, d.h., $U_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A} = A^{-1}\}$. Zeige: Der Zariskiabschluß der $U_2(\mathbb{C})$ ist die GL_2 .

Der Unterschied zwischen der \mathbb{C} -Topologie und der Zariski-Topologie zeigt sich besonders deutlich in Übung 2.3.6, schließlich ist $U_2(\mathbb{C})$ kompakt und abgeschlossen in der \mathbb{C} -Topologie. Ein anderes Beispiel ist die Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ der invertierbaren 2×2 -Matrizen mit Determinante eins, dann ist der Zariskiabschluß dieser Gruppe in der $GL_n(\mathbb{C})$ die Gruppe $SL_n(\mathbb{C})$. Ein anderes Problem (oder ein Vorteil?): Die Zariski-Topologie genügt nicht dem Hausdorff-Axiom, wie das Beispiel 2.4.1 zeigt.

2.4 Irreduzible Varietäten

Man nennt eine affine Varietät Z *irreduzibel*, wenn man aus $Z = X \cup Y$ mit $X, Y \subset Z$ abgeschlossen und nicht leer folgt: $X = Z$ oder $Y = Z$. Mit offenen Teilmengen ausgedrückt: Eine affine Varietät Z ist irreduzibel dann und nur dann wenn der Schnitt von je zwei nicht-leeren offenen Mengen $U \cap V \neq \emptyset$ nicht leer ist. Eine weitere äquivalente Formulierung: Eine affine Varietät Z ist irreduzibel dann und nur dann wenn jede offene nicht-leere Teilmenge $U \subset Z$ dicht ist, d.h., $\overline{U} = Z$.

Übung 2.4.1 a) Zeige die Äquivalenz der 3 Formulierungen der Irreduzibilität einer affinen Varietät. Begründe, warum dann das Hausdorffaxiom nicht für die Zariski-Topologie gilt.

b) Sei $(Z, k[Z])$ eine irreduzible affine Varietät, seien $f, g \in k[Z]$, und sei $U \subset Z$ offen und nicht-leer. Zeige: Ist $f|_U = g|_U \implies f = g$.

Die Eigenschaft irreduzibel zu sein verhält sich gut unter Morphismen:

Satz 2.4.1 *Sei $\phi : X \rightarrow Y$ ein Morphismus zwischen affinen Varietäten. Ist X irreduzibel, so ist auch $\overline{\phi(X)} \subseteq Y$ irreduzibel.*

Beweis. Man kann $\mathbf{O_E}$ annehmen: $\overline{\phi(X)} = Y$. Sind $U_1, U_2 \subset Y$ offene nicht-leere Teilmengen, so sind wegen der Stetigkeit auch $\phi^{-1}(U_1)$ und $\phi^{-1}(U_2)$ offen. Die Urbilder sind nicht leer, denn $U_i \cap \phi(X) = \emptyset \Leftrightarrow U_i \cap \overline{\phi(X)} = \emptyset$ da die U_i offen sind. Folglich ist $\phi^{-1}(U_1) \cap \phi^{-1}(U_2) \neq \emptyset$ in X , und dann ist auch $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Also ist $\overline{\phi(X)}$ irreduzibel. \bullet

Beispiel 2.4.1 In der üblichen \mathbb{C} -Topologie ist \mathbb{C} natürlich nicht irreduzibel, aber in der Zariski-Topologie ist \mathbb{C} als affine Varietät irreduzibel, wie die Charakterisierung der abgeschlossenen Teilmengen in Beispiel 2.4.1 zeigt.

Theorem 2.4.1 *Eine affine Varietät Z ist irreduzibel dann und nur dann, wenn der Koordinatenring $k[Z]$ nullteilerfrei ist. Jede affine Varietät kann eindeutig dargestellt werden als eine unverkürzbare endliche Vereinigung von irreduziblen Untervarietäten $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_r$.*

Die Untervarietäten Z_i , die in der obigen Zerlegung auftauchen, nennt man die *irreduziblen Komponenten* von Z . Bevor wir zum Beweis kommen, betrachten wir noch den Fall einer affinen algebraischen Menge $Z \subset k^n$. Die Irreduzibilität kann dann in eine Bedingung an das Verschwindungsideal übersetzt werden: Sei $I_Z = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f|_Z \equiv 0\}$, dann ist $k[Z]$ nullteilerfrei dann und nur dann wenn:

$$\forall f, g \in k[x_1, \dots, x_n]/I_Z : fg = 0 \implies f = 0 \vee g = 0.$$

Dies ist äquivalent zu der Aussage: für alle $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ gilt: $fg \in I_Z$ bedeutet $f \in I_Z$ oder $g \in I_Z$. Es folgt:

Korollar 2.4.1 *a) k^n ist irreduzibel.*

b) $Z \subset k^n$ ist irreduzibel $\iff I_Z$ ist ein Primideal.

Beweis. (Theorem 2.4.1) Ist $R = k[Z]$ nicht nullteilerfrei, so seien $f_1, f_2 \in R - \{0\}$ mit $f_1 f_2 = 0$. Sei $Z_1 = \mathcal{V}(f_1)$ und $Z_2 = \mathcal{V}(f_2)$, dann ist $Z_i \neq Z$ für $i = 1, 2$. Aus Übung 2.3.1 (iii) folgt $Z_1 \cup Z_2 = \mathcal{V}(f_1 f_2) = X$, also ist Z nicht irreduzibel.

Ist $Z = Z_1 \cup Z_2$ mit $Z_i = \mathcal{V}(\mathfrak{a}_i) \subset Z$ echte abgeschlossenen Teilmengen, so sei $f_i \in \mathfrak{a}_i - \{0\}$. Es folgt $f_1 f_2 = 0$, also $k[Z]$ ist nicht nullteilerfrei.

Es bleibt die Zerlegung in irreduzible Komponenten zu beweisen. Dazu nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, $Z \subset k^n$ ist eine affine algebraische Teilmenge. Sei $I_Z \subset k[x_1, \dots, x_n]$ das Verschwindungsideal.

Sei zunächst $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_r$ eine Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Untervarietäten, sei $P_j = I(Z_j)$ das Verschwindungsideal. Dann ist P_j ein Primideal, wie wir oben gesehen haben, da Z_j irreduzibel ist. Weiter verschwindet f auf Z dann und nur dann wenn f auf allen Z_j verschwindet, es folgt also: $I_Z = P_1 \cap \dots \cap P_r$.

Umgekehrt, (Lemma 2.4.1), sei I_Z ein Durchschnitt $I_Z = P_1 \cap \dots \cap P_r$ von endlich vielen Primidealen P_j . Sei $Z_j \subset Z$ die Untervarietät $\mathcal{V}(P_j/I_Z)$, die durch das Ideal $P/I_Z \subset k[Z] = k[x_1, \dots, x_n]/I_Z$ definiert wird. Da P_j ein Primideal ist, folgt $k[x_1, \dots, x_n]/P_j$ ist nullteilerfrei (und insbesondere reduziert), und somit ist $Z_j = \text{MaxSpec } k[x_1, \dots, x_n]/P_j$ irreduzibel. Aus Übung 2.3.1 folgt dann noch $Z = \bigcup_j Z_j$, wir haben also Z dargestellt als eine Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Untervarietäten.

Die minimalen Primideale, die I_Z enthalten, entsprechen genau den maximalen irreduziblen Untervarietäten von Z . Wir überlassen die Eindeutigkeit der Zerlegung dem Leser als Übung (siehe 2.4.2). •

Um den Beweis des Theorems zu beenden, fehlt noch:

Lemma 2.4.1 *Sei $R = k[x_1, \dots, x_n]$ und sei $I \subset R$ ein Radikalideal. Dann gibt es Primideale $P_1, \dots, P_r \subset R$, so daß $I = P_1 \cap \dots \cap P_r$.*

Beweis. Sei K die Klasse aller Radikalideale $I \subset R$, die sich nicht als ein endlicher Durchschnitt von Primidealen darstellen lassen. In dieser Klasse sei I_0 ein maximales Element, dann ist I insbesondere nicht selbst ein Primideal und somit gibt es $f, g \in R - I_0$ mit $fg \in I_0$.

Seien I_1, I_2 die Radikalideale $I_1 = \sqrt{\langle I_0, f \rangle}$ und $I_2 = \sqrt{\langle I_0, g \rangle}$. Da I_0 ein maximales Element in der Klasse K ist, lassen sich also I_1, I_2 als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellen. Das Lemma ist bewiesen sobald wir zeigen können: $I_0 = I_1 \cap I_2$.

Sicher ist nach Konstruktion $I_0 \subset I_1 \cap I_2$. Um die Umkehrung einzusehen, sei $h \in I_1 \cap I_2$, somit gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ mit $f^n \in \langle I_0, f \rangle$ und $g^m \in \langle I_0, g \rangle$. Wir können also schreiben: $h^n = a + bf$ und $h^m = c + dg$ mit $a, c \in I_0$ und $b, d \in R$. Dann folgt aber:

$$h^{m+n} = (a + bf)(c + dg) = ac + adg + bfc + bd(fg) \in I_0 \quad \text{da } fg \in I_0,$$

und damit $f \in I_0$ (da dies ein Radikalideal ist), also $I_1 \cap I_2 \subset I_0$. •

Übung 2.4.2 Sei $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ein Radikalideal, und sei $I = P_1 \cap \dots \cap P_r$ eine unverkürzbare Darstellung von I als Schnitt von endlich vielen Primidealen P_j . Zeige: Bis auf die Reihenfolge sind die Primideale eindeutig durch I bestimmt.

Übung 2.4.3 Zeige: $O_n(\mathbb{C})$ (Beispiel 1.6.2) hat mindestens zwei irreduzible Komponenten. Hinweis: Benütze Satz 2.4.1 und die Determinantenabbildung.

2.5 Spezielle offene Mengen

Sei $Y = \text{MaxSpec } R$ eine irreduzible affine Varietät und sei $f \in R$. Betrachte:

$$Y_f = \{y \in Y \mid f(y) \neq 0\} = \{\mathfrak{m} \in Y = \text{MaxSpec } R \mid f \notin \mathfrak{m}\} = Y - \mathcal{V}(f)$$

Als das Komplement der Zariski-abgeschlossenen Menge $\mathcal{V}(f)$ ist dies eine offene Teilmenge in Y , genannt eine *spezielle offene Teilmenge* in der Zariski-Topologie. Sei R_f die Lokalisierung von R an f , d.h.,

$$R_f = \left\{ \frac{g}{f^n} \mid g \in R, n \in \mathbb{N} \right\} / \sim$$

wobei $\frac{g}{f^n} \sim \frac{h}{f^m}$ falls es ein $k \geq 1$ gibt mit $f^k(f^m g - f^n h) = 0$.

Beispiel 2.5.1 Die Gruppe GL_n ist eine spezielle offene Menge in der affinen Varietät $M_n(k)$ da $GL_n = (M_n(k))_{\det}$. Die Lokalisierung $k[x_{i,j}]_{\det}$ ist der Ring $k[x_{i,j}, \det^{-1}]$.

Satz 2.5.1 a) (Y_f, R_f) ist eine irreduzible affine Varietät.

b) Die speziellen offenen Mengen bilden eine Basis der Zariski-Topologie.

Beispiel 2.5.2 Die Gruppe GL_n ist eine irreduzible affine Varietät, ebenso die Untergruppen B_n , U_n und T_n .

Beweis. Sei $X \subset k^n$ eine algebraische Menge, die ein "Modell" für (Y, R) ist, d.h., es gibt eine Bijektion $\Phi : Y \rightarrow X$, die den Ring R mit dem Ring der regulären Funktionen auf X identifiziert. Man rechnet leicht nach, daß dann auch die algebraische Menge $\tilde{X} \subset k^{n+1}$, definiert durch

$$\tilde{X} = \{(x, t) \in k^n \times k \mid x \in X, t \cdot f(x) = 1\}$$

ein Modell ist für Y_f , wobei die Bijektion $\tilde{X} \rightarrow Y_f$ gegeben ist durch die Projektion auf die erste Komponente. Sind $g', h' \in R_f$ mit $g'h' = 0$, so ist

$g' = \frac{g}{f^n}$, $h' = \frac{h}{f^m}$ mit $g, h \in R$ und $g'h' \sim 0$ in R_f , also, $f^k(gh) = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Da f auf Y_f nicht verschwindet, folgt $gh|_{Y_f} \equiv 0$, und da $\overline{Y_f} = Y$ folgt $gh = 0$, und damit $g' = 0$ oder $h' = 0$. Y_f ist somit irreduzibel. Wir lassen den Teil *b*) als Übung. •

Übung 2.5.1 Zeige: Die speziellen offenen Mengen bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf Y . Genauer, jede offene Teilmenge ist sogar eine endliche Vereinigung von speziellen offenen Teilmengen. Hinweis: Sei $U \subset Y$ offen, dann ist das Komplement $V(J)$ für ein Ideal $J \subset k[Y]$. Dieses ist endlich erzeugt: $J = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ da $k[Y]$ noethersch ist. Zeige: $U = \bigcup_{j=1}^r Y_{f_j}$

2.6 Produkte

Seien $(X, k[X])$ und $(Y, k[Y])$ affine Varietäten. Ist $X = k^n$ und $Y = k^m$, dann ist das cartesische Produkt $X \times Y \simeq k^{n+m}$ offensichtlich wieder eine affine Varietät, dessen Koordinatenring isomorph ist zum Tensoprodukt der ersten beiden: Wie man leicht nachrechnet, ist die Produktabbildung

$$\begin{array}{ccc} k[x_1, \dots, x_n] \otimes k[y_1, \dots, y_m] & \longrightarrow & k[z_1, \dots, z_{n+m}] \\ x_i \otimes 1 & \mapsto & z_i \\ 1 \otimes y_j & \mapsto & z_{n+j} \end{array}$$

Dieses gilt auch im allgemeinen. Beachte, daß die Zariskitopologie auf dem Produkt **nicht** die Produkttopologie ist, wie man leicht an der Zariski-Topologie auf k (Beispiel 2.4.1) und der Zariskitopologie auf dem $k^2 = k \times k$ sieht.

Satz 2.6.1 Sind $(X, k[X])$ und $(Y, k[Y])$ affine Varietäten, dann ist das Paar $(X \times Y, k[X] \otimes k[Y])$ mit $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$ eine affine Varietät. Sind zudem X und Y irreduzibel, so ist auch $X \times Y$ irreduzibel.

Beweis. Seien $X \subseteq k^n$, $Y \subseteq k^m$, und seien $I_X \subseteq k[k^n]$ und $I_Y \subseteq k[k^m]$ die Verschwindungsideale. Dann ist

$$J = I_X \otimes k[k^m] + k[k^n] \otimes I_Y \subseteq k[k^m] \otimes k[k^n] = k[k^n \oplus k^m]$$

ein Ideal, das als Nullstellenmenge $V(J) \subseteq k^n \oplus k^m$ genau $X \times Y \subseteq k^n \times k^m$ hat. Damit ist $X \times Y$ eine algebraische Menge und hat als Koordinatenring $k[k^n \oplus k^m]/I_{X \times Y}$. Da $J \subseteq I_{X \times Y}$, haben wir offensichtlich einen surjektiven Homomorphismus

$$k[X] \otimes k[Y] \rightarrow k[X \times Y], \quad f \otimes g \mapsto fg : \begin{cases} X \times Y & \rightarrow & k \\ (x, y) & \rightarrow & f(x)g(y) \end{cases}$$

Um die Injektivität zu beweisen, sei $h = \sum_{j=1}^r f_j \otimes g_j \in k[X] \otimes k[Y]$ im Kern der Abbildung. Ohne Einschränkung sei h so gewählt, daß r minimal ist. Dann ist aber $r = 1$, denn da die g_j nicht ganz auf Y verschwinden, gibt es ein $y_0 \in Y$, so daß nicht alle $g(y_j) = 0$. Da aber $h(x, y_0) = 0$ für alle $x \in X$, folgt $\sum_{j=1}^r g(y_0) f_j = 0$ in $k[X]$. Die f_j sind somit in $k[X]$ linear abhängig, man kann also eine der Funktionen durch eine Linearkombination der anderen ersetzen und somit Anzahl der Summanden von h als Summe von reinen Tensoren reduzieren. Also ist $h = f \otimes g$ mit $f \in k[X]$ und $g \in k[Y]$. Dasselbe Argument wie oben zeigt dann, daß $f \otimes g \equiv 0$ auf $X \times Y$ bedeutet entweder $f \equiv 0$ auf X oder $g \equiv 0$ auf Y . •

2.7 Dimension

Sei Z eine affine irreduzible Varietät, dann ist $k[Z]$ ein Integritätsbereich. Den Quotientenkörper nennt man den Körper der *rationalen Funktionen* auf Z und bezeichnet ihn mit $k(Z)$. Dieser Körper wird (wie die Lokalisierung in 2.5) definiert durch:

$$k(Z) = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in k[Z], g \neq 0 \right\} / \sim; \text{ wobei } \frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \text{ falls } fg' = f'g \text{ in } k[Y];$$

mit den üblichen Rechenregeln: Seien $\{\frac{f}{g}\}, \{\frac{q}{p}\}$ zwei Klassen, dann ist

$$\left\{ \frac{f}{g} \right\} \cdot \left\{ \frac{q}{p} \right\} = \left\{ \frac{fq}{gp} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \frac{f}{g} \right\} + \left\{ \frac{q}{p} \right\} = \left\{ \frac{fp + qg}{gp} \right\}.$$

Dies ist eine endlich erzeugte Körpererweiterung über k und hat daher einen endlichen Transzendenzgrad $\text{tr.deg}_k k(Y)$.

Zur Erinnerung: Ist L/K eine Körpererweiterung, so heißen die Elemente $\ell_1, \dots, \ell_m \in L$ algebraisch unabhängig über K falls die Auswertungsabbildung $K[x_1, \dots, x_m] \rightarrow L, f \mapsto f(\ell_1, \dots, \ell_m)$ injektiv ist, oder, anders gesagt, falls man diese Abbildung ausweiten kann zu einem (injektiven) Körperhomomorphismus $K(x_1, \dots, x_m) \hookrightarrow L$. Eine maximale solche Teilmenge nennt man eine Transzendenzbasis von L über K , die Kardinalität einer Transzendenzbasis ist unabhängig von ihrer Auswahl und wird der Transzendenzgrad genannt.

Definition 2.7.1 Unter der *Dimension* einer irreduziblen affinen Varietät Z versteht man den Transzendenzgrad des Körpers der rationalen Funktionen $k(Z)$ von Z .

Beispiel 2.7.1 Für Vektorräume stimmt dieser Dimensionsbegriff mit der üblichen Dimension überein, so ist $\dim k^n = n$ und $\dim M_n(k) = n^2$. Da $k(Z) = k(Z_f)$ (wie man leicht nachrechnet), gilt natürlich $\dim Z = \dim Z_f$. Zum Beispiel: $\dim GL_n = n^2$.

Das folgende Theorem gibt eine etwas anschaulichere geometrische Beschreibung der Dimension einer Varietät. Ein Morphismus $\phi : Z \rightarrow Y$ von irreduziblen affinen Varietäten heißt *endlich*, wenn durch $\phi^\# : k[Y] \rightarrow k[Z]$ die Algebra $k[Z]$ zu einem endlichen $k[Y]$ Modul wird, d.h., es gibt $f_1, \dots, f_t \in k[Z]$ mit

$$k[Z] = \sum_{j=1}^t k[Y]f_j.$$

Endliche Morphismen haben endliche Fasern (aber nicht jeder Morphismus mit endlichen Fasern ist endlich!).

Theorem 2.7.1 *Ist Z eine irreduzible affine Varietät, dann ist $\dim Z = n$ dann und nur dann wenn es einen endlichen surjektiven Morphismus von affinen Varietäten $\phi : Z \rightarrow k^n$.*

Die richtige Übersetzung in Algebrenhomomorphismen wird dies in dem Noetherschen Normalisierungslemma ausgedrückt, siehe [Lang], oder [Atiyah-Macdonald], für die algebraisch geometrische Variante siehe [Mumford] oder [Eisenbud]:

Lemma 2.7.1 (Hilbert-Noether) *Sei K ein unendlicher Körper und R eine endlich erzeugte nullteilerfreie Ring mit Quotientenkörper F , und sei der Transzendenzgrad d . Dann gibt es algebraisch unabhängige Elemente $y_1, \dots, y_d \in R$, so daß R ganz ist über dem Ring $K[y_1, \dots, y_d]$, d.h., alle Elemente in R sind ganz über $K[y_1, \dots, y_d]$.*

Definition 2.7.2 Unter der *Krull-Dimension* eines Ringes R versteht man die maximale Länge einer Kette $0 \subset p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_r \subset R$ von Primidealen, so daß p_i echt enthalten ist in p_{i+1} . Die Krull-Dimension des Ringes wird mit $\dim R$ bezeichnet.

Sei Z eine affine Varietät, sei $J \subset k[Z]$ ein Primideal und sei $S = k[Z] - J$. Für $r, s \in S$ ist das Produkt $rs \in S$ wieder in S . Eine Menge mit einer solchen Eigenschaft nennt man multiplikativ abgeschlossen. Da man beim "Bruchrechnen" bei der Addition und Multiplikation genau diese Eigenschaft braucht, kann man Ringe an solchen Mengen *lokalisieren*.

Definition 2.7.3 Sei Z eine affine Varietät, sei $z \in Z$ und sei $\mathfrak{m}_z \subset k[Z]$ das zugehörige maximale Ideal der in z verschwindenden Funktionen und sei $S = k[Z] - \mathfrak{m}_z$. Die Lokalisierung von $k[Z]$ an \mathfrak{m}_z nennt man den lokalen Ring von Z in z und wird mit \mathcal{O}_Z bezeichnet. Der Ring $\mathcal{O}_{Z,z}$ wird definiert durch:

$$\mathcal{O}_{Z,z} = \left\{ \frac{f}{g} \mid g, f \in k[Z], g \in S \right\} / \sim;$$

wobei $\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'}$ falls es ein $h \in S$ mit $h(fg' - f'g) = 0$ in $k[Z]$.

Die beiden oben eingeführten Dimensionsbegriffe hängen wie folgt zusammen, für einen Beweis siehe zum Beispiel das Buch von [Eisenbud] oder [Atiyah-Macdonald].

Satz 2.7.1 Sei Z eine affine Varietät, sei $Z = \bigcup_j Z_j$ die Zerlegung von Z in irreduzible Komponenten und sei $z \in Z$. Dann ist

$$\dim \mathcal{O}_{Z,z} = \max_{j, z \in Z_j} \dim Z_j$$

2.8 Konstruierbare Mengen und Morphismen

Sei $\phi : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Wegen der Stetigkeit ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen und somit sind "Urbilder" von Untervarietäten wieder Untervarietäten, aber dies gilt nicht für die Bilder von Morphismen. Im Folgenden beschränken wir uns darauf *irreduzible Varietäten* zu betrachten.

Sei also $\phi : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Man nennt ϕ *dominant* falls $\overline{\phi(X)} = Y$. Übersetzt in die Sprache der Algebrenhomomorphismen bedeutet dies:

Lemma 2.8.1 $\phi : X \rightarrow Y \Leftrightarrow \phi^\# : k[Y] \rightarrow k[X]$ ist injektiv.

Beweis. Sei $f \in k[Y]$, dann gilt:

$$\phi^\#(f) = 0 \Leftrightarrow f \circ \phi = 0 \Leftrightarrow f|_{\phi(X)} \equiv 0 \Leftrightarrow f|_{\overline{\phi(X)}} \equiv 0.$$

Es folgt sofort: $\overline{\phi(X)} = Y \Leftrightarrow \phi^\#$ injektiv. •

Indem man gegebenenfalls Y durch $\overline{\phi(X)}$ ersetzt, können wir im Folgenden annehmen, daß $\phi : X \rightarrow Y$ ein dominanter Morphismus von affinen irreduziblen (Satz 2.4.1) affinen Varietäten ist. Die folgenden Sätze zitieren wir ohne Beweis, siehe zum Beispiel das Buch von [Humphreys] oder das Buch von [Atiyah-Macdonald] oder auch [Eisenbud].

Theorem 2.8.1 Sei $\phi : X \rightarrow Y$ ein dominanter Morphismus von affinen irreduziblen Varietäten und sei $r = \dim X - \dim Y$. Dann gibt es eine offene nicht-leere Teilmenge $U \subset Y$, so daß

a) $U \subset \phi(X)$,

b) und wenn $W \subset Y$ irreduzibel und abgeschlossen ist und U trifft, und $Z \subset X$ ist eine irreduzible Komponente von $\phi^{-1}(W)$, die $\phi^{-1}(U)$ trifft, dann gilt $\dim Z = \dim W + r$.

Das Bild einer irreduziblen affinen Varietät enthält also eine nichtleere offene Teilmenge seines Abschlusses (insbesondere natürlich auch eine spezielle offene Teilmenge des Abschlusses). Allgemeiner nennt man eine Teilmenge $Z \subset X$ lokal abgeschlossen, falls es Z der Schnitt $Z = U \cap W$ einer offenen Teilmenge $U \subset X$ und einer abgeschlossenen Teilmenge $W \subset X$ ist. Eine Teilmenge $Z \subset X$ heißt konstruierbar, falls es eine endliche Vereinigung von lokal abgeschlossenen Teilmenge von X ist.

Theorem 2.8.2 (Chevalley) Sei $\phi : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von affinen Varietäten. Dann ist das Bild einer konstruierbaren Menge ein konstruierbare Menge.

Zum Abschluß dieses Kapitels einige

Literaturhinweise

Standardbücher über algebraische Geometrie und kommutative Algebra

ATIYAH, M. F., MACDONALD, I. G.: Introduction to Commutative Algebra, Reading, Mass. Addison Wesley 1969

EISENBUD, D.: Commutative Algebra with a view towards Algebraic Geometry, Springer Verlag, GTM 150, New York 1995

HARTSHORNE, R.: Algebraic Geometry, Springer Verlag, GTM 52, New York 1977

MATSUMURA, H: Commutative Algebra, Benjamin, New York 1970

MUMFORD, H: Introduction to Algebraic Geometry, Springer Verlag, GTM New York.

LANG, S.: Algebra, Reading, Mass. Addison Wesley 1969

Chapter 3

Lineare algebraische Gruppen

Eine *affine algebraische Gruppe* ist eine affine Varietät G , die gleichzeitig eine Gruppe ist, so daß die Multiplikationsabbildung $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$ und auch das Invertieren $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$, Morphismen von affinen Varietäten sind.

Wir haben bereits gesehen, die Gruppe GL_n ist eine spezielle offene Teilmenge in M_n und somit eine affine Varietät mit Koordinatenring $k[GL_n] = k[x_{i,j}, \frac{1}{\det}; 1 \leq i, j \leq n]$. Die Matrizenmultiplikation ist eine polynomiale Abbildung und somit ein Morphismus von affinen Varietäten $M_n(k) \times M_n(k) \rightarrow M_n(k)$.

Übung 3.0.1 Die Einschränkung der Multiplikation $GL_n \times GL_n \rightarrow GL_n$ ist ein Morphismus von affinen Varietäten.

Zum Invertieren benötigt man auch nur polynomiale Funktionen und $\frac{1}{\det}$, aber letzteres ist eine reguläre Funktion auf der GL_n , somit ist auch das Invertieren ein Morphismus von affinen Varietäten. Zusammengefaßt haben wir als das “wichtigste” Beispiel:

Satz 3.0.1 Die Gruppe GL_n ist eine affine algebraische Gruppe.

Definition 3.0.1 Unter einer *linearen algebraischen Gruppe* G versteht man eine Untergruppe einer GL_n , so daß $G \subset GL_n$ eine abgeschlossene Teilmenge ist in der Zariski-Topologie.

In anderen Worten: $G \subset GL_n$ ist eine lineare algebraische Gruppe, wenn man kann Polynome $f_1, \dots, f_r \in k[M_n]$ finden, so daß

$$G = \{g \in GL_n \mid f_1(g) = \dots = f_r(g) = 0\}.$$

Beispiel 3.0.1 Alle im Abschnitt 1.6 eingeführten Gruppen: SL_n , O_n , SO_n , Sp_{2m} , und die entsprechenden Untergruppen B, U und T , sind lineare algebraische Gruppen.

Satz 3.0.2 *Lineare algebraische Gruppen sind affine algebraische Gruppen.*

Beweis. Das gleiche Argument wie im Beweis vom Satz 2.6.1 zeigt: Wenn $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$ jeweils Untervarietäten sind, dann ist $X' \times Y' \subseteq X \times Y$ eine Untervarietät. Es folgt dann unmittelbar aus Übung 2.3.3, daß die Multiplikation und das Invertieren, eingeschränkt auf $G \subset GL_n$, Morphismen von affinen Varietäten sind. •

Übung 3.0.2 Sei G eine affine algebraische Gruppe und sei $H \subset G$ eine abgeschlossene (in der Zariski-Topologie) Untergruppe. Zeige: H ist eine affine algebraische Gruppe.

Die Umkehrung des Satzes gilt ebenfalls, der Beweis muß aber erst noch vorbereitet werden. Sei G eine affine algebraische Gruppe, dann hat G als affine Varietät nur endlich viele irreduzible Komponenten. Seien G_1, \dots, G_s irreduzible Komponenten von G , die das neutrale Element e enthalten. Nach Satz 2.6.1 und Satz 2.4.1 ist der Abschluß des Bildes der Produktabbildung $G_1 \times \dots \times G_s \rightarrow G$ irreduzibel, enthält aber auch offensichtlich G_1, \dots, G_s . Es folgt $s = 1$, sei im Folgenden G^0 die eindeutig bestimmte Komponente die e enthält, genannt die *irreduzible Komponente der 1*.

Satz 3.0.3 G^0 ist eine normale Untergruppe von G von endlichem Index, die Nebenklassen sind genau die irreduziblen und auch die Zusammenhangskomponenten von G . Umgekehrt, jede abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index enthält G^0 .

Beweis. Sei $G_i \subset G$ eine irreduzible Komponente. Da die Multiplikation mit $h \in G$ ein Morphismus $\lambda_h : G \rightarrow G$, $g \mapsto hg$, von affinen Varietäten ist, und invertierbar, folgt daß $hG_i = \{hg \mid g \in G_i\}$, wieder eine irreduzible Komponente ist. Das gleiche Argument zeigt, daß $G_i h$, $hG_i h^{-1}$ und $(G_i)^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in G_i\}$ wieder irreduzible Komponenten sind. Insbesondere ist $e \in (G^0)^{-1}$, also $(G^0)^{-1} = G^0$. Damit ist mit $h \in G^0$ auch $h^{-1} \in G^0$ und daher $e \in hG^0$, also $hG^0 = G^0$. Es folgt: G^0 ist eine abgeschlossene Untergruppe.

Da $e \in hG^0 h^{-1}$ für alle $h \in G$ folgt $G^0 = hG^0 h^{-1}$, somit ist G^0 also ein Normalteiler. Ist $g \in G_i \cap G_j$ im Schnitt von zwei verschiedenen irreduziblen Komponenten, dann ist e im Schnitt der irreduziblen Komponenten $g^{-1}G_i, g^{-1}G_j$, aber dies ist nicht möglich.

Also sind die irreduziblen Komponenten disjunkt und daher gleichzeitig auch die Zusammenhangskomponenten von G . Die Nebenklassen entsprechen daher genau den irreduziblen Komponenten, die Gruppe G/G^0 muß also endlich sein.

Sei nun $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index, dann ist auch jede Nebenklasse von H abgeschlossen, also auch die endliche Vereinigung von allen Nebenklassen verschieden von H . Als Komplement einer abgeschlossenen Menge ist somit H auch offen, und damit sind auch aller Nebenklassen von H offen. Durch schneiden mit den Nebenklassen kann also G^0 partioniert werden in eine endliche disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen. Da G^0 aber zusammenhängend ist und H trifft, folgt $G^0 \subset H$. •

Definition 3.0.2 Ein *Morphismus* $\phi : G \rightarrow H$ von affinen algebraischen Gruppen ist ein Gruppenhomomorphismus, der gleichzeitig ein Morphismus von affinen Varietäten ist.

Satz 3.0.4 Das Bild $\text{Im } \phi$ eines Morphismus $\phi : G \rightarrow H$ von affinen algebraischen Gruppen ist eine abgeschlossene (in der Zariski-Topologie) Untergruppe von H . Insbesondere sind also der Kern $\text{Ker } \phi$ und das Bild $\text{Im } \phi$ eines Morphismus wieder affine algebraische Gruppen, und $\phi(G^0) = \phi(G)^0$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit (Übung 2.3.2) ist $\text{Ker } \phi$ ein abgeschlossener Normalteiler von G , aus Übung 3.0.2 folgt dann, $\text{Ker } \phi$ eine affine algebraische Gruppe.

Wir wissen bereits, daß der Zariski-Abschluß $\overline{\phi(G)}$ eine affine algebraische Gruppe ist (Lemma 2.3.1 und Übung 3.0.2), wir können also \mathfrak{C} annehmen: $H = \overline{\phi(G)}$.

Ist $G = \bigcup_{j=1}^t g_j G^0$, dann ist $\overline{\phi(G)} = \bigcup_{j=1}^t \phi(g_j) \overline{\phi(G^0)} = H$. Somit ist $\overline{\phi(G^0)} \subset G'$ eine abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index, enthält also H^0 (Satz 3.0.3). Da $\overline{\phi(G^0)}$ irreduzibel ist (Satz 2.4.1), folgt $\overline{\phi(G^0)} = H^0$.

Aus Theorem 2.8.1 wissen wir, daß es eine offene nichtleere Teilmenge $U \subset H^0$ gibt mit $U \subset \phi(G^0)$. Man kann \mathfrak{C} U so wählen, daß $\text{id} \in U$. Da $\phi(G^0)$ eine Untergruppe ist, gilt natürlich auch

$$U \cdot U = \{uv \mid u, v \in U\} \subset \phi(G^0) \subset H^0.$$

Wir behaupten: $U \cdot U = H^0$. In der Tat, sei $g \in H^0$, dann ist $g \in g \cdot U^{-1}$. Da U und $g \cdot U^{-1}$ offen und nicht leer sind in der irreduziblen affine Varietät H^0 , folgt $U \cap g \cdot U^{-1} \neq \emptyset$. Sei also $u \in U \cap g \cdot U^{-1}$, d.h., es gibt ein $v \in U$ mit

$u = gv^{-1}$, oder, anders gesagt, $g = uv \in U \cdot U$. Es folgt: $\phi(G^0) = H^0$, und damit $\phi(G) = H$. •

Bemerkung 3.0.1 Der Kern eines Morphismus von algebraischen Gruppen ist natürlich ein Normalteiler von G , und somit ist $G/\text{Ker}\phi$ wieder eine Gruppe, isomorph (als Gruppe) zum Bild $\text{Im}\phi$ des Morphismus. Da $\text{Im}\phi$ eine affine algebraische Gruppe ist, kann man durch diesen Isomorphismus die abstrakte Gruppe $\overline{G} = G/\text{Ker}\phi$ mit der Struktur einer algebraischen Gruppe versehen. Es bleibt zu zeigen, daß diese Struktur unabhängig von ϕ ist!

3.1 Endlichdimensionale rationale Darstellungen

Eine *endlichdimensionale rationale Darstellung* von G ist ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen $\rho : G \rightarrow GL(V)$ für einen endlichdimensionalen k -Vektorraum V . Beachte, daß das Bild von ρ eine lineare algebraische Gruppe in $GL(V)$ ist (Satz 3.0.4)

Bemerkung 3.1.1 Statt $\rho(g)(v)$ für $g \in G$ und $v \in V$ wird oft die Modulnotation benützt und einfach gv statt dessen geschrieben, vergleiche auch Vorlesung Algebra I.

Ein G -Morphismus $\phi : V \rightarrow U$ zwischen endlichdimensionalen rationalen Darstellungen ist eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $g\phi(v) = \phi(gv)$. Ein solcher Morphismus wird auch ein G -äquivarianter Homomorphismus genannt. Zwei Darstellungen heißen isomorph oder äquivalent, wenn es einen G -äquivarianten Isomorphismus zwischen den Darstellungen gibt.

Übung 3.1.1 Sei $\phi : V \rightarrow U$ ein surjektiver G -Morphismus zwischen zwei endlichdimensionalen rationalen Darstellungen $\rho_V : G \rightarrow GL(V)$, $\rho_U : G \rightarrow GL(U)$. Sei $H = \rho_V(G) \subset GL(V)$, zeige: Es gibt einen Morphismus $\psi : H \rightarrow GL(U)$ von affinen algebraischen Gruppen, so daß $\rho_U = \psi \circ \rho_V$. Hinweis: Zeige, daß $\text{Ker}\rho_V \subseteq \text{Ker}\rho_U$ und somit $I(\text{Ker}\rho_V) \subset I(\text{Ker}\rho_U)$ in $k[G]$.

Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung. Ein Unterraum $U \subset V$ heißt *Unterdarstellung* oder G -*Untermodul* falls $\rho(g)(U) \subset U$ für alle $g \in G$. Dann definiert die Einschränkung $\rho_U : G \rightarrow GL(U)$, $g \mapsto \rho(g)|_U$ wieder eine Darstellung, und die Darstellung

$$\rho_{V/U} : G \rightarrow GL(V/U), g \mapsto \bar{\rho}(g) : \begin{cases} V/U & \rightarrow V/U, \\ v + U & \mapsto \rho(g)(v) + U, \end{cases}$$

nennt man die Quotientendarstellung.

Übung 3.1.2 Ist $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine endlichdimensionale rationale Darstellung von G und ist $U \subset V$ ein G -Untermodul, dann sind auch ρ_U und $\rho_{V/U}$ endlichdimensionale rationale Darstellungen von G

Übung 3.1.3 Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine endlichdimensionale rationale Darstellung von G und sei $\phi : H \rightarrow G$ ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen. Zeige: $\rho \circ \phi : H \rightarrow GL(V)$ eine endlichdimensionale rationale Darstellung von H .

Übung 3.1.4 Zeige: Sind $\rho_i : G \rightarrow GL(V_i)$, $i = 1, 2$, endlichdimensionale rationale Darstellungen, so ist $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$, definiert durch

$$g \mapsto \rho_1 \otimes \rho_2(g) : \begin{cases} V_1 \otimes V_2 & \rightarrow V_1 \otimes V_2, \\ v_1 \otimes v_2 & \mapsto \rho_1(g)(v_1) \otimes \rho_2(g)(v_2), \end{cases}$$

auch wieder eine endlichdimensionale rationale Darstellung von G .

Übung 3.1.5 Zeige: $\rho : G \rightarrow GL(V)$ ist eine endlichdimensionale rationale Darstellung dann und nur dann, wenn bezüglich einer Basis \mathbb{B} von V die darstellenden Matrizen

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} r_{1,1}(g) & r_{1,2}(g) & \dots & r_{1,n}(g) \\ r_{2,1}(g) & r_{2,2}(g) & \dots & r_{2,n}(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n,1}(g) & r_{n,2}(g) & \dots & r_{n,n}(g) \end{pmatrix}.$$

durch reguläre Funktionen $r_{i,j} \in k[G]$ gegeben sind.

Satz 3.1.1 Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine endlichdimensionale rationale Darstellung, dann sind auch die zugehörigen Darstellungen auf $\Lambda^m V$ von V und auf $S^m V$ von V wieder endlichdimensionale rationale Darstellungen.

Beweis. Die Darstellung von G auf $V^{\otimes m}$ ist eine endlichdimensionale Darstellung. Sei \mathfrak{a} der Unterraum aufgespannt von allen Elementen der Form

$$\mathfrak{a} = \langle v_1 \otimes \dots \otimes v_m \mid \exists 1 \leq i < j \leq m : v_i = v_j \rangle.$$

Sei \mathfrak{S}_m die symmetrische Gruppe auf m Elementen, und sei \mathfrak{b} der Unterraum von Elementen der Form

$$\mathfrak{b} = \langle v_1 \otimes \dots \otimes v_m - v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(m)} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_m \rangle,$$

Man sieht leicht, daß sowohl \mathfrak{a} als auch \mathfrak{b} G -Untermodule von $V^{\otimes m}$ sind. Da $\Lambda^m V \simeq V^{\otimes m} / \mathfrak{a}$ und $S^m V \simeq V^{\otimes m} / \mathfrak{b}$, folgt, daß beides endlichdimensionale rationale Darstellungen sind (Übungen 3.1.4 und 3.1.2). •

Übung 3.1.6 Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine endlichdimensionale rationale Darstellung. Dann ist die *duale Darstellung* $\tilde{\rho} : G \rightarrow GL(V^*)$ (mit $\rho^*(\ell)(v) = \ell(\rho(g)^{-1}(v))$) wieder eine rationale Darstellung.

Beispiel 3.1.1 Sei D_n der Vektorraum aller Diagonalmatrizen in $M_n(k)$, sei $x_i : D_n \rightarrow k$ die Projektion auf den i -ten Diagonaleintrag, dann ist $k[D_n] = k[x_1, \dots, x_n]$. Da man T_n als die spezielle offene Teilmenge $(D_n)_{x_1 \dots x_n}$ sehen kann, ist der Ring der regulären Funktionen $k[T_n]$ der Ring der Laurentpolynome $k[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$.

Die Menge der Monome $\tilde{X} = \{x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$ bildet mit der Multiplikation eine abelsche Gruppe, genannt die Charaktergruppe. Die Gruppe wird oft additiv geschrieben: Sei $\epsilon_j : T_n \rightarrow k^*$, $\underline{t} \mapsto t_j$, die Projektion auf die i -te Komponente. Sei X der freie \mathbb{Z} -Modul mit Basis $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$. Der \mathbb{Z} -Modul X wird das *Gewichtegitter* genannt, und die Elemente von X nennt man *Gewichte*.

Wir identifizieren das Gitter (= freier endlich erzeugter \mathbb{Z} -Modul) X mit der Gruppe der Monome \tilde{X} durch den Isomorphismus von abelschen Gruppen:

$$X \longrightarrow \tilde{X}, \quad \nu = a_1\epsilon_1 + \dots + a_n\epsilon_n \mapsto x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$$

Ist also $\nu = a_1\epsilon_1 + \dots + a_n\epsilon_n \in X$ und $\underline{t} \in T_n$, so schreiben wir

$$\underline{t}^\nu = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_n^{a_n} = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}(\underline{t}).$$

Übung 3.1.7 Verallgemeinere Satz 1.1.1: Sei $\rho : T_n \rightarrow GL(V)$ eine endlichdimensionale rationale Darstellung. Dann gibt es eine Basis von V und $\nu_1, \dots, \nu_r \in X$, so daß die darstellenden Matrizen von der Form sind:

$$\rho(\underline{t}) = \begin{pmatrix} \underline{t}^{\nu_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{t}^{\nu_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \underline{t}^{\nu_r} \end{pmatrix}.$$

Als Konsequenz erhalten wir:

Korollar 3.1.1 *Jede endlichdimensionale rationale Darstellung des Torus $\rho : T_n \rightarrow GL(V)$ ist die direkte Summe von 1-dimensionalen Darstellungen. Die eindimensionalen Darstellungen sind von der Form $\nu : T_n \rightarrow GL_1 = k^*$ für ein $\nu \in X$. Für $\nu \in X$ sei $V_\nu = \{v \in V \mid \rho(\underline{t})v = \underline{t}^\nu v\}$, genannt der Gewichtsraum von V zum Gewicht ν . Der T -Modul V zerfällt in die direkte Summe seiner Gewichtsräume $V = \bigoplus_{\nu \in X} V_\nu$.*

3.2 Ein Beispiel: Die Gruppe GL_n

Sei $\text{Char } k = 0$. Die natürliche Darstellung der GL_n auf dem k^n ist eine endlichdimensionale rationale Darstellung. Aus den obigen Übungen 3.1.2 und 3.1.4 folgt, daß auch $\rho^{\otimes m} : GL_n \rightarrow GL((k^n)^{\otimes m})$,

$$g \mapsto \rho^{\otimes m}(g) : \begin{cases} (k^n)^{\otimes m} & \rightarrow & (k^n)^{\otimes m}, \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_m & \mapsto & (gv_1) \otimes \dots \otimes (gv_m) \end{cases}$$

eine endlichdimensionale rationale Darstellung der GL_n ist. Andererseits haben wir eine lineare Aktion (Darstellung) der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_m auf dem Vektorraum $(k^n)^{\otimes m}$:

$$\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$$

Das $^{-1}$ ist notwendig in der Definition, damit es eine Links-Operation wird, d.h., $(\sigma \circ \tau)\underline{v} = \sigma(\tau\underline{v})$. Als Kurzschreibweise sei $\underline{v} = v_1 \otimes \dots \otimes v_m \in (k^n)^{\otimes m}$ die Bezeichnung für einen reinen Tensor, ein beliebiges Element in $(k^n)^{\otimes m}$ schreibt sich dann als Linearkombination $\sum_{j=1}^r v_j$ von reinen Tensoren. Da offensichtlich (in der Modulnotation)

$$g(\sigma(\underline{v})) = \sigma(g(\underline{v})), \quad (3.1)$$

vertauschen also die Operationen der GL_n und die der \mathfrak{S}_m .

Betrachten wir zum Beispiel den Unterraum der Tensoren, die von den Elementen der \mathfrak{S}_m festgelassen werden:

$$\begin{aligned} \text{Sym}_m(k^n) &= \underbrace{(k^n \otimes \dots \otimes k^n)}_{m \text{ mal}}^{\mathfrak{S}_m} \\ &= \{u \in (k^n)^{\otimes m} \mid \sigma(u) = u \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_m\} \end{aligned}$$

der Unterraum der *symmetrischen Tensoren*. Aus Gleichung 3.1 folgt, daß $\text{Sym}_m(k^n) \subset (k^n)^{\otimes m}$ ein GL_n -Untermodul ist, und somit eine endlichdimensionale rationale Darstellung. Ebenso sei $\text{Alt}_m(k^n) \subset (k^n)^{\otimes m}$ für $m \leq n$ der Unterraum der *alternierenden Tensoren*, d.h.,

$$\begin{aligned} \text{Alt}_m(k^n) &= \underbrace{(k^n \otimes \dots \otimes k^n)}_{m \text{ mal}}^{\mathfrak{S}_m, \text{sgn}} \\ &= \{u = \sum_{j=1}^r v_j \in (k^n)^{\otimes m} \mid \sigma(u) = \text{sgn}(\sigma)(u) \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_m\}. \end{aligned}$$

Aus Gleichung 3.1 folgt wiederum, daß $\text{Alt}_m(k^n)$ ein GL_n -Untermodul ist, und somit eine endlichdimensionale rationale Darstellung. Um zu sehen, daß diese Untermoduln verschieden von Null sind, überlege man sich:

Übung 3.2.1 Die Abbildung $S^m k^n \rightarrow \text{Sym}_m k^n$, definiert durch

$$v_1 \cdots v_m \mapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(m)},$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen, dessen inverse Abbildung gegeben ist durch die Einschränkung auf $\text{Sym}_m k^n$ der Abbildung $(k^n)^{\otimes m} \rightarrow S^m k^n$, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \mapsto v_1 \cdots v_m$.

Übung 3.2.2 Die Abbildung $\Lambda^m k^n \rightarrow \text{Alt}_m k^n$, definiert durch

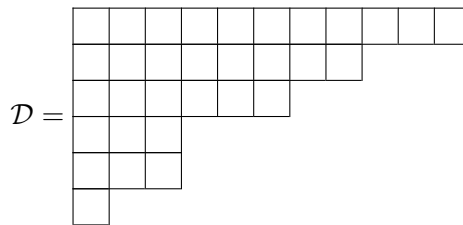
$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(m)},$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen, dessen inverse Abbildung gegeben ist durch die Einschränkung auf $\text{Alt}_m k^n$ der Abbildung $(k^n)^{\otimes m} \rightarrow \Lambda^m k^n$, $v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$.

Diese Übungen 3.2.1 und 3.2.2 geben somit einen alternativen Beweis zum Satz 3.1.1, allerdings nur in Charakteristik Null. Der Vorteil: diese Konstruktion läßt sich (in Char $k = 0$) verallgemeinern:

Unter einer *Partition* $\lambda \vdash m$ der Zahl m versteht man eine absteigende endliche Folge $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s \geq 0$, von ganzen Zahlen, so daß $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = m$. Das Maximum $\max\{1 \leq j \leq s \mid \lambda_j \neq 0\}$ heißt die *Länge* der Partition.

Unter dem zugehörigen *Young Diagramm* versteht man eine Anordnung von Kästchen, linksbündig, so daß man λ_1 -Kästchen in der ersten Zeile, λ_2 -Kästchen in der zweiten Zeile, usw. So sieht das Young Diagramm \mathcal{D} zur Partition $\lambda = (11, 8, 6, 3, 3, 1)$ wie folgt aus:



Da das Diagramm genau m Kästchen hat, kann man die Zahlen $1, \dots, m$ auf die Kästchen des Diagramms (ohne Wiederholung) verteilen. Die Füllung der Kästchen nennt sich ein *Youngtableau der Form λ* , und das Youngtableau heißt *standard* wenn die Einträge in den Zeilen von links nach rechts und in den Spalten von oben nach unten streng aufsteigend sind. Das Tableau

der Form λ mit der *Standardfüllung* ist das eindeutig bestimmte Tableau \mathcal{T} der Form λ , in dem die Kästchen Spaltenweise durchnummeriert werden, in jeder Spalte von oben nach unten, wobei mit der linken Spalte angefangen wird, wie in dem folgenden Beispiel:

$$\mathcal{T} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 6 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 \\ \hline 2 & 7 & 11 & 13 & 15 & 17 & & & & & \\ \hline 3 & 8 & & & & & & & & & \\ \hline 4 & 9 & & & & & & & & & \\ \hline 5 & & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Die *Zeilenstandardfüllung* nummeriert die Kästchen Zeilenweise, von links nach rechts. Es folgen ein Youngtableau \mathcal{T}_1 mit der Standardfüllung, ein Tableau \mathcal{T}_2 mit der Zeilenstandardfüllung und eines dessen Füllung nicht standard ist. Die Tableaux sind alle von der Form $(4, 2, 1) \vdash 7$

$$\mathcal{T}_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 & 7 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} \quad \mathcal{T}_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array} \quad \mathcal{T}_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 & 2 \\ \hline 4 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array} \quad (3.2)$$

Sei $k[\mathfrak{S}_m]$ der Gruppenring der Gruppe \mathfrak{S}_m mit der Basis $\{e_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S}_m\}$. Sei \mathcal{T} ein beliebiges Youngtableaux der Form $\lambda \vdash m$. Für $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ sei $\sigma(\mathcal{T})$ das Tableau, das man erhält indem man in jedem Kästchen den Eintrag j ersetzt durch $\sigma(j)$. Man sagt σ *läßt sie Spalten von \mathcal{T} stabil* wenn für alle $1 \leq j \leq m$ die Zahlen j und $\sigma(j)$ in \mathcal{T} in der gleichen Spalte liegen. Ebenso sagt man σ *läßt die Zeilen von \mathcal{T} stabil* wenn für alle $1 \leq j \leq m$ die Zahlen j und $\sigma(j)$ in \mathcal{T} in der gleichen Zeile liegen. Sei

$$P_{\mathcal{T}} = \{\sigma \in \mathfrak{S} \mid \sigma \text{ läßt die Zeilen von } \mathcal{T} \text{ stabil}\}$$

und sei

$$Q_{\mathcal{T}} = \{\sigma \in \mathfrak{S} \mid \sigma \text{ läßt die Spalten von } \mathcal{T} \text{ stabil}\}$$

Dazu definieren wir die folgenden Element in $k[\mathfrak{S}]$:

$$a_{\mathcal{T}} = \sum_{\sigma \in P_{\mathcal{T}}} e_\sigma, \quad b_{\mathcal{T}} = \sum_{\sigma \in Q_{\mathcal{T}}} \text{sgn}(\sigma) e_\sigma, \quad c_{\mathcal{T}} = a_{\mathcal{T}} b_{\mathcal{T}}.$$

Das Element $a_{\mathcal{T}}$ nennt man den $P_{\mathcal{T}}$ -*Symmetrisator*, $b_{\mathcal{T}}$ nennt man den $Q_{\mathcal{T}}$ -*Schiefsymmetrisator*, und $c_{\mathcal{T}}$ nennt man den *Young-Symmetrisator* zu \mathcal{T} . Die Aktion der \mathfrak{S}_m auf $(k^n)^{\otimes m}$ setzt sich in der üblichen Form auf den Gruppenring $k[\mathfrak{S}_m]$ fort:

$$\left(\sum_{\sigma} a_{\sigma} e_{\sigma} \right) \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_m = \sum_{\sigma} a_{\sigma} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(m)}$$

Beachte: Die σ operieren als Automorphismen auf $(k^n)^{\otimes m}$, aber die Elemente $\sum_{\sigma} a_{\sigma} e_{\sigma}$ aus dem Gruppenring operieren im Allgemeinen nur noch als Endomorphismen, können also einen nicht-trivialen Kern haben, und daher ist

$$\text{Im} \left(\sum_{\sigma} a_{\sigma} e_{\sigma} \right) = \left\langle \sum_{\sigma} a_{\sigma} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(m)} \mid v_1 \otimes \dots \otimes v_m \in (k^n)^{\otimes m} \right\rangle$$

im Allgemeinen eine echter Unterraum von $(k^n)^{\otimes m}$. Zum Beispiel für die Partition $\lambda = (m)$ erhält man für $\mathcal{T} = \boxed{1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid \dots \mid m}$ (Übung 3.2.1):

$$a_{\mathcal{T}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} e_{\sigma} \quad b_{\mathcal{T}} = e_{\text{id}} \quad c_{\mathcal{T}} = a_{\mathcal{T}} \quad \text{und} \quad \text{Im } c_{\mathcal{T}} = \text{Sym}_m k^n.$$

Und ist $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ so erhält man (Übung 3.2.2) für:

$$\mathcal{T} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \dots \\ \hline m \\ \hline \end{array} \quad a_{\mathcal{T}} = e_{\text{id}} \quad b_{\mathcal{T}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \text{sgn}(\sigma) e_{\sigma} \quad c_{\mathcal{T}} = a_{\mathcal{T}} \quad \text{und} \quad \text{Im } c_{\mathcal{T}} = \text{Alt}_m k^n.$$

Übung 3.2.3 Zeige: Ist $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash m$ und ist \mathcal{T} das Tableau von der Form λ mit der Zeilenstandardfüllung, so ist

$$\text{Im } a_{\mathcal{T}} = \text{Sym}_{\lambda_1} k^n \otimes \dots \otimes \text{Sym}_{\lambda_r} k^n \subset (k^n)^{\otimes m}.$$

Ist \mathcal{T} das Tableau von der Form λ mit der Standardfüllung, so ist

$$\text{Im } b_{\mathcal{T}} = \text{Alt}_{\lambda_1} k^n \otimes \dots \otimes \text{Alt}_{\lambda_r} k^n \subset (k^n)^{\otimes m}.$$

Beachte, $P_{\mathcal{T}} \cap Q_{\mathcal{T}} = \{\text{id}\}$, ist also $\sigma = p \cdot q$ für ein $p \in P_{\mathcal{T}}$ und $q \in Q_{\mathcal{T}}$, so ist diese Zerlegung eindeutig. Man kann das Element $c_{\mathcal{T}} \in k[\mathfrak{S}_m]$ charakterisieren als Summe $\sum \pm e_{\sigma}$ über alle Elemente in der \mathfrak{S} die man schreiben kann als $\sigma = p \cdot q$ für ein $p \in P_{\mathcal{T}}$ und $q \in Q_{\mathcal{T}}$, und das Vorzeichen ist festgelegt als $\text{sgn}(q)$.

Was hat das nun alles mit der DARSTELLUNGSTHEORIE der GL_n zu tun?

Da die Aktion der \mathfrak{S}_m auf $(k^n)^{\otimes m}$ mit der Aktion der GL_n vertauscht, vertauscht natürlich auch die Aktion des Gruppenrings $k[\mathfrak{S}_m]$ mit der GL_n . Daher ist das Bild:

$$S^{\mathcal{T}} k^n = \text{Im } c_{\mathcal{T}}.$$

für ein Youngtableau \mathcal{T} ein GL_n -Untermodule. Wir finden so auch bereits bekannte Unterdarstellungen:

- Ist $\lambda = (m)$, so ist $S^T k^n = \text{Im } c_T = \text{Sym}_m k^n$, vergleiche Übung 3.2.1.
- Ist $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$, so ist $S^T k^n = \text{Im } c_T = \text{Alt}_m k^n$, vergleiche auch Übung 3.2.2.

Beispiel 3.2.1 Um genauer zu sehen was passiert, berechnen wir noch einen Fall genauer: Sei $n = 3$, $\lambda = (2, 1) \vdash 3$ und

$$\mathcal{T} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \implies \begin{cases} a_{\mathcal{T}} &= e_{\text{id}} + e_{(1,3)} \\ b_{\mathcal{T}} &= e_{\text{id}} - e_{(1,2)} \\ c_{\mathcal{T}} &= a_{\mathcal{T}} b_{\mathcal{T}} = e_{\text{id}} + e_{(1,3)} - e_{(1,2)} - e_{(1,3,2)} \end{cases}$$

und $(k^3)^{\otimes 3}$ hat als Basis $\mathbb{B} = \{e_i \otimes e_j \otimes e_k \mid 1 \leq i, j, k \leq 3\}$. Da

$$\text{Im } c_{\mathcal{T}} = \langle c_{\mathcal{T}}(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \mid 1 \leq i, j, k \leq 3 \rangle,$$

bleiben nur die Bilder $c_{\mathcal{T}}(e_i \otimes e_j \otimes e_k)$ auszurechnen. Hier kann man sich nach Übung 3.2.4 eine Menge Arbeit ersparen, denn für $q \in Q_{\mathcal{T}}$ ist

$$c_{\mathcal{T}}(q(e_i \otimes e_j \otimes e_k)) = \pm c_{\mathcal{T}}(e_i \otimes e_j \otimes e_k).$$

Also: $\text{Im } c_{\mathcal{T}} = \langle c_{\mathcal{T}}(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \mid 1 \leq i, j, k \leq 3, i \leq j \rangle$, d.h. man muß nur noch die Bilder der $e_i \otimes e_j \otimes e_k$ mit $i \leq j$ berechnen. Zunächst wenden wir den *Schiefsymmetrisator* $b_{\mathcal{T}}$ an, ist also $i = j$, so ist

$$b_{\mathcal{T}}(e_i \otimes e_i \otimes e_k) = 0 \implies c_{\mathcal{T}}(e_i \otimes e_i \otimes e_k) = 0,$$

es reicht also, die Bilder der $e_i \otimes e_j \otimes e_k$ mit $i < j$ zu berechnen. Man bekommt die folgende Liste:

$$a_{\mathcal{T}} b_{\mathcal{T}} = e_{\text{id}} + e_{(1,3)} - e_{(1,2)} - e_{(1,3,2)}$$

1. $2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_1 \otimes e_2$
2. $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - 2e_2 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_2 \otimes e_1$
3. $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 \otimes e_1 - e_3 \otimes e_1 \otimes e_2$
4. $2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 - e_3 \otimes e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_1 \otimes e_3$
5. $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 - e_3 \otimes e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_1 \otimes e_3$
6. $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 - 2e_3 \otimes e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_3 \otimes e_1$
7. $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 - e_3 \otimes e_2 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_3 \otimes e_2 - e_1 \otimes e_2 \otimes e_3$
8. $2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 - e_3 \otimes e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_2 \otimes e_3$
9. $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 - 2e_3 \otimes e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_3 \otimes e_2$

Man prüft leicht nach, daß $3.) - 5.) + 7.) = 0$ die einzige lineare Abhängigkeitsrelation ist, $\text{Im } c_{\mathcal{T}}$ ist also eine 8-dimensionale Darstellung der GL_3 .

Übung 3.2.4 Wähle ein festes Youngtableau \mathcal{T} , wir lassen den Index \mathcal{T} weg und schreiben nur noch P, a, b, \dots statt $P_{\mathcal{T}}, a_{\mathcal{T}}, b_{\mathcal{T}}, \dots$. Zeige:

a) $\forall p \in P, q \in Q : pa = ap = a$ und $(\text{sgn}(q)q)b = b(\text{sgn}(q)q) = b$.
 b) $\forall p \in P, q \in Q : pc(\text{sgn}(q)q) = c$, und c ist eindeutig mit dieser Eigenschaft. (bis auf skalare Vielfache).

c) $\forall x \in k[\mathfrak{S}_m] : cxc = rc$ für ein $r \in k$, und $c \cdot c = rc$ für ein $r \neq 0$.

d) Ist T vom Typ λ und \mathcal{S} vom Typ $\mu \neq \lambda$, so $\forall x \in k[\mathfrak{S}_m] : c_{\mathcal{T}}xc_{\mathcal{S}} = 0$. Hinweis: Zeige, es reicht $x = g \in \mathfrak{S}_m$ zu betrachten. Mehr noch, zeige: es reicht $c_{\mathcal{T}}c_{\mathcal{S}} = 0$ zu beweisen. Zeige als nächstes, daß es zwei Zahlen geben muss, die in dem einen Tableau in einer Zeile, in dem anderen aber in einer Spalte vorkommen müssen und folgere $c_{\mathcal{T}}c_{\mathcal{S}} = 0$.

e) Für jede Partition λ sei \mathcal{T}_{λ} ein Tableau vom der Form λ und zeige:

$$k[\mathfrak{S}_m] = \bigoplus_{\lambda \vdash m} k[\mathfrak{S}_m]c_{\mathcal{T}_{\lambda}}k[\mathfrak{S}_m]$$

Hinweis: Jedes der $U_{\lambda} = k[\mathfrak{S}_m]c_{\mathcal{T}_{\lambda}}$ ist ein \mathfrak{S}_m -Untermodul. Da $c_{\mathcal{T}_{\lambda}}U_{\lambda} \subset kc_{\lambda}$ und $\neq 0$, aber $c_{\mathcal{T}_{\mu}}U_{\lambda} = 0$ für $\lambda \neq \mu$, sind diese Darstellungen alle paarweise nicht isomorph. Folgere, daß die Summe oben direkt sein muß.

Aus der Algebra I Vorlesung wissen wir: $k[\mathfrak{S}_m] = \bigoplus_{\eta} V_{\eta} \otimes V_{\eta}^*$ zerfällt als $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_m$ -Darstellung in paarweise nicht-isomorphe Darstellungen, die Zerlegung ist also eindeutig. Die η laufen dabei über die Menge der Isomorphietypen von irreduziblen Darstellungen der \mathfrak{S}_m . Davon gibt es genauso viele wie Konjugationsklassen, also genauso viele wie es Partitionen der Zahl m gibt. Folgere, daß jedes der $V_{\eta} \otimes V_{\eta}^*$ daher isomorph sein muß zu einem der $k[\mathfrak{S}_m]c_{\mathcal{T}_{\lambda}}k[\mathfrak{S}_m]$, und daß die Menge $\{U_{\lambda} \mid \lambda \vdash m\}$ eine vollständige Liste der irreduziblen \mathfrak{S}_m -Moduln (bis auf Isomorphie) ist.

Da die Aktion des Torus T_n mit der Aktion der \mathfrak{S}_m vertauscht, gilt nach Korollar 3.1.1:

$$S^T k^n = \bigoplus_{\mu \in X} (S^T k^n)_{\mu} \text{ mit } (S^T k^n)_{\mu} = c_{\mathcal{T}}((k^n)_{\mu}^{\otimes m})$$

Übung 3.2.5 Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash m$ eine Partition, wir bezeichnen mit dem gleichen griechischen Buchstaben das Gewicht $\lambda = \lambda_1 \epsilon_1 + \dots + \lambda_n \epsilon_1$. Sei \mathcal{T} das Youngtableau der Form λ mit der Standardfüllung. Wir wollen

$$(S^T k^n)_{\lambda} = c_{\mathcal{T}}(k^n)_{\lambda}^{\otimes m}$$

berechnen. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis des k^n , die Vektoren

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n\}$$

bilden eine Basis von $(k^n)^{\otimes m}$ von Eigenvektoren für T_n . Davon bilden diejenigen Tensoren, bei denen als Index 1 genau λ_1 -mal auftritt, der Index 2 genau λ_2 -mal auftritt etc. eine Basis \mathbb{B}_λ von $(k^n)_{\lambda}^{\otimes m}$.

Sei \mathcal{D} das Young Diagramm der Form λ , und sei $\check{\lambda}_1$ die Anzahl der Kästchen in der ersten Spalte von \mathcal{D} , sei $\check{\lambda}_2$ die Anzahl der Kästchen in der zweiten Spalte von \mathcal{D} etc. Dann ist $\check{\lambda} = (\check{\lambda}_1, \dots, \check{\lambda}_t)$ wieder eine Partition von m , genannt die duale Partition zu λ . Dabei ist $\check{\lambda}_1$ die Länge der Partition.

a) Zeige: Ist die Länge der Partition $\check{\lambda}_1$ größer als n , dann ist $S^\lambda k^n = 0$.

Im Folgenden sei $\check{\lambda}_1 \leq n$.

b) Zeige: Für einen Vektor in \mathbb{B}_λ gilt $b_{\mathcal{T}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m} = 0$ falls nicht jeweils die ersten $\check{\lambda}_1$ und dann die nächsten $\check{\lambda}_2$ etc. paarweise verschieden sind.

c) Zeige: Hat $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}$ die im Teil b) aufgeführte Eigenschaft, so ist

$$b_{\mathcal{T}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m} = \pm b_{\mathcal{T}} e_1 \otimes e_2 \otimes \dots \otimes e_{\check{\lambda}_1} \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes \dots \otimes e_{\check{\lambda}_2} \otimes \dots \otimes \dots \otimes \dots \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes \dots \otimes e_{\check{\lambda}_t}.$$

d) Folgere: $\dim(S^{\mathcal{T}} k^n)_\lambda = 1$.

Die nächste Frage ist: *Wie hängen $P_{\mathcal{T}}, Q_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}$ von \mathcal{T} ab?* Sei \mathcal{S} ein weiteres Youngtableau, von der gleichen Form $\lambda \vdash m$ wie \mathcal{T} . Sei $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ die Permutation, die eindeutig bestimmt ist durch die Vorschrift, daß die Einträge in den Kästchen von \mathcal{T} auf die Einträge in den entsprechenden Kästchen von \mathcal{S} abbildet, etwa für

$$\mathcal{T} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array} \quad \mathcal{S} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 & 7 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{ist } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Es folgt unmittelbar: $\tau \in P_{\mathcal{T}}$ (d.h., vertauscht nur Zahlen, die jeweils in der gleichen Zeilen in \mathcal{T} stehen) dann und nur dann, wenn $\sigma\tau\sigma^{-1} \in P_{\mathcal{S}}$ (d.h., vertauscht nur Zahlen die jeweils in der gleichen Zeilen in \mathcal{S} stehen). Ebenso sieht man: $\tau \in Q_{\mathcal{T}} \Leftrightarrow \sigma\tau\sigma^{-1} \in Q_{\mathcal{S}}$. Damit folgt: $a_{\mathcal{S}} = \sigma a_{\mathcal{T}} \sigma^{-1}$, $b_{\mathcal{S}} = \sigma b_{\mathcal{T}} \sigma^{-1}$, $c_{\mathcal{S}} = \sigma c_{\mathcal{T}} \sigma^{-1}$ und

$$S^{\mathcal{S}} k^n = \text{Im } c_{\mathcal{S}} = \text{Im } (\sigma c_{\mathcal{T}} \sigma^{-1}) = \sigma(\text{Im } c_{\mathcal{T}}) = \sigma(S^{\mathcal{T}} k^n).$$

Da σ ein Automorphismus von $(k^n)^{\otimes m}$ ist, der mit der GL_n vertauscht, definiert er einen GL_n -äquivalenten Isomorphismus zwischen den Untermoduln

$$\sigma : S^{\mathcal{T}} k^n = \text{Im } c_{\mathcal{T}} \longrightarrow \text{Im } c_{\mathcal{S}} = S^{\mathcal{S}} k^n.$$

Zusammengefaßt erhalten wir:

Satz 3.2.1 Die GL_n -Untermodule $S^T k^n \subset (k^n)^{\otimes m}$ für Youngtableaux der gleichen Form sind zueinander isomorph. Der Isomorphietyp hängt also nur von der Form ab und wird mit $S^\lambda k^n$ bezeichnet. Ist die Länge der Partition größer als n , so ist $S^\lambda k^n = 0$, ansonsten hat der Gewichtsraum $(S^\lambda k^n)_\lambda$ zum Gewicht $\lambda = \lambda_1 \epsilon_1 + \dots + \lambda_r \epsilon_r$ die Dimension 1, insbesondere ist $S^\lambda k^n \neq 0$.

Sei G eine affine algebraische Gruppe und sei \mathcal{C}_G^f die Kategorie der endlichdimensionalen rationalen Darstellungen von G , d.h., die Objekte $\text{Ob } \mathcal{C}_G^f$ der Kategorie sind die endlichdimensionalen rationalen Darstellungen $\rho : G \rightarrow GL(V)$, und die Morphismen $\text{Mor } \mathcal{C}_G^f$ in der Kategorie sind die G -äquivarianten Homomorphismen $\text{Hom}_G(V, U)$ von V nach U für $V, U \in \mathcal{C}_G^f$. Sei nun $\lambda \vdash m$ eine Partition, sei \mathcal{T} das Tableau von der Form λ mit der Standardfüllung.

Für die Gruppe $GL(V)$ ist die Darstellung $\psi : GL(V) \rightarrow GL(S^T V)$ (mit $S^T V \subset V^{\otimes m}$) eine endlichdimensionale rationale Darstellung. Damit ist auch die Komposition $\psi \circ \rho : G \rightarrow GL(S^T V)$ eine rationale endlichdimensionale Darstellung. Da sie bis auf Isomorphie ja nicht von der Auswahl des Tableaux sondern nur von der Partition λ abhängt, schreibt man (nicht ganz korrekt) einfach $S^\lambda V$ für den Darstellungsraum und $S^\lambda \rho$ für die Darstellungsabbildung $\psi \circ \rho$.

Übung 3.2.6 Zeige: Die Abbildung $\text{Ob } \mathcal{C}_G^f \rightarrow \text{Ob } \mathcal{C}_G^f$, gegeben durch $V \mapsto S^\lambda V$ für eine festgewählte Partition λ , definiert einen Funktor $S^\lambda : \mathcal{C}_G^f \rightarrow \mathcal{C}_G^f$.

Definition 3.2.1 Der Funktor $S^\lambda : \mathcal{C}_G^f \rightarrow \mathcal{C}_G^f$ wird der *Schurfunktor* zur Partition λ genannt.

Kehren wir zurück zur GL_n und versuchen, die Darstellung auf $(k^n)^{\otimes m}$ genauer zu verstehen. Zunächst noch zur Erinnerung: Man nennt (für eine beliebige Gruppe über einem beliebigen Körper) eine G -Darstellung V *einfach*, wenn sie außer V und 0 keine G -Untermodule hat. Eine Darstellung wird *halbeinfach* genannt, wenn sie die direkte Summe von einfachen Untermodule ist.

Beispiel 3.2.2 Die endlichdimensionalen rationalen Darstellungen des Torus T_n sind alle halbeinfach (siehe Korollar 3.1.1).

Übung 3.2.7 Zeige, daß die folgenden Aussagen über einem G -Modul V äquivalent sind:

a) V ist halbeinfach.

- b) Zu jedem G -Untermodul $U \subset V$ gibt es ein Komplement, das wieder ein G -Untermodul ist.
c) V ist die Summe von einfachen Untermoduln.

Die endlichdimensionalen Darstellungen der Gruppe \mathfrak{S}_m , und damit die des Gruppenrings $k[\mathfrak{S}_m]$, sind die direkte Summe von einfachen Darstellungen. Seien $\phi : \mathfrak{S}_m \rightarrow GL((k^n)^{\otimes m})$ und $\rho_m : GL_n \rightarrow GL((k^n)^{\otimes m})$ die Darstellungsabbildungen. Weiter sei

$$\text{End}_{\mathfrak{S}_m}((k^n)^{\otimes m}) \subset \text{End}((k^n)^{\otimes m})$$

die Unteralgebra der Endomorphismen, die mit der Aktion der \mathfrak{S}_m vertauschen, und sei

$$\text{End}_{GL_n}((k^n)^{\otimes m}) \subset \text{End}((k^n)^{\otimes m})$$

die Unteralgebra der Endomorphismen, die mit der Aktion der GL_n vertauschen. Wir haben offensichtlich:

$$\langle \phi(k[\mathfrak{S}_m]) \rangle \subseteq \text{End}_{GL_n}((k^n)^{\otimes m}) \text{ und } \langle \rho_m(GL_n) \rangle \subseteq \text{End}_{\mathfrak{S}_m}((k^n)^{\otimes m}). \quad (3.3)$$

Hier bedeutet das geklammerte $\langle A \rangle$ die von A erzeugte Unteralgebra.

Theorem 3.2.1 *In 3.3 hat man in beiden Fällen sogar Gleichheit, d.h., $\langle \rho_m(GL_n) \rangle$ ist der Zentralisator von $\langle \phi(k[\mathfrak{S}_m]) \rangle$ in $\text{End}((k^n)^{\otimes m})$ und umgekehrt.*

Beweis. Wir haben einen natürlichen Homomorphismus

$$\phi : \left(\text{End}(k^n) \right)^{\otimes m} \rightarrow \text{End}((k^n)^{\otimes m}),$$

der offensichtlich injektiv ist. Da beide Räume die gleiche Dimension haben, ist es ein Isomorphismus. Weiter rechnet man leicht nach, daß unter diesem Isomorphismus die Matrizen $\rho_m(g) \in \text{End}((k^n)^{\otimes m})$ durch ϕ^{-1} auf die Tensoren $g \otimes \dots \otimes g$ in $(\text{End}(k^n))^{\otimes m}$ abgebildet werden. Weiter induziert ϕ^{-1} einen Isomorphismus

$$\phi^{-1} : \text{End}_{\mathfrak{S}_m}((k^n)^{\otimes m}) \rightarrow \left(\left(\text{End}(k^n) \right)^{\otimes m} \right)^{\mathfrak{S}_m},$$

wobei die \mathfrak{S}_m auf dem zweiten Raum wieder durch Permutation auf den Tensoren operiert. Die zweite Gleichheit in 3.3 folgt aus dem folgenden

Lemma 3.2.1 *Sei $X \subset V$ eine Zariski-dichte Teilmenge in einem endlichdimensionalen Vektorraum. Dann wird der Raum der symmetrischen Vektoren $\text{Sym}_m V \subset V^{\otimes m}$ aufgespannt von den Vektoren $\langle v \otimes \dots \otimes v \mid v \in X \rangle$.*

Beweis. (Lemma) Sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V , dann bilden die Tensoren $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m}$ eine Basis von $V^{\otimes m}$, die stabil ist unter der Aktion der \mathfrak{S}_m , d.h., Basiselemente werden auf Basiselemente abgebildet. In jedem Orbit

$$\mathfrak{S}_m \cdot v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_m} = \{v_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes v_{i_{\sigma(m)}} \mid \sigma \in \mathfrak{S}_m\}$$

findet man einen eindeutig bestimmten Repräsentanten der Form

$$v_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes v_n^{\otimes m_n} \quad \text{mit} \quad m_1 + m_2 + \dots + m_n = m.$$

Sei b_{m_1, \dots, m_n} die Summe der Elemente des Orbits:

$$b_{m_1, \dots, m_n} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma \cdot v_1^{\otimes m_1} \otimes \dots \otimes v_n^{\otimes m_n},$$

dann bilden die b_{m_1, \dots, m_n} eine Basis von $\text{Sym}_m V$. Sei $x = \sum_i x_i v_i$ eine Element in V , dann ist

$$x \otimes \dots \otimes x = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_n \\ m_1 + \dots + m_n = m}} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} b_{m_1, \dots, m_n}.$$

Sei $W \subseteq \text{Sym}_n V$ der Unterraum, der von den $v \otimes \dots \otimes v$ mit $v \in X$ aufgespannt wird. Ist $W \neq \text{Sym}_n V$, so gibt es ein Linearfunktion $\lambda : \text{Sym}_n V \rightarrow k$, die auf W verschwindet.

Sei $s_{m_1, \dots, m_n} = \lambda(b_{m_1, \dots, m_n}) \in k$. Wir definieren eine polynomiale Funktion P auf V wie folgt

$$P := \begin{cases} V & \longrightarrow & k \\ x = \sum_i x_i v_i & \mapsto & \lambda(x^{\otimes m}) = \sum s_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \end{cases}$$

Da λ auf W verschwindet, verschwindet natürlich P auf X . Da X Zariski-dicht ist in V , ist das nur möglich wenn $P = 0$, also $s_{m_1, \dots, m_n} = 0$ für alle $m_1 + \dots + m_n = m$, und damit folgt $\lambda = 0$. \bullet

Wir fahren fort mit dem Beweis von Theorem 3.2.1. Eine Algebra nennt man einfach, wenn sie außer dem Nullideal kein echtes beidseitiges Ideal enthält, und man nennt sie halbeinfach, wenn sie die direkte Summe von einfachen Idealen ist. Nach Wedderburns Theorem [Goodman-Wallach, Kapitel 3.3] ist jede halbeinfache Algebra A isomorph zu einer direkten Summe

von Matrizenalgebren: $A = \bigoplus \text{End}(V_\lambda)$, wobei λ eine endliche Indexmenge durchläuft. Sei $e_\lambda \in A$ das Element, daß zur identischen Abbildung id_λ in $\text{End}(V_\lambda)$ gehört. Dann zerfällt jede endlichdimensionale Darstellung von A : $\psi : A \rightarrow \text{End}(W)$ in die direkte Summe $W = \bigoplus W^\lambda$, wobei $W^\lambda = \psi(e_\lambda)W$ isomorph ist zu $\text{Hom}(V_\lambda, W) \otimes V_\lambda$ durch

$$\text{Hom}_A(V_\lambda, W) \otimes V_\lambda \longrightarrow W, \quad \phi \otimes v \mapsto \phi(v).$$

Bei der Gruppenalgebra $k[G]$ einer endlichen Gruppe G entspricht die Zerlegung von $k[G]$ als $G \times G$ -Modul genau der Zerlegung in beidseitige Ideale, insbesondere ist die Algebra also halbeinfach. Ist $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G , dann ist das Bild von $k[G]$ wieder eine halbeinfache Algebra (da der Kern ein beidseitiges Ideal ist). In diesem Fall kann man das Doppelkommutator-Theorem anwenden.

Theorem 3.2.2 (Goodman-Wallach, Kapitel 3.3) *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und sei $A \subset \text{End}(V)$ eine halbeinfache Unteralgebra, und sei $B = \text{End}_A(V)$ die Unteralgebra der Endomorphismen, die mit A vertauschen. Dann ist B selbst wieder halbeinfach, und $A = \text{End}_B(V)$. Weiter ist V isomorph zu*

$$\text{Hom}_A(V_\lambda, W) \otimes V_\lambda \longrightarrow W, \quad \phi \otimes v \mapsto \phi(v),$$

wobei λ die (paarweise verschiedenen) irreduziblen Darstellungen der Algebra A durchläuft, und die $\text{Hom}_A(V_\lambda, W)$ irreduzible Darstellungen der Algebra B sind, auch wieder paarweise verschieden.

Wir haben bereits gezeigt:

$$\langle \rho_m(GL_n) \rangle = \text{End}_{\mathfrak{S}_m}((k^n)^{\otimes m})$$

Das Doppelkommutatortheorem besagt

$$\langle \phi(k[\mathfrak{S}_m]) \rangle = \text{End}_{GL_n}((k^n)^{\otimes m}),$$

dies ist genau die Gleichheit in der ersten Inklusion in 3.3. •

Das Doppelkommutator-Theorem gibt noch genauer Auskunft: Es besagt, daß $(k^n)^{\otimes m}$ als $\mathfrak{S}_m \times GL_n$ -Darstellung in die direkte Summe von irreduziblen Darstellungen zerfällt:

$$(k^n)^{\otimes m} \simeq \bigoplus W_\mu \otimes V_\mu,$$

Nun wissen wir aus Übung 3.2.4, daß, als \mathfrak{S}_m -Modul,

$$(k^n)^{\otimes m} = \bigoplus_{\lambda \vdash m} k[\mathfrak{S}_m] \text{Im } c_{T_\lambda}$$

und $W_\lambda = k[\mathfrak{S}_m] \text{Im } c_{T_\lambda}$ ist die direkte Summe von irreduziblen Darstellungen isomorph zu U_λ . Als GL_n -Modul ist es eine Summe von Darstellungen, die alle isomorph sind zu $S^\lambda k^n = \text{Im } c_{T_\lambda}$. Wäre diese Darstellung nicht irreduzibel, so wäre sie die direkte Summe von irreduziblen Darstellungen, die alle zueinander isomorph sind. Aber $\dim(S^\lambda k^n)_\lambda = 1$, und somit ist notwendigerweise $S^\lambda k^n$ irreduzibel. Es folgt:

Theorem 3.2.3 *Als $\mathfrak{S}_m \times GL_n$ -Modul ist*

$$(k^n)^{\otimes m} \simeq \bigoplus_{\lambda \vdash m} U_\lambda \otimes S^\lambda k^n,$$

wobei die U_λ irreduzible \mathfrak{S}_m -Moduln sind und die $S^\lambda k^n$ sind irreduzible GL_n -Moduln, alle paarweise nicht isomorph.

Zusammen mit Übung 3.3.2 folgt:

Korollar 3.2.1 *Die endlichdimensionalen rationalen Darstellungen von der Gruppe GL_n , die sich als Subquotienten (d.h. als G -Untermodule eines Quotienten) von direkten Summen von Darstellungen der Form $(k^n)^{\otimes m}$ beschreiben lassen, sind halbeinfach, und die einfachen sind alle von der Form $S^\lambda k^n$, wobei $\lambda \vdash m$ eine Partition der Länge $\leq n$ ist.*

3.3 Komplexe Darstellungen, hermitesche Formen

Sei $(,)$ die standardhermitesche Form auf dem \mathbb{C}^n . Die hermiteschen Matrizen sind die Matrizen mit der Eigenschaft $(gv, u) = (v, gu)$ für alle $u, v \in \mathbb{C}^n$, oder, anders gesagt, wenn ${}^t \bar{g} = g^{-1}$.

Wir nennen eine abgeschlossene Untergruppe (in der Zariski-Topologie) $G \subset GL_n$ *quasi-hermitisch* wenn mit jeder Matrix $g \in G$ auch die Matrix ${}^t \bar{g}$ in G liegt. Die quasihermiteschen Gruppen haben die folgende besondere Eigenschaft:

Satz 3.3.1 *Ist $U \subset k^n$ ein G -Untermodule für eine quasihermitesche Gruppe, dann ist das orthogonale Komplement $U^\perp = \{v \in k^n \mid (U, v) = 0\}$ wieder ein G -Untermodule.*

Beweis. Ist $v \in U^\perp$ und $g \in G$, so gilt wegen ${}^t\bar{g} \in G$:

$$(u, gv) = ({}^t\bar{g}u, v) = 0 \quad \forall u \in U,$$

also ist auch $gv \in U^\perp$. •

Übung 3.3.1 Zeige: Die klassischen Gruppen $SL_n(\mathbb{C})$, $Sp_{2m}(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{C})$ und $SO_n(\mathbb{C})$, definiert ins Abschnitt 1.6, sind alle quasihermitisch.

Als unmittelbare Folge aus Satz 3.3.1 und der Übung 3.2.7 erhält man:

Korollar 3.3.1 *Ist das Bild der Darstellungsabbildung $\rho : G \rightarrow GL_n$ eine quasihermitesche Untergruppe, so ist die Darstellung halbeinfach.*

Halbeinfache Darstellungen verhalten sich gut bezüglich Untermoduln, Summenbildung, Bilder und Kernen von Morphismen:

Übung 3.3.2 Zeige: a) Sind $U, V \subset W$ G -Untermoduln mit U halbeinfach und V einfach, so ist entweder $V \subset U$ oder $U \cap V = 0$, und somit ist $U + V$ wieder halbeinfach.

b) Ist $\phi : V \rightarrow W$ ein G -äquivarianter Homomorphismus und ist V einfach, so ist entweder $\text{Ker } \phi = 0$ oder $\text{Ker } \phi = V$.

c) Ist $\phi : V \rightarrow W$ ein G -äquivarianter Homomorphismus und ist V halbeinfach, so ist $\phi(V)$ halbeinfach.

d) Ein Untermodul eines halbeinfachen G -Moduls ist halbeinfach.

e) Sind $U_j \subset W$, $j = 1, \dots, m$, halbeinfache Moduln, so ist $\sum_{j=1}^m U_j \subset W$ halbeinfach.

Die nächste Frage ist: Wie konstruiert man aus halbeinfachen Darstellungen neue halbeinfachen Darstellungen. Hier bietet das Tensorprodukt zusammen mit der Eigenschaft quasihermitisch zu sein eine Möglichkeit:

Lemma 3.3.1 a) *Die duale Darstellung einer quasihermiteschen Darstellung ist wieder quasihermitisch, die direkte Summe von quasihermiteschen Darstellungen ist wieder quasihermitisch.*

b) *Seien $\rho_j : G \rightarrow GL_{n_j}(\mathbb{C})$, $j = 1, \dots, r$, endlichdimensionale rationale Darstellungen einer affinen algebraischen Gruppe, so daß $\rho_j(G) \subset GL_{n_j}(\mathbb{C})$ quasihermitisch ist. Dann ist das Bild*

$$\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_r(G) \subset GL\left((\mathbb{C}^{n_1}) \otimes \dots \otimes (\mathbb{C}^{n_r})\right)$$

wieder quasihermitisch, wobei auf $(\mathbb{C}^{n_1}) \otimes \dots \otimes (\mathbb{C}^{n_r})$ das Tensorprodukt der standardhermiteschen Formen genommen wird, und als Basis das Tensorprodukt der kanonischen Basen, versehen mit der lexikographischen Ordnung.

Beweis. Wir geben den Beweis für $r = 2$. Sei $n = n_1, m = n_2$, sei $\rho_1(g) = (a_{i,j})$ und sei $\rho_2(g) = (b_{i,j})$. Sei $\mathbb{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis des \mathbb{C}^n und sei $\mathbb{B}_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$ die kanonische Basis des \mathbb{C}^m . Bezüglich der Basis

$$\mathbb{B} = \{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_1 \otimes f_3, \dots, e_1 \otimes f_m, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_n \otimes f_{m-1}, e_n \otimes f_m\}$$

hat dann die Matrix von $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)$ die Form einer Blockmatrix mit n^2 Blöcken, und die Blöcke sind alle von der Form $a_{i,j}\rho_2(g)$:

$$\rho_1 \otimes \rho_2(g) = \begin{pmatrix} a_{1,1}\rho_2(g) & a_{1,2}\rho_2(g) & \dots & a_{1,n}\rho_2(g) \\ a_{2,1}\rho_2(g) & a_{2,2}\rho_2(g) & \dots & a_{2,n}\rho_2(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}\rho_2(g) & a_{n,2}\rho_2(g) & \dots & a_{n,n}\rho_2(g) \end{pmatrix}$$

Es folgt sofort: ${}^t(\overline{(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)}) = {}^t(\overline{\rho_1(g)}) \otimes {}^t(\overline{\rho_2(g)})$, also ist die Untergruppe $(\rho_1 \otimes \rho_2)(G)$ von der $GL(\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m)$ (bezüglich der obigen Wahl der Basis) wieder quasihermitsch. •

Aus den Übungen 3.2.7 und 3.3.1 sowie Korollar 3.3.1 folgt somit:

Korollar 3.3.2 *Alle endlichdimensionalen rationalen Darstellungen der klassischen Gruppen $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $Sp_{2m}(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{C})$ und $SO_n(\mathbb{C})$, die sich als Subquotienten (d.h. als G -Untermodule eines Quotienten) von direkten Summen von Darstellungen der Form $(\mathbb{C}^n)^{\otimes m}$ beschreiben lassen, sind halbeinfach.*

Gruppen, für die alle endlichdimensionalen rationalen Darstellungen halbeinfach sind, nennt man *linear reduktiv*. Als nächstes stellt sich natürlich die Frage, ob wir mit den obigen Methoden bereits “alle” endlichdimensionalen rationalen Darstellungen der klassischen Gruppen bekommen, oder, anders gefragt: Sind die klassischen Gruppen linear reduktiv? Und wenn ja, wie sehen die einfachen Darstellungen aus? Um diese Probleme anzugehen, brauchen wir noch einige neue Methoden.

3.4 Rationale Darstellungen und Operationen

Eine *lokal endliche Darstellung* $\rho : G \rightarrow GL(V)$ einer Gruppe G auf einem k -Vektorraum V ist eine Darstellung mit der Eigenschaft, daß es für alle $v \in V$ einen endlichdimensionalen G -Untermodule $U \subset V$ gibt mit $v \in U$.

Eine *rationale Darstellung* $\rho : G \rightarrow GL(V)$ ist ein Paar (V, ρ) , wobei V ein k -Vektorraum ist, $\rho : G \rightarrow GL(V)$ ist eine lokal endliche Darstellung,

und die Einschränkung $\rho|_U : G \rightarrow GL(U)$, $g \mapsto \rho(g)|_U$ ist eine endlichdimensionale rationale Darstellung von G für jeden endlichdimensionalen G -Untermodul $U \subset V$.

Übung 3.4.1 Zeige: Die Darstellungen in den Abschnitten 1.1 und 1.3 sind rational im obigen Sinne.

Typische Beispiele für rationale Darstellungen tauchen im Zusammenhang von Operationen auf affinen Varietäten auf. Zur Erinnerung: Eine Operation auf einer Menge X ist eine Abbildung $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx$, so daß $ex = x$ für alle x in X und $(gh)x = g(hx)$ für alle x in X und $g, h \in G$.

Definition 3.4.1 Sei G eine affine algebraische Gruppe. Eine *affine G -Varietät* ist eine affine Varietät X mit einer Gruppenoperation von G , so daß die Operation $G \times X \rightarrow X$ durch einem Morphismus von affinen Varietäten gegeben wird.

Beispiel 3.4.1 Sei $G = SL_2$, sei $X = \underbrace{k^2 \oplus \dots \oplus k^2}_{k\text{-mal}}$. Dann definiert

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, v_1, v_2, \dots, v_k) \mapsto (gv_1, gv_2, \dots, gv_k)$$

auf X die Struktur einer affinen G -Varietät.

Übung 3.4.2 Sei X eine affine G -Varietät. Mit $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ wird der Stabilisator von $x \in X$ in G bezeichnet. Zeige: $G_x \subset G$ ist abgeschlossen, also wieder eine affine algebraische Gruppe.

Beispiel 3.4.2 Die Linksmultiplikation: $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h = gh$, die Rechtsoperation $g \cdot h = hg$, und die Linksoperation von $G \times G$ durch $(g_1, g_2) \cdot h = g_1 h g_2^{-1}$ sind Beispiele für verschiedene Strukturen auf G als affine G -Varietät respektive $G \times G$ -Varietät.

Sei X eine affine G -Varietät und sei $g \in G$. Die Funktion ${}^g f : X \rightarrow k$, $x \mapsto f(g^{-1}x)$ ist wieder eine reguläre Funktion, da $\begin{cases} X \rightarrow X \\ x \mapsto gx \end{cases}$ ein Isomorphismus von affinen Varietäten ist.

Satz 3.4.1 Die Operation von G auf $k[X]$ durch $f \mapsto {}^g f$ definiert eine rationale Darstellung, und G operiert durch Algebraautomorphismen auf $k[X]$.

Beweis. Da die Abbildung $\phi : G \times X \rightarrow X$ ein Morphismus von affinen Varietäten ist, bekommt man einen induzierten Algebrhomomorphismus

$$\phi^\sharp : k[X] \rightarrow k[G] \otimes k[X].$$

Ist $W \subset k[X]$ ein endlichdimensionaler Unterraum, so gibt es $f_1, \dots, f_r \in k[X]$ mit $\phi^\sharp(W) \subset \sum_{j=1}^r k[G] \otimes f_j$. Sei nun $f \in W$ und $\phi^\sharp(f) \subset \sum_{j=1}^r q_j \otimes f_j$ mit $q_j \in k[G]$. Dann ist aber

$${}^g f(x) = f(g^{-1}x) = \phi^\sharp(f)(g^{-1}, x) = \sum_{j=1}^r (q_j \otimes f_j)(g^{-1}, x) = \sum_{j=1}^r q_j(g^{-1})f_j(x),$$

und damit folgt: ${}^g f = \sum_{j=1}^r q_j(g^{-1})f_j$ für alle $g \in G$. Somit ist $GW \subset \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ in einem endlichdimensionalen G -Unterraum enthalten, und da die Funktionen $g \mapsto q_j(g^{-1})$ regulär sind auf, ist diese Darstellung von G auf W rational (vergleiche Übung 3.1.5).

Da ${}^g(f f')(x) = (f f')(g^{-1}x) = f(g^{-1}x)f'(g^{-1}x) = ({}^g f {}^g f')(x)$ für alle $x \in X$, folgt: ${}^g(f f') = {}^g f {}^g f'$. Damit zeigt man leicht, daß $f \rightarrow {}^g f$ ein Algebrautomorphismus ist •

Von besonderem Interesse ist dabei Aktion von G auf $k[G]$, denn:

Satz 3.4.2 *Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine endlichdimensionale rationale Darstellung einer affinen algebraischen Gruppe. Dann gibt es eine G -äquivariante Monomorphismus $V \hookrightarrow \underbrace{k[G] \oplus \dots \oplus k[G]}_{\dim V \text{ Kopien}}$.*

Beweis. Sei $\ell \in V^*$ und sei $v \in V$. Die Abbildung $\ell_v : G \rightarrow k, g \mapsto \ell(g^{-1}v)$, ist eine reguläre Funktion auf G . Beachte, für $h \in G$ gilt:

$${}^h \ell_v(g) = \ell_v(h^{-1}g) = \ell((h^{-1}g)^{-1}v) = \ell(g^{-1}hv) = \ell_{hv}(g), \quad (3.4)$$

also haben wir ${}^h \ell_v = \ell_{hv}$. Wähle eine Basis $\ell_1, \dots, \ell_m \in V^*$ ($m = \dim V$) des Dualraumes, und betrachte die lineare Abbildung:

$$V \longrightarrow \underbrace{k[G] \oplus \dots \oplus k[G]}_{\dim V \text{ Kopien}}, \quad v \mapsto (\ell_v^1, \ell_v^2, \dots, \ell_v^m).$$

Diese Abbildung ist offensichtlich injektiv und G -äquivariant (wegen 3.4). •

Satz 3.4.3 *Jede affine G -Varietät X ist G -isomorph zu einer Zariski abgeschlossenen Teilmenge einer rationalen endlichdimensionalen Darstellung. Insbesondere ist jede affine algebraische Gruppe eine lineare algebraische Gruppe.*

Beweis. Der Ring $k[X]$ ist endlich erzeugt, da die Aktion von G auf $k[X]$ rational ist, gibt es einen endlichdimensionalen G -Untermodul $W \subset k[X]$, der ein Erzeugendensystem von $k[X]$ enthält.

Sei $V = W^*$ der Dualraum von W , dann ist die Darstellung von G auf V rational (Übung 3.1.6). Die Inklusion von $W \hookrightarrow k[X]$ induziert wegen der universellen Eigenschaft der symmetrischen Algebra eine kanonische Abbildung von Algebren

$$\phi^\sharp : k[V] = S^\bullet W \rightarrow k[X] \text{ und damit einen Morphismus } \phi : X \rightarrow V.$$

Die Abbildung ϕ^\sharp ist surjektiv, da W ein Erzeugendensystem von $k[X]$ enthält. Da $k[X]$ reduziert ist, ist $\text{Ker}\phi^\sharp$ ein Radikalideal. Sei \tilde{X} die Nullstellenmenge des Ideals, also $\tilde{X} = \mathcal{V}(\text{Ker}\phi^\sharp) \subset V$. Dann ist $k[\tilde{X}] = k[V]/\text{Ker}\phi^\sharp \simeq k[X]$. Es folgt daher: $\text{Im}\phi = \tilde{X}$, und $\phi : X \rightarrow \tilde{X} \subset V$ ist ein Isomorphismus auf das Bild.

Es bleibt die G -Äquivarianz zu zeigen: Sei $x \in X$, dann ist nach Konstruktion das Bild $\phi(x) \in V = W^*$ die lineare Form $\lambda_x : W \rightarrow k$ definiert durch auswerten, d.h., $W \ni f \mapsto f(x)$. Es gilt dann:

$${}^g\lambda_x(f) = \lambda_x(g^{-1} \cdot f) = \lambda_x({}^{-g^{-1}}f) = {}^{-g^{-1}}f(x) = f(gx) = \lambda_{gx}(f),$$

also $g\phi(x) = \phi(gx)$.

Sei nun $X = G$ mit der Linksmultiplikation, und seien V, W wie oben. Betrachte die Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$. Da $G \subset V$ folgt aus $\rho(g) = \text{id}_{GL(V)}$ und der G -Äquivarianz von ϕ , daß $\phi(\text{id}_G) = \rho(g)\phi(\text{id}_G) = \phi(\text{id}_G)$, und somit $g = \text{id}_G$. Folglich ist ρ injektiv, und somit ein Isomorphismus auf die lineare algebraische Gruppe $\rho(G)$ (Satz 3.0.4). •

Eine andere Konsequenz des Satzes 3.4.2 ist die lineare Reduktivität der quasihermiteschen linearen algebraischen Gruppen, wie zum Beispiel der $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $Sp_{2n}(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{C})$ und der $SO_n(\mathbb{C})$ (und natürlich auch der endlichen Gruppen).

Theorem 3.4.1 *Sei $k = \mathbb{C}$ und sei $G \subset GL(V)$ eine lineare algebraische Gruppe für die die Einbettung quasihermitsche ist. Dann ist G linear reduktiv, d.h., jede endlichdimensionale rationale Darstellung ist die direkte Summe von einfachen G -Untermoduln.*

Beweis. Sei V eine endlichdimensionale rationale Darstellung. Wir haben gesehen, daß es endlichdimensionale G -stabile Untermoduln $W_i \subset \mathbb{C}[G]$ gibt (Satz 3.4.2), so daß $V \subset W_1 \oplus \dots \oplus W_m$. Nach Übung 3.3.2 reicht es daher

zu zeigen, daß jeder endlichdimensionale G -stabile Untermodul $W \subset \mathbb{C}[G]$ die direkte Summe von einfachen Untermoduln ist.

Durch die Einbettung $G \subset GL(V)$ wird die $GL(V)$ zu einer affinen G -Varietät (Linksmultiplikation). Sei f_1, \dots, f_r eine Basis von W , und seien $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r \in \mathbb{C}[GL(V)]$ Urbilder der Einschränkungabbildung $\tilde{f} \rightarrow f = \tilde{f}|_G$ für $\tilde{f} \in \mathbb{C}[G]$. Sei $\tilde{W} \subset \mathbb{C}[GL(V)]$ ein G -stabiler Untermodul, der die \tilde{f}_j enthält. Da die Restriktionsabbildung G -äquivariant ist, reicht es zu zeigen (Übung 3.3.2), daß \tilde{W} die direkte Summe von einfachen Moduln ist.

Die Determinantenfunktion $\det \in \mathbb{C}[GL(V)]$ und deren Potenzen spannen jeweils 1-dimensionalen G -Untermodul $\mathbb{C}_{\det^m} = \mathbb{C}\det^m$ auf, und für $g \in G$ gilt:

$$(g \cdot \det^m)(h) = ({}^g \det^m)(h) = (\det g^{-1})^m \det^m(h) \Rightarrow g \cdot \det^m = (\det g^{-1})^m \det^m.$$

Für ein $m \in \mathbb{Z}$ sei

$$\tilde{W}_m = \det^m \tilde{W} = \{\det^m \cdot w \mid w \in \tilde{W}\}.$$

Man sieht leicht, daß \tilde{W}_m als G -Modul isomorph ist zu $\tilde{W} \otimes \mathbb{C}\det^m$. Insbesondere: \tilde{W} ist halbeinfach dann und nur dann wenn \tilde{W}_m halbeinfach ist für irgendein m .

Damit können wir (E) annehmen: $\tilde{W} \subset \mathbb{C}[M_n]$, wobei G auf M_n durch Linksmultiplikation operiert. Als Darstellung ist $M_n \simeq \mathbb{C}^n \oplus \dots \oplus \mathbb{C}^n$ und damit quasihermitisch (Übung 3.3.1), und $\mathbb{C}[M_n] = \bigoplus_{m \geq 0} S^m(M_n)^*$. Jedes der $S^m(M_n)^*$ ist wieder quasihermitisch (Übung 3.3.1), und da \tilde{W} bereits in einer endlichen Summe von $S^m(M_n)^*$ liegt, ist \tilde{W} ein G -Untermodul einer halbeinfachen Darstellung und damit selbst halbeinfach. \bullet

Übung 3.4.3 Sei $\text{Char } k = 0$. Zeige: Die bilineare Abbildung:

$$\Lambda^{n-1} k^n \times k^n \longrightarrow k \simeq \Lambda^n k^n, \quad (v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}, u) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \wedge u$$

induziert einen Isomorphismus (von Vektorräumen) $(k^n)^* \simeq \Lambda^{n-1} k^n$ und einen GL_n -äquivarianten Isomorphismus $(k^n)^* \simeq \Lambda^{n-1} k^n \otimes k_{\det^{-1}}$.

Korollar 3.4.1 Sei $\text{Char } k = 0$, dann ist jede endlichdimensionale rationale Darstellung der Gruppe GL_n halbeinfach, und jede einfache endlichdimensionale rationale Darstellung ist isomorph zu $S^\lambda k^n \otimes k_{\det^\ell}$ für ein $\ell \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ und einer Partition $\lambda \vdash m$ der Länge $\leq n$.

Beweis. Der Beweis verläuft genauso wie oben, nur man benützt Übung 3.4.3 und Korollar 3.2.1. Aus Übung 3.4.3 folgt weiterhin, daß, bis auf tensorieren mit $k_{\det^{-1}}$, jede endlichdimensionale Darstellung in $k[GL_n]$ ein Subquotient von Summen von Tensorprodukten von Darstellungen der Form $\Lambda^{n-1}k^n$ sind. Da letztere Untermoduln von $(k^n)^{\otimes n-1}$, müssen nach Korollar 3.2.1 diese von der Form $S^\lambda k^n$ sein. •

Für den Rest des Abschnitts sei wieder $\text{Char } k = 0$ und sei G eine linear reduktive affine algebraische Gruppe. Sei Ω die Menge aller Isomorphieklassen. Für $\omega \in \Omega$ schreiben wir $W \in \omega$ für einen einfachen G -Modul aus der Isomorphieklasse.

Ist V eine rationale Darstellung und $\omega \in \Omega$, so sei $V_{(\omega)}$ die Summe aller G -Untermoduln, die in der Klasse von ω liegen:

$$V_{(\omega)} = \sum_{\substack{W \subset V \\ W \in \omega}} W$$

Man nennt $V_{(\omega)}$ die *isotypische Komponente* von V vom Typ ω . Wir haben offensichtlich

$$V = \bigoplus_{\omega \in \Omega} V_{(\omega)}.$$

Dies wird die *isotypische Zerlegung* von V genannt. Beachte, diese Zerlegung ist kanonisch. Angewendet auf affine G -Varietäten erhalten wir:

Satz 3.4.4 *Sei G linear reduktiv und X eine affine G -Varietät. Dann hat $k[X]$ eine eindeutig festgelegte kanonische Zerlegung $k[X] = \bigoplus_{\omega \in \Omega} k[X]_{(\omega)}$ in isotypische Komponenten.*

Sei $0 \in \Omega$ die Klasse der trivialen Darstellung, dann ist $k[X]_{(0)}$ eine Unteralgebra, genannt der Ring der invarianten Funktionen, und für jedes $\omega \in \Omega$ ist $k[X]_{(\omega)}$ ein $k[X]_{(0)}$ -Modul.

Ist Z eine weitere affine G -Varietät und ist $\phi : X \rightarrow Z$ ein G -äquivarianter Morphismus von affinen Varietäten, dann ist $\phi^\sharp : k[Z] \rightarrow k[X]$ ein G -äquivarianter Homomorphismus von rationalen G -Darstellungen, und

$$\phi^\sharp(k[Z]_{(\omega)}) \subset k[X]_{(\omega)}.$$

Beweis. Der erste Teil ist offensichtlich, und da G durch Algebraautomorphismen operiert sieht man leicht, daß für $f \in k[X]_{(0)}$ die Abbildung $k[X] \rightarrow k[X]$, $g \mapsto fg$ ein G -äquivarianter Homomorphismus ist. Da Homomorphismen auf einfachen Moduln entweder Isomorphismen auf das Bild sind oder die triviale Abbildung ergeben, folgt, daß $k[X]_{(\omega)}$ ein $k[X]_{(0)}$ -Modul ist. Da ϕ G -äquivariant ist, rechnet man leicht nach, daß auch

$\phi^\#$ G -äquivariant ist. Das gleiche Argument wie oben zeigt dann, daß $\phi^\#(k[Z]_{(\omega)}) \subset k[X]_{(\omega)}$. \bullet

Als einen Spezialfall betrachten wir die Aktion von G auf G durch Linksmultiplikation, die induzierte rationale Darstellung von G auf $k[G]$ nennt man auch die *reguläre Darstellung*. Zunächst eine kleine

Übung 3.4.4 Sind G, H zwei Gruppen, so sind die einfachen $G \times H$ Moduln genau die Moduln $U \otimes V$, wobei U ein einfacher G und V ein einfacher H -Modul ist.

Wir betrachten auch die $G \times G$ -Aktion $(g_1, g_2) \cdot h = g_1 h g_2^{-1}$ auf G und die Zugehörige isotypische Zerlegung von $k[G]$. Es folgt aus der Übung 3.4.4, daß man die Zerlegung der regulären Darstellung einfach aus der der Zerlegung bezüglich $G \times G$ zurückerhält.

Theorem 3.4.2 Sei $k[G] = \bigoplus_{\omega \in \Omega} k[G]_{(\omega)}$ die durch die reguläre Darstellung von G auf $k[G]$ induzierte Zerlegung in Isotypische Komponenten. Dann ist jede Komponente ein irreduzibler $G \times G$ -Modul und isomorph zu $V \otimes V^*$, wobei $V \in \omega$ ein irreduzibler G -Modul ist vom Typ ω . Insbesondere, als G -Modul bezüglich der regulären Darstellung ist $k[G]_{(\omega)} \simeq V^{\dim V}$.

Beweis. Sei $V \in \omega$, wir haben eine bilineare $G \times G$ -äquivariante Abbildung:

$$\phi : V \times V^* \rightarrow k[G], \quad (v, \ell) \mapsto \begin{cases} f_{v, \ell} : G & \longrightarrow k \\ g & \longmapsto \ell(g^{-1}v) \end{cases}$$

Die Äquivarianz folgt aus:

$$((g_1, g_2) \cdot f_{v, \ell})(h) = f_{v, \ell}(g_1^{-1} h g_2) = \ell(g_2^{-1} h g_1 v) = {}^{g_2} \ell(h(g_1 v)) = f_{g_1 v, {}^{g_2} \ell}(h).$$

Da $V \otimes V^*$ ein einfacher Modul ist und ϕ nicht trivial ist, muß

$$\phi : V \otimes V^* \rightarrow k[G]$$

injektiv sein. Beachte, daß das Bild unabhängig von der Wahl von $V \in \omega$ ist: Sei $W \in \omega$, $\psi : W \rightarrow V$ ein G -äquivarianter Isomorphismus und sei $\psi^* : V^* \rightarrow W^*$ der duale Isomorphismus. Dann gilt für $w = \psi^{-1}(v)$ und $\xi = \psi^*(\ell)$:

$$\begin{aligned} f_{w, \xi}(g) &= \xi(g^{-1}w) = \psi^*(\ell)(g^{-1}\psi^{-1}(v)) &= \ell(g^{-1}\psi(\psi^{-1}(v))) \\ & &= \ell(g^{-1}v) = f_{v, \ell}(g) \end{aligned}$$

wegen der G -Äquivarianz. Sei nun also $W \subset k[G]_{(\omega)}$ ein einfacher G -Untermodule, es bleibt zu zeigen, daß $W \subset \phi(V \otimes V^*)$.

Die Auswertung am neutralen Element id definiert eine lineare Abbildung $\xi : W \rightarrow k$, $f \mapsto f(\text{id})$. Beachte, $\xi \neq 0$, denn mit $w \in W - 0$ ist auch ${}^g w \in W$, und wäre $\xi = 0$, so folgt aus $\xi(w) = w(1) = 0$ auch $\xi({}^g w)(1) = w(g^{-1}) = 0$ für beliebiges $g \in G$. Dies ist nicht möglich, also $\xi \neq 0$.

Betrachte wie oben die Abbildung $\phi : W \otimes W^* \rightarrow k[G]$, $(w, \ell) \mapsto f_{w, \ell}$. Dann ist $f_{w, \xi}(h) = \xi(h^{-1}w) = h^{-1}w(1) = w(h)$, also $W = \{f_{w, \xi} \mid w \in W\}$. Der Modul W liegt also im Bild von ϕ und somit ist $k[G]_{(\omega)}$ isomorph zu $V \otimes V^*$ für ein $V \in \omega$. •

Übung 3.4.5 Zeige: Sei G eine affine algebraische Gruppe. Dann ist G linear reduktiv dann und nur dann $k[G]$ ein halbeinfacher G -Modul ist.

Übung 3.4.6 Zeige: Ist $\rho : GL_n \rightarrow GL(V)$ irreduzibel, so ist auch die Einschränkung von ρ auf die Gruppe $SL_n \subset GL_n$ irreduzibel (Hinweis: Benutze das Lemma von Schur). Betrachte GL_n als affine SL_n -Varietät und benütze die Restriktionsabbildung $k[GL_n] \rightarrow k[SL_n]$ um zu zeigen, daß $k[SL_n]$ halbeinfach ist. Folgere: SL_n ist linear reduktiv für alle algebraisch abgeschlossenen Körper mit $\text{Char } k = 0$.

Chapter 4

Liealgebra einer algebraischen Gruppe

In dem ganzen Kapitel ist k immer ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0.

4.1 Zariski-Tangententialraum

Sei Z eine affine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenem Körper der Char $k = 0$.

Variante I: Sei $z \in Z$, der *Zariski-Tangententialraum* an Z in z ist der Raum der Punktderivationen von $k[Z]$ in z , d.h.,

$$\begin{aligned} T_z(Z) &= \text{Der}_z(k[Z]) \\ &= \{ \delta : k[Z] \rightarrow k \mid \delta \text{ ist } k\text{-linear und } \forall f, g \in k[Z] : \\ &\quad \delta(fg) = f(z)\delta(g) + g(z)\delta(f) \} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Beispiel 4.1.1 Sei $Z = k^n$ und $z \in V$. Dann ist $k[V] = k[x_1, \dots, x_n]$, und die partiellen Ableitungen mit anschließender Auswertung in z :

$$f \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_z$$

sind Beispiele für Punktderivationen. Das multiplikative Verhalten der Punktderivationen besagt andererseits, daß $\delta \in \text{Der}_z(k[V])$ bereits vollständig bestimmt ist durch die Bilder $\delta(x_1), \dots, \delta(x_n)$ der Erzeuger der Algebra. Es folgt sofort:

$$\text{Der}_z(k[V]) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_z, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_z \right\rangle \quad (4.2)$$

Variante II: Eine andere Beschreibung erhält man wie folgt: Sei $I_z \subset k[Z]$ das maximale Ideal der in z verschwindenden Funktionen. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$T_z(Z) \simeq (I_z/I_z^2)^* = \text{Hom}_k(I_z/I_z^2, k), \quad \delta \mapsto \delta|_{I_z}. \quad (4.3)$$

Beachte: Sind $f, g \in I_z$, so ist $\delta(fg) = f(z)\delta(g) + g(z)\delta(f) = 0$, und somit ist $\delta|_{I_z^2} \equiv 0$. Und da $f - f(z) \in I_z$ für $f \in k[Z]$, ist δ durch seine Restriktion auf I_z vollständig bestimmt. Somit ist die Abbildung injektiv. Als Inverse haben wir die Abbildung:

$$(I_z/I_z^2)^* \ni \ell \mapsto \delta_\ell : k[Z] \rightarrow k, f \mapsto \ell(\overline{f - f(z)}).$$

Variante III: Eine weitere Beschreibung ist die folgende: Sei $\mathcal{O}_{z,Z}$ der lokale Ring von Z in z und sei $\mathfrak{m}_z \subset \mathcal{O}_{z,Z}$ das maximale Ideal. Dann induziert die Abbildung $k[Z] \rightarrow \mathcal{O}_{z,Z}, f \mapsto f/1$ einen Homomorphismus $I_z/I_z^2 \rightarrow \mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2$. Dieser ist injektiv, denn für $f \in I_z$ gilt: $\frac{f}{1} = \frac{h}{p} \in \mathfrak{m}_z^2 \Leftrightarrow fp = h \in I_z^2$. Da $p(z) \neq 0$ folgt $\delta(f) = 0$ für alle Derivationen und damit $f \in I_z^2$. Die Abbildung ist auch surjektiv, denn

$$\frac{f}{p} \equiv \frac{f}{p} + \frac{fp - p(z)}{p \cdot p(z)} \pmod{\mathfrak{m}_z^2} \Rightarrow \frac{f}{p} \equiv \frac{f}{1} \pmod{\mathfrak{m}_z^2}.$$

Somit ist I_z/I_z^2 isomorph zu $\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2$, und der Zariski-Tangententialraum läßt sich in der Sprache der lokalen Ringe beschreiben:

$$T_z(Z) \simeq (\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2)^* = \text{Hom}_k(\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2, k). \quad (4.4)$$

Variante IV: Als weitere Möglichkeit $T_z(Z)$ zu beschreiben sei $k[\epsilon] = k \oplus k\epsilon$ (als Algebra isomorph zu $k[x]/(x^2)$), und sei $\text{Alg}_{k,loc}(k[Z], k[\epsilon])$ der Raum der k -Algebrahomomorphismen ϕ mit $\phi(\mathfrak{m}_z) \subset k\epsilon$. Man rechnet leicht nach, daß die Abbildungen $\phi \in \text{Alg}_{k,loc}(k[Z], k[\epsilon])$ alle von der Form sind: $\phi(f) = f(z) + \epsilon\delta(f)$ für ein $\delta \in \text{Der}_z(k[Z])$, und diese Beziehung liefert einen Isomorphismus:

$$T_z(Z) \simeq \text{Alg}_{k,loc}(k[Z], k[\epsilon]). \quad (4.5)$$

Variante V: Sei $Z \subset k^n$ eine Zariski abgeschlossene affine Teilmenge, also $Z = \mathcal{V}(I)$ für ein Ideal $I \subset k[V]$. Wir identifizieren den k^n mit $T_z k^n$ durch

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \partial_v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_z$$

Ist $\partial_v(f) = 0$ für alle $f \in I$, so ist auch $\partial_v(f) = 0$ für alle $f \in \sqrt{I}$ und $\partial_v(f)$ induziert damit eine Punktderivation auf $k[Z] = k[x_1, \dots, x_n]/\sqrt{(I)}$. Ist andererseits $\delta \in \text{Der}_z(k[Z])$, so ist die Abbildung $\tilde{\delta} : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k$, $f \mapsto \delta(\bar{f})$ (mit $\bar{f} = f \bmod \sqrt{I}$ in $k[Z]$) eine Punktderivation. Es folgt die fünfte Beschreibung von $T_z Z$, sei $I = (f_1, \dots, f_r)$

$$\begin{aligned} T_z Z &= \{v \in k^n \mid \partial_v(f) = 0 \forall f \in I\} \\ &= \{v \in k^n \mid \partial_v(f_j) = 0 \forall j = 1, \dots, r\} \\ &= \{v \in k^n \mid \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_z v = 0\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

und damit die Dimensionsformel:

$$\dim T_z Z = n - \text{rg} \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_z \right)$$

Kombiniert man (4.5) mit (4.6), so bekommt man eine sehr praktische Methode, um den Tangentialraum zu berechnen:

Ersetze k^n durch $(k[\epsilon])^n = k^n \otimes_k k[\epsilon]$, den freien Modul vom Rang n über dem Ring $k[\epsilon]$. Den Polynomring $k[x_1, \dots, x_n]$ können wir als Unterring des Polynomringes $(k[\epsilon])[x_1, \dots, x_n]$ auffassen, es sind die Polynome mit Koeffizienten nur in k . Entsprechend ist können wir die Polynome auch als polynomiale Funktionen $f : (k[\epsilon])^n \rightarrow k[\epsilon]$ auffassen. Für $z, v \in k^n$ und t als Variable sei

$$f(z + tv) = f(z) + t \partial_v f \Big|_z + t^2 \dots$$

die Taylorentwicklung des Polynoms f , dann gilt ganz formal:

$$f(z + \epsilon v) = f(z) + \epsilon \partial_v f \Big|_z.$$

Variante VI: Folglich erhalten wir eine neue Beschreibung von $T_z Z$. Sei $Z = \mathcal{V}(I) \subset k^n$ und sei $I = (f_1, \dots, f_r)$. Dann ist für $z \in Z$:

$$T_z Z = \{v \in k^n \mid f_i(z + \epsilon v) = 0\}. \quad (4.7)$$

Beispiel 4.1.2 i) $T_{\text{id}} GL_n = M_n$, denn die lokalen Ringe $\mathcal{O}_{\text{id}, GL_n}$ und $\mathcal{O}_{\text{id}, M_n}$ sind gleich, somit folgt die Behauptung aus (4.2) und (4.4).

ii) Die *spezielle lineare Gruppe* SL_n (1.6.1) ist definiert als Untergruppe der GL_n durch $SL_n = \{A \in M_n(k) \mid \det A = 1\}$. Nun ist $\det(\text{id} + \epsilon A) = \det(\text{id}) + \epsilon \text{Tr } A$, es folgt also aus (4.7):

$$T_{\text{id}} SL_n = \{A \in M_n \mid \text{Tr } A = 0\}.$$

III) Die *orthogonale Gruppe* O_n (1.6.2) ist definiert als Untergruppe der GL_n durch $O_n = \{A \in GL_n \mid {}^tAJA = J\}$, wobei $J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da

$${}^t(\text{id} + \epsilon A)J(\text{id} + \epsilon A) = J \Leftrightarrow \epsilon({}^tAJ + JA) = 0 \Leftrightarrow J({}^tA)J = -A,$$

folgt:

$$T_{\text{id}}O_n = \left\{ A \in M_n \mid \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & 0 & -a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & 0 & \dots & -a_{2,2} & -a_{1,2} \\ 0 & -a_{n-1,2} & \dots & -a_{2,1} & -a_{1,1} \end{pmatrix} \right\}$$

IV) Die *spezielle orthogonale Gruppe* SO_n ist definiert als Untergruppe der O_n durch $SO_n = \{g \in O_n \mid \det g = 1\}$. Da $\det g = \pm 1$ für $g \in O_n$, folgt $SO_n^0 = O_n^0$ und somit $\mathcal{O}_{\text{id}, SO_n} = \mathcal{O}_{\text{id}, O_n}$ und daher auch (siehe 4.4):

$$T_{\text{id}}SO_n = T_{\text{id}}O_n.$$

V) Sei $n = 2m$. Die *symplektische Gruppe* Sp_{2m} (1.6.3) wird definiert als Untergruppe der GL_n durch $Sp_{2m} = \{A \in GL_n \mid {}^tA\check{J}A = \check{J}\}$, wobei

$$\check{J} = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in GL_m.$$

Da ${}^t(\text{id} + \epsilon A)\check{J}(\text{id} + \epsilon A) = \check{J} \Leftrightarrow \epsilon({}^tA\check{J} + \check{J}A) = 0 \Leftrightarrow \check{J}({}^tA)\check{J} = A$, folgt:

$$T_{\text{id}}Sp_{2m} = \left\{ A = \begin{pmatrix} U & V \\ W & X \end{pmatrix} \mid X = -J({}^tU)J, V = J({}^tV)J, U = J({}^tU)J \right\}$$

mit $U, V, W, X \in M_m$.

Für einen Beweis des folgenden Theorems siehe zum Beispiel Hartshorne, Kapitel I, Abschnitt 5. oder Eisenbud.

Theorem 4.1.1 *Sei X ein irreduzible Varietät. Dann gilt $\dim T_x X \geq \dim X$ für alle $x \in X$, und es gibt eine offene dichte Teilmenge $U \subset X$ für die gilt $\dim T_x X = \dim X$.*

Definition 4.1.1 Sei X eine irreduzible affine Varietät. Ein Punkt in dem $\dim T_x X = \dim X$ gilt heißt ein *glatter* Punkt von X .

Sei $\phi : X \rightarrow Z$ ein Morphismus von affinen irreduziblen Varietäten. Dann ist $X = \text{MaxSpec } k[X]$, $Z = \text{MaxSpec } k[Z]$, und sei $\phi^\# : k[Z] \rightarrow k[X]$ der zugehörige Algebrenhomomorphismus. Ist $x \in X$ mit maximalem Ideal $I_x \subset k[X]$, so gilt für $z = \phi(x)$: $I_z = (\phi^\#)^{-1}(I_x) \subset k[Z]$. Man bekommt so einen induzierten Algebrenhomomorphismus:

$$\phi^\# : \mathcal{O}_{z,Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{x,X}, \quad \frac{f}{g} \mapsto \frac{\phi^\#(f)}{\phi^\#(g)} \quad \text{mit} \quad \phi^\#(\mathfrak{m}_z) \subseteq \mathfrak{m}_x.$$

Dadurch bekommen wir eine induzierte lineare Abbildung:

$$\mathbf{d}_x \phi : T_x X = \text{Hom}_k(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, k) \longrightarrow T_z Z = \text{Hom}_k(\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2, k), \quad \ell \mapsto \ell \circ \phi^\#$$

Definition 4.1.2 Die Abbildung $\mathbf{d}_x \phi : T_x X \rightarrow T_z Z$ nennt man das *Differential* von ϕ in x .

Für eine Komposition $\psi \circ \phi$ vom Morphismen $\phi : X \rightarrow Y$ und $\psi : Y \rightarrow Z$ erhält man offensichtlich mit $y = \phi(x)$ und $z = \psi(y)$:

$$\mathbf{d}(\psi \circ \phi)_x = \mathbf{d}_y \psi \circ \mathbf{d}_x \phi \tag{4.8}$$

Lemma 4.1.1 I) Ist $\phi : X \rightarrow Y$ ein Isomorphismus, so ist für alle $x \in X$ die lineare Abbildung $\mathbf{d}_x \phi : T_x X \rightarrow T_{\phi(x)} Y$ ein Isomorphismus.

II) Eine affine algebraische Gruppe ist eine glatte Varietät, d.h., alle Punkte sind glatte Punkte.

Da nach II) dann die Dimension von G und $T_{\text{id}} G$ immer übereinstimmen, folgt mit Beispiel 4.1.2:

Korollar 4.1.1 $\dim GL_n = n^2$, $\dim SL_n = n^2 - 1$, $\dim O_n = \dim SO_n = \frac{1}{2}(n^2 - n)$ und $\dim Sp_{2m} = 2m^2 + m$.

Beweis. (Lemma 4.1.1) Zum Teil I) ist nichts zu zeigen. Für Teil II) beachte, daß für $g \in G$ die Abbildung $\lambda_g : G \rightarrow G$ ein Isomorphismus von affinen Varietäten ist (mit Inverser $\lambda_{g^{-1}}$), und das Differential in id daher einen Isomorphismus $\mathbf{d}_{\text{id}} \lambda_g : T_{\text{id}} G \rightarrow T_g G$ induziert. •

Für einen Beweis des folgenden Theorems siehe wieder zum Beispiel Hartshorne, Kapitel I, Abschnitt 5, oder Eisenbud.

Theorem 4.1.2 Sei $\mu : X \rightarrow Z$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten. Dann gibt es eine offene und dichte Teilmenge $U \subset X$ mit $\mathbf{d}\mu_x : T_x X \rightarrow T_{\phi(x)} Z$ ist surjektiv für alle $x \in U$.

Sei X eine affine G -Varietät, und für $x \in X$ sei G_x der Stabilisator. Nach Übung 3.4.2 ist dies wieder eine affine algebraische Gruppe, und die Restriktion $G_x \times X \rightarrow X$ macht aus X eine G_x -Varietät. Nach Lemma 4.1.1 induziert jedes $g \in G_x$ einen Isomorphismus $\mathbf{d}g : T_x X \rightarrow T_x X$, und (4.8) besagt, daß die Abbildung

$$G_x \rightarrow GL(T_x X), \quad g \mapsto \mathbf{d}g,$$

einen Gruppenhomomorphismus und somit eine Darstellung definiert.

Übung 4.1.1 Zeige: Dies ist eine rationale endlichdimensionale Darstellung. Hinweis: Verwende Satz 3.4.1.

Zum Berechnen des Differential eines Morphismus können wir wieder die *Epsilon-Trik* benutzen: Sei $\phi : X \rightarrow Z$ mit $X \subset k^n$ und $Z \subset k^m$, sei $\delta \in T_x X = \text{Der}_x(k[X])$ und sei $\tau \in \text{Alg}_{k,loc}(k[X], k[\epsilon])$ der zugehörige Algebromorphismus gegeben durch $\tau(f) = f(z) + \epsilon\delta(f)$. Dann ist $\tau \circ \phi^\sharp \in \text{Alg}_{k,loc}(k[Z], k[\epsilon])$ definiert durch

$$\tau \circ \phi^\sharp(g) = g(\phi(z)) + \epsilon(\delta \circ \phi^\sharp(g)) = g(\phi(z)) + \epsilon \mathbf{d}_x(\delta)(g)$$

Genauso wie oben erhalten wir damit die Formel :

$$\phi(x + \epsilon v) = \phi(z) + \epsilon \mathbf{d}_x(v) \quad \text{für } z \in Z \text{ und } v \in k^n$$

Beispiel 4.1.3 Seien $H_1, H_2 \subset G$ abgeschlossene Untergruppen, und sei $\mu : H_1 \times H_2 \rightarrow G$ die Abbildung: $(h_1, h_2) \mapsto h_1 h_2^{-1}$. Dann ist

$$\mathbf{d}\mu_{(\text{id}, \text{id})} : T_{\text{id}} H_1 \oplus T_{\text{id}} H_2 \rightarrow T_{\text{id}} G, \quad (X_1, X_2) \mapsto X_1 - X_2.$$

Denn: $\mu(\text{id} + \epsilon X_1, \text{id} + \epsilon X_2) = (\text{id} + \epsilon X_1)(\text{id} + \epsilon X_2)^{-1} = \text{id} + \epsilon(X_1 - X_2)$.

Beispiel 4.1.4 Sei $G \subset GL_n$ eine lineare algebraische Gruppe und für ein Element $g \in G$ sei $\text{Int}g : G \rightarrow G, h \mapsto ghg^{-1}$. Da $\text{Int}g$ die Einschränkung einer linearen Abbildung (auf M_n) ist, folgt

$$\text{Ad}g = \mathbf{d}_{\text{id}} \text{Int}g : T_{\text{id}} G \rightarrow T_{\text{id}} G, \quad A \mapsto gAg^{-1}.$$

Dies liefert einen Homomorphismus $\text{Ad} : G \rightarrow GL(T_{\text{id}} G), g \mapsto \text{Ad}g$. Schauen wir uns das Differential in id an, genannt ad :

$$\text{ad} = \mathbf{d}_{\text{id}} \text{Ad} : T_{\text{id}} G \rightarrow T_{\text{id}} GL(T_{\text{id}} G) = \text{End}(T_{\text{id}} G).$$

Wir berechnen das Differential mit der Formel $\phi(x + \epsilon v) = \phi(z) + \epsilon \mathbf{d}_x(v)$:

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\text{id} + \epsilon X)(Y) &= (\text{id} + \epsilon X)Y(\text{id} + \epsilon X)^{-1} \\ &= (\text{id} + \epsilon X)Y(\text{id} - \epsilon X) \\ &= Y + \epsilon(XY - YX) \\ &= Y + \epsilon[X, Y] \end{aligned}$$

Es folgt: $\text{ad}X(Y) = \mathbf{d}_{\text{id}}\text{Ad}X(Y) = [X, Y]$ und damit:

Satz 4.1.1 *Sei G eine affine algebraische Gruppe, dann ist $\mathfrak{g} = T_{\text{id}}G$ in natürlicher Weise eine Liealgebra. Ist weiter $\phi : G \rightarrow G'$ ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen, dann ist das Differential $\mathbf{d}\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}' = T_{\text{id}}G'$ eine Morphismus von Liealgebren.*

Der Tangentialraum $T_{\text{id}}G$ einer affinen algebraische Gruppe wird im Folgenden die *Liealgebra von G* genannt und mit $\text{Lie } G$ bezeichnet.

Bemerkung 4.1.1 Übersetzt in die Sprache der Kategorien besagt der Satz 4.1.1 folgendes: Sei $\mathbf{AlgGrp}(k)$ die Kategorie, die als Objekte die affinen algebraischen Gruppen über dem Körper k haben und als Morphismen die Morphismen von algebraischen Gruppen hat, und sei $\mathbf{Liealg}(k)$ die Kategorie, die als Objekte die endlichdimensionalen Liealgebren über dem Körper k haben und als Morphismen die Liealgebrahomomorphismen hat. Dann definiert

$$\mathbf{Lie} : \mathbf{AlgGrp}(k) \rightarrow \mathbf{Liealg}(k) \quad \text{mit} \quad G \rightarrow \text{Lie } G \quad \text{und} \quad \phi \mapsto \mathbf{d}\phi$$

einen Funktor zwischen beiden Kategorien.

Bemerkung 4.1.2 Der Satz besagt insbesondere, dass jede endlichdimensionale rationale Darstellung einer affinen algebraischen Gruppe G eine endlichdimensionale Darstellung der Liealgebra liefert. Übersetzt in die Sprache der Kategorien erhält man. Sei $\mathbf{RatDar}_G^f(k)$ die Kategorie, die als Objekte die endlichdimensionalen rationalen Darstellungen der affinen algebraischen Gruppe G (definiert über dem Körper k) hat und als Morphismen die G -äquivalenten Homomorphismen $\phi : V \rightarrow V'$, und sei $\mathbf{Dar}_{\mathfrak{g}}^f(k)$ die Kategorie, die als Objekte die endlichdimensionalen Darstellungen der Liealgebra $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ hat, und als Morphismen die \mathfrak{g} -äquivalenten Homomorphismen $\rho : V \rightarrow V'$ (d.h.: $\rho(xv) = x\rho(v)$ für allen $v \in V$ und $x \in \mathfrak{g}$). Dann definiert

$$\mathbf{d} : \mathbf{RatDar}_G^f(k) \rightarrow \mathbf{Dar}_{\mathfrak{g}}^f(k), \quad (\rho : G \rightarrow GL(V)) \mapsto (\mathbf{d}\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V))$$

nach Satz 4.1.1 und Übung 3.1.1 einen Funktor zwischen diesen Kategorien.

Beweis. Die Abbildung $\text{Int } g$ in Beispiel 4.1.4 ist unabhängig von der Einbettung definiert und fixiert id , das Differential liefert daher (unabhängig von der Einbettung) einen Automorphismus $\text{Ad } g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Es folgt aus (4.8), daß dies einen Homomorphismus liefert $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$, der nach Übung 4.1.1 eine rationale Darstellung ist. Das Differential $\text{ad} = \mathbf{d}_{\text{id}}(\text{Ad})$ liefert dann (wieder unabhängig von der Einbettung) eine lineare Abbildung $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$. Es folgt dann aus der obigen Rechnung, daß $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $(X, Y) \mapsto \text{ad}X(Y)$ eine Lieklammer definiert.

Sei nun $\rho : G \rightarrow H$ ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen und sei $\mathbf{d}\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h} = \text{Lie } H$ das Differential von ρ . Betrachte die folgenden kommutativen Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & H & & \text{Lie } G & \xrightarrow{\mathbf{d}\rho} & \text{Lie } H \\ \downarrow \text{Int } g & & \downarrow \text{Int } g & \Rightarrow & \downarrow \text{Ad } g & & \downarrow \text{Ad } g \\ G & \xrightarrow{\rho} & H & & \text{Lie } G & \xrightarrow{\mathbf{d}\rho} & \text{Lie } H \end{array}$$

Wir “leiten” mit Hilfe der Epsilontik das zweite Diagramm noch einmal ab: Wegen der Kommutativität gilt für $X \in \mathfrak{g} = \text{Lie } G$:

$$\mathbf{d}\rho \circ \text{Ad}(\text{id} + \epsilon X) = \text{Ad} \rho(\text{id} + \epsilon X) \circ \mathbf{d}\rho$$

Da $\text{Ad}(\text{id} + \epsilon X) = \text{Id} + \text{ad}\epsilon X$ und $\text{Ad} \rho(\text{id} + \epsilon X) = \text{Id} + \text{ad}\epsilon \mathbf{d}\rho(X)$, folgt

$$\mathbf{d}\rho \circ (\text{Id} + \text{ad}\epsilon X) = (\text{Id} + \text{ad}\epsilon \mathbf{d}\rho(X)) \circ \mathbf{d}\rho$$

und damit $\mathbf{d}\rho \circ \text{ad}X = \text{ad} \mathbf{d}\rho(X) \circ \mathbf{d}\rho$, oder, angewendet auf ein $Y \in \mathfrak{g}$:

$$\mathbf{d}\rho([X, Y]) = [\mathbf{d}\rho(X), \mathbf{d}\rho(Y)].$$

•

Lemma 4.1.2 *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $W \subset V$ ein Unterraum und $N := N_{GL(V)}(W) = \{g \in GL(V) \mid g(W) \subseteq W\}$ der Normalisator von W . Dann ist N eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe mit Liealgebra $\text{Lie } N = \mathfrak{n}$, wobei $\mathfrak{n} = \{X \in \text{End}(V) \mid XW \subset W\}$.*

Beweis. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V , so daß $\{v_1, \dots, v_r\} \subset W$ eine Basis von W ist. Dann ist

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix} \mid A_1 \in M_r, A_2 \in M_{r, n-r}, A_4 \in M_{n-r, n-r} \right\} \subset M_n,$$

also ein Vektorraum, und N ist die offene, dichte Teilmenge der invertierbaren Matrizen in \mathfrak{n} . Es folgt unmittelbar: N ist zusammenhängend, abgeschlossen in der GL_n (als Schnitt $\mathfrak{n} \cap GL_n$), mit Liealgebra \mathfrak{n} . •

Lemma 4.1.3 Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und sei $v \in V$. Bezeichne mit $G = GL(V)_v = \{g \in GL(V) \mid gv = v\}$ den Stabilisator von v in der $GL(V)$. Dann ist G eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe mit Liealgebra $\text{Lie } G = \mathfrak{k}$, wobei $\mathfrak{k} = \{X \in \text{End}(V) \mid Xv = 0\}$.

Beweis. Sei $\mathbb{E} \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V mit $v = v_1$. Dann ist

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \dots & \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \mid a_{i,j} \in k, \det A \neq 0 \right\}$$

und

$$\mathfrak{k} = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \dots & \\ 0 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \mid a_{i,j} \in k \right\}$$

Es folgt G ist eine abgeschlossene Untergruppe der $GL(V)$, und als eine affin verschobene offene dichte Teilmenge eines Vektorraums ($G \subset \text{id} + \mathfrak{k}$) ist sie zusammenhängend mit dem Vektorraum als Tangentialraum \bullet

Sei G eine affine algebraische Gruppe und sei Z eine affine G -Varietät. Sei $z \in Z$, den Morphismus von affinen Varietäten:

$$\mu : G \rightarrow Z, \quad g \mapsto gz,$$

nennt man die Orbitabbildung. Der Stabilisator $G_z = \{g \in G \mid gz = z\}$ ist dann eine abgeschlossene Untergruppe von G , denn $G_z = \mu^{-1}(z)$.

Lemma 4.1.4 Für den Orbit Gz gilt die folgende Dimensionsformel:

$$\dim G_z = \dim G - \dim Gz,$$

und für das Differential $\mathbf{d}\mu_{\text{id}} : \text{Lie } G \rightarrow T_z(Z)$ der Orbitabbildung gilt:

$$\text{Ker } \mathbf{d}\mu_{\text{id}} = \text{Lie } G_z \quad \text{and} \quad \text{Im } \mathbf{d}\mu_{\text{id}} = T_z(Gz) = T_z(\overline{Gz}).$$

Beweis. Man kann \mathbb{E} annehmen: G ist zusammenhängend. Sei $Y = \overline{Gz}$, und sei mit μ auch die induzierte dominante Abbildung $\mu : G \rightarrow Y, g \mapsto gz$ bezeichnet. Aus Theorem 4.1.2 wissen wir, daß das Differential surjektiv ist auf einer offenen dichten Teilmenge von G . Sind nun $g_1, g_2 \in G$ und ist $g_2 = hg_1$, so induziert $\mathbf{d}(\lambda_h)_{g_1} : T_{g_1}G \rightarrow T_{g_2}G$ einen Isomorphismus und ebenso $\mathbf{d}(\lambda_h)_{g_1z} : T_{g_1z}Y \rightarrow T_{g_2z}Y$, und wegen der G -Äquivarianz der

Abbildung gilt: $\mathbf{d}(\lambda_h)_{g_1 z} \circ \mathbf{d}\mu_{g_1} = \mathbf{d}\mu_{g_2} \circ \mathbf{d}(\lambda_h)_{g_1}$. Es folgt: $\mathbf{d}\mu$ ist in allen Punkten von G surjektiv, insbesondere ist $\mathbf{d}\mu_{\text{id}} : \text{Lie } G \rightarrow T_z(Y)$ surjektiv.

Nach Theorem 2.8.1 gibt es eine offene nicht-leere Teilmenge $U \subset Y$, so daß $U \subset \mu(G)$, und wenn $u \in U$, dann ist dann gilt für jede irreduzible Komponente Z von $\mu^{-1}(u)$: $\dim Z = \dim G - \dim Y$. Wegen der G -Äquivarianz gilt natürlich $U = Gz$ ist der ganze Orbit, also insbesondere: $\dim \mu^{-1}(z) = \dim G_z = \dim G - \dim Gz$.

Indem wir $Z \hookrightarrow V$ einbetten in eine endlichdimensionale rationale Darstellung V von G (Satz 3.4.3), sehen wir: $\text{Lie } G_z \subset \text{Ker } \mathbf{d}\mu_{\text{id}}$ (Lemma 4.1.3). Da $\dim \text{Lie } G_z = \dim G_z$ und

$$\dim G_z = \dim G - \dim Gz = \dim \text{Lie } G - \dim T_z(Y) = \dim \text{Ker } \mathbf{d}\mu_{\text{id}},$$

folgt aus Dimensionsgründen: $\text{Ker } \mathbf{d}\mu_{\text{id}} = \text{Lie } G_z$ •

Theorem 4.1.3 *Sei G eine zusammenhängende algebraische Gruppe. Dann ist die Zuordnung $H \rightarrow \text{Lie } H$ zwischen abgeschlossenen zusammenhängenden Untergruppen von G und Lieunteralgebren von $\text{Lie } G$ injektiv und durchschnitts- und inklusionserhaltend.*

Ist $\rho : G \rightarrow G'$ ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen, so gilt für alle abgeschlossenen Untergruppen $H' \subset G'$: $\text{Lie } \rho^{-1}(H') = (\mathbf{d}\rho)^{-1}(\text{Lie } H')$, und ist $\rho' : G \rightarrow G'$ ein weiterer Morphismus und $\mathbf{d}\rho = \mathbf{d}\rho'$, so gilt $\rho = \rho'$.

Für Darstellungen gilt zudem: $(\text{Lie } G)_v = \text{Lie } G_v$, und

$$(\text{Lie } G)_v = \{X \in \text{Lie } G \mid Xv = 0\}.$$

Ist $W \subset V$ ein Unterraum und $N_G W = \{g \in G \mid gW \subseteq W\}$ der Normalisator, so gilt $\text{Lie } N_G(W) = N_{\text{Lie } G}(W) = \{u \in \text{Lie } G \mid uW \subseteq W\}$.

Beweis. Der letzte Teil des Theorems folgt aus Lemma 4.1.2 und Lemma 4.1.3 zusammen mit der Aussage über die schnitterhaltende Eigenschaft der Zuordnung $H \rightarrow \text{Lie } H$, und der Aussage über den Zusammenhang zwischen $\text{Lie } \rho^{-1}(H)$ und $\mathbf{d}\rho^{-1}(\text{Lie } H)$.

Seien $\rho, \rho' : G \rightarrow G'$ zwei Morphismen mit $\mathbf{d}\rho = \mathbf{d}\rho'$. Definiere eine Operation von G auf G' durch

$$G \times G' \rightarrow G', \quad (g, g') \mapsto \rho(g)g'\rho'(g^{-1}),$$

damit ist dann G' eine affine G -Varietät mit

$$G_{\text{id}} = \{g \in G \mid \rho(g)\text{id}\rho'(g^{-1}) = \text{id}\} = \{g \in G \mid \rho(g) = \rho'(g)\}.$$

Betrachte die Orbitabbildung an id , d.h., $\mu : G \rightarrow G', g \mapsto \rho(g)\text{id}\rho'(g^{-1})$. Für das Differential (siehe Beispiel 4.1.3) $\mathbf{d}\mu_{\text{id}}$ gilt: $\mathbf{d}\mu_{\text{id}}(X) = \mathbf{d}\rho_{\text{id}}(X) - \mathbf{d}\rho'_{\text{id}}(X) = 0$, und damit

$$\text{Lie } G_{\text{id}} = \text{Ker } \mathbf{d}\mu_{\text{id}} = \text{Lie } G.$$

Aus Dimensionsgründen (und da G zusammenhängend ist) folgt: $G_e = G$ und damit $\rho = \rho'$, siehe das folgende:

Lemma 4.1.5 *Sei Z eine irreduzible Varietät und sei $Y \subset Z$ eine echte abgeschlossene Teilmenge, dann ist $\dim Y < \dim Z$.*

Beweis. Sei $d = \dim Y = \dim Z$. Nach dem Noetherschen Normalisierungslemma (Lemma 2.7.1) gibt es algebraisch unabhängige Funktionen y_1, \dots, y_d in $k[Z]$, so daß $k[Z]$ ganz ist über dem Polynomring $k[y_1, \dots, y_d]$.

Sei $I_Y \subset k[Z]$ das Ideal der auf Y verschwindenden Funktionen, wir überlegen uns zunächst: $I_Y \cap k[y_1, \dots, y_d] = (0)$. Sei $f \in I_Y \cap k[y_1, \dots, y_d]$, \mathbb{C} seien die Variablen so nummeriert, daß y_d in f vorkommt. Dann ist \bar{y}_d algebraisch abhängig von den $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{d-1}$, also wäre $\dim k[y_1, \dots, y_d]/(I_Y \cap k[y_1, \dots, y_d])$ und damit $\dim Y < d$.

Sei nun $f \in I_Y$ beliebig. Da f ganz ist über $R = k[y_1, \dots, y_d]$, gibt es ein normiertes Polynom $P(t) \in R[t]$ minimalen Grades mit $P(f) = 0$. Den konstanten Term nennt man die Norm $N(f)$ von f , beachte: $N(f) \in R$. Sei $P(t) = \prod_{j=1}^d (t - f_j)$ eine Zerlegung von $P(t)$ in Linearfaktoren (über dem algebraischen Abschluß von $k(y_1, \dots, y_d)$). Andererseits ist f eine Nullstelle von P und somit sei $\mathbb{C} f = f_1$, sei $f' = \prod_{j=2}^d f_j$. Angenommen: $f' \in k[Z]$. Dann ist $N(f) = f f'$ ein Element in $I_Y \cap k[y_1, \dots, y_d]$, also $N(f) = 0$, folglich $f = 0$ und damit $I_Y = (0)$, also $Y = Z$.

Es bleibt zu zeigen: $f' \in k[Z]$. Sei $P(t) = \sum_{i=0}^d a_i t^i$, dann ist $a_0 = N(f)$ und $a_d = 1$. In dem Körper $k(y_1, \dots, y_d)[f]$ gilt

$$\frac{1}{f} = - \sum_{i=1}^d \frac{a_i}{a_0} f^{i-1} \implies f' = \frac{1}{f} N(f) = - \sum_{i=1}^d \frac{a_i}{a_0} f^{i-1} N(f) = - \sum_{i=1}^d a_i f^{i-1}$$

ist ein Element in $k[Z]$. •

Beweis. [Fortsetzung Theorem 4.1.3] Seien $H_1, H_2 \subset G$ zwei zusammenhängende abgeschlossene Untergruppen von G . Wir betrachten die folgende Operation von $H_1 \times H_2$ auf G : $(h_1, h_2) \cdot g = h_1 g h_2^{-1}$. Dann gilt:

$$(H_1 \times H_2)_{\text{id}} = \{(h_1, h_2) \mid h_1 = h_2\} \simeq H_1 \cap H_2.$$

Für die Orbitabbildung $\mu : H_1 \times H_2 \rightarrow G$, $(h_1, h_2) \mapsto h_1 h_2^{-1}$, gilt:

$$\mathbf{d}\mu_{\text{id}}(X_1, X_2) = X_1 - X_2,$$

(siehe auch Beispiel 4.1.3) und somit $\text{Ker}\mathbf{d}\mu_{\text{id}} \simeq \text{Lie } H_1 \cap \text{Lie } H_2$.

Insbesondere: Sind $H_1, H_2 \subset G$ zwei zusammenhängende abgeschlossene Untergruppen mit $\text{Lie } H_1 = \text{Lie } H_2$, so gilt $\text{Lie}(H_1 \cap H_2) = \text{Lie } H_1 = \text{Lie } H_2$. Da der Schnitt eine abgeschlossene Untergruppe von beiden ist, folgt aus Dimensionsgründen (Lemma 4.1.5): $H_1 = H_2$. Die Abbildung $H \rightarrow \text{Lie } H$ ist also injektiv und nach obigen durchschnittserhaltend, und damit auch inklusionserhaltend.

Sei nun $\rho : G \rightarrow G'$ ein Morphismus von affinen algebraischen Gruppen und sei $H' \subset G'$ eine Untergruppe. Da $H = \rho^{-1}(H') = \rho^{-1}(\rho(G) \cap H')$, kann \mathbb{C} abgenommen werden: ρ ist surjektiv. Wir fassen G' als G -Varietät auf durch $G \times G' \rightarrow G'$, $(g, g') \mapsto \rho(g)g'$. Betrachte die Orbitabbildung $\mu : G \rightarrow G'$, $g \mapsto \rho(g)$. Wir folgern aus Lemma 4.1.4: $\mathbf{d}\mu_{\text{id}}$ ist surjektiv, und $\text{Lie Ker}\rho = \text{Lie } G_{\text{id}} = \text{Lie Ker}\mathbf{d}\mu_{\text{id}}$. Sei

$$r = \dim \text{Lie Ker}\rho = \dim G_{\text{id}} = \dim G - \dim G'.$$

Wegen der G -Äquivarianz folgt aus Theorem 2.8.1:

$$\dim \rho^{-1}(H') = r + \dim H'.$$

Die Einschränkung $\mu : H \rightarrow H'$ ist surjektiv und damit ist auch $\mathbf{d}\mu_{\text{id}} : \text{Lie } H \rightarrow \text{Lie } H'$ surjektiv, folglich $\text{Lie } H \subset \mathbf{d}\rho^{-1}(\text{Lie } H')$. Aber

$$\dim \mathbf{d}\rho^{-1}(\text{Lie } H') = \dim \text{Lie } H' + r = \dim \rho^{-1}(H') = \dim \text{Lie } \rho^{-1}(H'),$$

und damit gilt $\text{Lie } \rho^{-1}(\text{Lie } H') = \mathbf{d}\rho^{-1}(\text{Lie } H')$. •

Satz 4.1.2 *Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine rationale endlichdimensionale Darstellung einer zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppe. Dann ist V ein halbeinfacher G -Modul $\Leftrightarrow V$ ist durch $\mathbf{d}\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ ein halbeinfacher \mathfrak{g} -Modul ist.*

Beweis. Ist $U \subset V$ ein G -Untermodul, so ist $N_G(U) = G$ und damit gilt nach Theorem 4.1.3: $N_{\mathfrak{g}}(U) = \text{Lie } N_G(U) = \mathfrak{g}$, also ist U ein \mathfrak{g} -Untermodul. Umgekehrt, ist $W \subset V$ ein \mathfrak{g} -Untermodul, so gilt $\text{Lie } N_G(W) = \mathfrak{g}$, also $\dim N_G(W) = \dim G$, und somit aus Dimensionsgründen: $N_G(W) = G$. Folglich ist W auch ein G -Untermodul. Aber damit ist klar: V ist die direkte Summe von einfachen G -Untermoduln dann und nur dann, wenn V die direkte Summe von einfachen \mathfrak{g} -Untermoduln ist. •

Satz 4.1.3 Sei G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und sei $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$ die adjungierte Darstellung. Dann ist $\text{Ker Ad} = Z(G)$ das Zentrum von G und $\text{Lie } Z(G) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ ist das Zentrum von \mathfrak{g} .

Beweis. Sei $g \in G$ und bezeichne mit $\text{int } g$ den Morphismus von affinen algebraischen Gruppen $\text{int} : G \rightarrow G, h \mapsto ghg^{-1}$. Nach Theorem 4.1.3 ist $\text{int } g$ die identische Abbildung dann und nur dann wenn das Differential $\mathbf{d} \text{int } g = \text{Ad } g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ die identische Abbildung ist. Aus dem Theorem folgt ebenfalls:

$$\begin{aligned} \text{Lie } Z(G) = \text{Lie Ker Ad} &= \text{Lie}(\text{Ad}^{-1}(\text{id})) \\ &= \text{ad}^{-1}(0) \\ &= \text{Ker ad} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \forall Y \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

•

Korollar 4.1.2 Sei G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe. Dann ist G kommutativ dann und nur dann wenn \mathfrak{g} kommutativ ist.

Satz 4.1.4 Sei G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und sei $H \subset G$ eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe. Dann ist H ein Normalteiler dann und nur dann, wenn $\mathfrak{h} = \text{Lie } H \subset \mathfrak{g} = \text{Lie } G$ ein Ideal ist (d.h.: $\forall X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h} : [X, Y] \in \mathfrak{h}$).

Beweis. Ist H ein Normalteiler, so ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Untermodul (bezüglich Ad), und da $\mathfrak{g} = \text{Lie } G = \text{Lie } N_G(\mathfrak{h}) = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, folgt $\text{ad } X(Y) = [X, Y] \in \mathfrak{h}$ für alle $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$. Somit ist $\mathfrak{h} = \text{Lie } H$ ein Ideal. Sei umgekehrt $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ein Ideal. Da $\mathfrak{g} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \text{Lie } N_G(\mathfrak{h})$ folgt $G = N_G(\mathfrak{h})$. Dann folgt für $g \in G$:

$$\text{Lie } gHg^{-1} = \text{Lie int } g(H) = \mathbf{d}(\text{int } g)\mathfrak{h} = \text{Ad } g(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}.$$

Damit haben H und gHg^{-1} die gleiche Liealgebra, sind also gleich, und somit ist H ein Normalteiler. •

4.2 Derivationen, Vektorfelder und Liealgebren

Sei Z eine affine algebraische Varietät. Mit TZ bezeichnen die Menge bestehend aus Paaren (z, δ) mit $z \in Z$ und $\delta \in T_z Z$. Um diese Menge wieder als Varietät zu sehen, betten wir $Z \hookrightarrow k^n$ in einen k^n ein, sei $I_Z \subset k[x_1, \dots, x_n]$

das Verschwindungsideal und sei $I_Z = (f_1, \dots, f_r)$ ein Erzeugendensystem. Mit den offensichtlichen Identifikationen und (4.6) erhalten wir:

$$\mathcal{T}Z = \left\{ (z, v) \in k^n \oplus k^n \mid f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0, \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_z \right) v = 0 \right\}.$$

Dies definiert $\mathcal{T}Z$ als eine algebraische Menge im k^{2n} und ist daher eine affine Varietät. Beachte, ist $\phi : Y \rightarrow Z$ ein Morphismus von affinen Varietäten mit $Y \subset k^m$ und $\tilde{\phi} : k^m \rightarrow k^n$ so, daß $\phi = \tilde{\phi}|_Y$, dann bekommen wir eine induzierte Abbildung:

$$(\tilde{\phi}, \mathbf{d}\tilde{\phi}) : k^m \oplus k^m \rightarrow k^n \oplus k^n, \quad (y, v) \mapsto (\tilde{\phi}(y), \mathbf{d}\tilde{\phi}_y(v))$$

Ist dabei $\tilde{\phi} = (h_1, \dots, h_n)$ mit $h_j \in k[y_1, \dots, y_m] = k[k^m]$, so ist

$$\mathbf{d}\tilde{\phi}_y(v) = \left(\frac{\partial h_i}{\partial y_j}(y) \right) v.$$

D.h., $(\tilde{\phi}, \mathbf{d}\tilde{\phi})$ ist ein Morphismus von affinen Varietäten, und der zweite Teil der induzierten Abbildung ist für festes y eine lineare Abbildung. Die Einschränkung auf $\mathcal{T}Y$ induziert eine Abbildung auf $\mathcal{T}Z$, die, hoffentlich ohne Verwirrung zu verursachen, einfach mit $\mathbf{d}\phi$ bezeichnet wird:

$$\mathbf{d}\phi : \mathcal{T}Y \rightarrow \mathcal{T}Z, \quad (y, v) \mapsto (\phi(y), \mathbf{d}\phi_y(v)).$$

Es bleibt zu zeigen, daß die Struktur von $\mathcal{T}Z$ unabhängig ist von der Einbettung. Hat man zwei Einbettungen $Z \subset k^m, Z \subset k^n$, so seien $\mathcal{T}_m Z$ und $\mathcal{T}_n Z$ die entsprechenden Varietäten. Sind $\phi : k^m \rightarrow k^n$ und $\phi' : k^n \rightarrow k^m$ die Ausweitungen von Isomorphismen (so daß $\phi \circ \phi'$ und $\phi' \circ \phi$ auf Z jeweils die Identität ergeben), so bekommt man induzierte Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{d}\phi : k^m \oplus k^m & \rightarrow & k^n \oplus k^n \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{d}\phi : \mathcal{T}_m Z & \rightarrow & \mathcal{T}_n Z \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{d}\phi' : k^n \oplus k^n & \rightarrow & k^m \oplus k^m \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{d}\phi' : \mathcal{T}_n Z & \rightarrow & \mathcal{T}_m Z \end{array}$$

so daß $\mathbf{d}\phi' \circ \mathbf{d}\phi|_{\mathcal{T}_m Z}$ und $\mathbf{d}\phi \circ \mathbf{d}\phi'|_{\mathcal{T}_n Z}$ jeweils die Identität ergeben, d.h., $\mathbf{d}\phi'$ und $\mathbf{d}\phi$ sind Isomorphismen auf $\mathcal{T}_n Z$ respektive $\mathcal{T}_m Z$.

Wir bekommen mit der Konstruktion von $\mathcal{T}Z$ gleichzeitig einen Morphismus von affinen Varietäten, die Projektion auf die erste Komponente:

$$\pi : \mathcal{T}Z \rightarrow Z, \quad (z, v) \mapsto z.$$

Als ein (*algebraisches*) *Vektorfeld* bezeichnet man einen Morphismus, der ein Schnitt ist zu π , d.h., $\sigma : Z \rightarrow \mathcal{T}Z$ ist ein Morphismus von affinen Varietäten mit der Eigenschaft $\pi \circ \sigma = \text{id}_Z$.

Als eine *Derivation auf Z* ist ein Endomorphismus $\delta : k[Z] \rightarrow k[Z]$ mit der Eigenschaft $\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$. Wir wollen diese beiden Begriffe zusammenführen.

Beispiel 4.2.1 Sei $Z = k^n$, dann ist $k[Z] = k[x_1, \dots, x_n]$. Eine Derivation δ ist eindeutig durch das Bild der x_i bestimmt: Sei $\delta(x_i) = f_i$, dann sieht man leicht:

$$\delta : k[Z] \rightarrow k[Z], \quad f \mapsto \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Da umgekehrt alle wie oben definierten Abbildungen Derivationen sind, haben wir damit alle Derivation auf $k[Z]$ bestimmt.

Der Tangentialraum $T_z Z = T_z k^n$ in einem Punkt wird aufgespannt durch die $\frac{\partial}{\partial x_i}|_z$. Ein Vektorfeld σ ist daher von der Form $z \mapsto (z, \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_z)$, wobei die f_i Funktionen auf Z sind. Soll das Vektorfeld algebraisch sein, so müssen offensichtlich die f_i reguläre Funktionen auf Z sein, d.h., die f_i sind Polynome. Damit folgt: Jedes algebraische Vektorfeld auf dem k^n ist von der Form:

$$\sigma : Z \rightarrow \mathcal{T}Z, \quad z \mapsto (z, \sum f_i(z) \frac{\partial}{\partial x_i}|_z)$$

wobei $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$. Also: Auf dem k^n sind Vektorfelder und Derivationen in gewissem Sinne identische Objekte.

Wir wollen als nächstes zeigen: Derivationen und Vektorfelder sind auch im allgemeinen Fall das Gleiche. Sei $Z \subset k^n$ eine eingebettete affine algebraische Varietät, dann ist $k[Z] = k[x_1, \dots, x_n]/I_Z$, wobei I_Z das Verschwindungsideal von Z in k^n ist. Die Algebra $k[Z]$ wird erzeugt von den Klassen $\bar{x}_i \in k[Z]$ der Erzeuger $x_i \in k[x_1, \dots, x_n]$. Sei $\delta \in \text{Der}_k(k[Z])$ eine Derivation, dann ist δ eindeutig festgelegt durch die Bilder $\delta(\bar{x}_i) = h_i$. Sei $\hat{h}_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ ein Lift und setze

$$\hat{\delta} : k^n \rightarrow \mathcal{T}k^n = k^n \oplus k^n, \quad x \mapsto (x, \sum_{i=1}^n \hat{h}_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}|_x).$$

Umgekehrt, sei $\sigma : Z \rightarrow \mathcal{T}Z$ ein Vektorfeld. Dann ist σ von der Form $x \mapsto (x, \sum_{i=1}^n h_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}|_x)$ durch die Einbettung $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}k^n$. Sei $\hat{h}_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ ein Lift von h_i und sei $\hat{\sigma}$ die Derivation:

$$\hat{\sigma} : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[x_1, \dots, x_n], \quad p \mapsto \sum_{i=1}^n \hat{h}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p).$$

Satz 4.2.1 $\widehat{\delta}|_Z$ ist ein Vektorfeld auf Z und $\widehat{\sigma}$ induziert eine Derivation auf $k[Z]$. Die Abbildungen $\delta \mapsto \widehat{\delta}|_Z$ und $\sigma \mapsto \widehat{\sigma}$ sind zueinander invers und induzieren einen Isomorphismus zwischen dem $k[Z]$ -Modul $\text{Der}_k(k[Z])$ der Derivationen auf Z und dem $k[Z]$ -Modul der Vektorfelder $\text{Vek}_{\text{alg}}(Z)$ auf Z .

Beweis. Sind δ, δ' Derivationen und sind $f, g \in k[Z]$, so rechnet man leicht nach, daß $f\delta + g\delta'$ wieder Derivationen sind. Ebenso rechnet man leicht nach, daß mit σ, σ' auch $f\sigma + g\sigma'$ wieder Vektorfelder auf Z sind. Folglich sind also $\text{Der}_k(k[Z])$ und $\text{Vek}_{\text{alg}}(Z)$ Moduln über dem Ring $k[Z]$.

Nach Konstruktion ist $\widehat{\delta}$ ein Vektorfeld auf dem k^n , somit definiert die Einschränkung $\widehat{\delta}|_Z$ einen Morphismus von affinen Varietäten:

$$\widehat{\delta}|_Z : Z \rightarrow \mathcal{T}k^n.$$

Um zu zeigen, daß diese Abbildung ein Vektorfeld auf Z definiert, müssen wir zeigen, daß das Bild in $\mathcal{T}Z \subset \mathcal{T}k^n$ liegt. Sei I_Z das Verschwindungsideal von Z :

$$I_Z = \{h \in k[x_1, \dots, x_n] \mid h|_Z \equiv 0\} = (f_1, \dots, f_r),$$

und sei $f_j = \sum a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$. Dann gilt offensichtlich

$$\sum a_{i_1, \dots, i_n} \delta(\bar{x}_1^{i_1} \cdots \bar{x}_n^{i_n}) = 0.$$

Nun erhält man für ein Monom:

$$\begin{aligned} \delta(\bar{x}_1^{i_1} \cdots \bar{x}_n^{i_n}) &= \sum_{\ell=1}^n i_\ell h_\ell \bar{x}_1^{i_1} \cdots \bar{x}_\ell^{i_\ell-1} \cdots \bar{x}_n^{i_n} \\ &= \left(\sum_{\ell=1}^n \widehat{h}_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} (x_1^{i_1} \cdots x_\ell^{i_\ell} \cdots x_n^{i_n}) \right) |_Z \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} 0 &= \sum a_{i_1, \dots, i_n} \delta(\bar{x}_1^{i_1} \cdots \bar{x}_n^{i_n}) \\ &= \sum a_{i_1, \dots, i_n} \left(\sum_{\ell=1}^n \widehat{h}_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} (x_1^{i_1} \cdots x_\ell^{i_\ell} \cdots x_n^{i_n}) \right) |_Z \\ &= \left(\sum_{\ell=1}^n \widehat{h}_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\sum a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}) \right) |_Z \\ &= \left(\sum_{\ell=1}^n \widehat{h}_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} (f_j) \right) |_Z \end{aligned}$$

Da aber für alle $z \in Z$: $f_1(z) = \dots = f_r(z)$ und somit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(z) \\ \vdots \\ h_n(z) \end{pmatrix} = 0,$$

folgt für alle $z \in Z$: $\sum_{\ell=1}^n \widehat{h}_\ell(z) \frac{\partial}{\partial x_\ell} |_z \in \mathcal{T}_z Z \subset \mathcal{T}_z k^n$. Das zeigt, daß das Bild von $\widehat{\delta}|_Z$ in $\mathcal{T}Z$ liegt (siehe (4.6)) und somit ist $\widehat{\delta}|_Z$ ein Vektorfeld.

Bemerkung 4.2.1 In der Identifikation von $T_z Z$ mit den Punktderivatio-
nen in z ist $\widehat{\delta}_z$ die Derivation $f \mapsto \delta(f)(z)$.

Zur Umkehrung: Sei $\sigma \in \text{Vek}_{\text{alg}}(Z)$ und sei $\widehat{\sigma}$ die Derivation auf $k[x_1, \dots, x_n]$
definiert durch $p \mapsto \sum_{i=1}^n \widehat{h}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$. Für die Erzeuger f_j des Ideals I_Z und
 $z \in Z$ gilt:

$$\widehat{\sigma}(f_j) = \sum_{i=1}^n \widehat{h}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f_j).$$

Die rechte Seite ist für ein festes $z \in Z$ gerade die j -te Zeile in

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}(z) & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(z) \\ \vdots \\ h_n(z) \end{pmatrix}.$$

Da der Vektor $(h_1(z), \dots, h_n(z))$ nach Voraussetzung in $T_z Z$ liegt, ist das
Produkt oben gleich Null, und damit gilt $\widehat{\sigma}(f_j)|_Z \equiv 0$. Ist also f eine
Element des Verschwindungsideals, so ist $f = \sum_{j=1}^r g_j f_j \in I_Z$ und damit

$$\widehat{\sigma}(f) = \sum_{j=1}^r \widehat{\sigma}(g_j f_j) = \sum_{j=1}^r \widehat{\sigma}(g_j) f_j + \sum_{j=1}^r g_j \widehat{\sigma}(f_j) \in I_Z,$$

Damit induziert aber $\widehat{\sigma}$ auch eine Derivation auf $k[Z] = k[x_1, \dots, x_n]/I_Z$.

Man sieht nun leicht, daß die beiden Konstruktionen invers zueinander
sind, und daß die Abbildungen alle $k[Z]$ -linear sind. •

Satz 4.2.2 Sei Z eine irreduzible affine Varietät und sei $z \in Z$ ein glatter
Punkt. Dann gibt es eine offene affine Umgebung $U \subset Z$ von z und einen
Isomorphismus $\phi : \mathcal{T}U \simeq U \times k^{\dim Z}$, wobei der Isomorphismus linear ist
auf den Fasern von π und das folgende Diagramm mit pr_1 als Projektion
auf die erste Komponente kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}U & \xrightarrow{\phi} & U \times k^{\dim Z} \\ \downarrow \pi & & \downarrow pr_1 \\ \dot{U} & \xrightarrow{\text{id}} & \dot{U} \end{array} \quad (4.9)$$

Korollar 4.2.1 Ist Z eine glatte irreduzible affine Varietät, dann ist $\pi : \mathcal{T}Z \rightarrow Z$
eine Zariski-lokal triviale Vektorbündel, d.h., jeder Punkt besitzt
eine Zariski-offene affine Umgebung U , so daß $\pi^{-1}(U) \simeq U \times k^{\dim Z}$, der
Isomorphismus ist linear auf den Fasern von π und man hat ein kommutati-
ves Diagramm wie in (4.9).

Beweis. \mathbb{C} sei Z eingebettet in einen k^n , so daß

$$\mathcal{T}Z = \left\{ (z, v) \in k^n \oplus k^n \mid f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0, \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_z \right) v = 0 \right\}.$$

Sei $r = n - \dim Z$, dann ist $\operatorname{rg} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_z \right) = r$, da z ein glatter Punkt ist. Es gibt also einen $(r \times r)$ -Minor $\operatorname{mdet} : M_n \rightarrow k$, so daß $\operatorname{mdet} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_z \right) \neq 0$. Sei $W \subset k^n$ die spezielle offene Teilmenge:

$$W = \{x \in k^n \mid \operatorname{mdet} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_z \right) \neq 0\},$$

dann ist $U = W \cap Z$ eine spezielle offene und nicht leere ($z \in U$) Teilmenge in Z . Dann gibt es aber (Lineare Algebra I, nur ein bisschen allgemeiner) eine (für alle $x \in U$) invertierbare Matrix $P(x)$, mit Koeffizienten in $k[x_1, \dots, x_n]_{\operatorname{mdet}}$, so daß

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} P(x)|_U = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix},$$

und die letzten r Spalten sind linear unabhängig für alle $x \in U$. Somit induziert der Isomorphismus von affinen Varietäten

$$W \times k^n \rightarrow W \times k^n, \quad (x, v) \mapsto (x, P^{-1}(x)v)$$

durch Einschränkung auf U einen auf den Fasern von π linearen Isomorphismus

$$\mathcal{T}U = \pi^{-1}U \rightarrow \{(x, u) \mid x \in U, \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big|_x \right) P(x)u = 0\} \simeq U \times k^{\dim U},$$

der die Eigenschaften des Diagramms (4.9) hat. •

Korollar 4.2.1 kann man wie folgt in die Sprache der Moduln übersetzen: Sei $S \in k[Z]$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge, zum Beispiel $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ für ein $f \in k[Z]$, oder $\mathfrak{p} \subset k[Z]$ ist ein Primideal und $S = k[Z] - \mathfrak{p}$. Sei M ein $k[Z]$ -Modul, unter der Lokalisierung M_S von M an S (auch geschrieben als M_f im ersten Beispiel und $M_{\mathfrak{p}}$ im zweiten) versteht man die Menge von Paaren (m, s) , geschrieben $\frac{m}{s}$, modulo der folgenden Relation:

$$M_S = \frac{\{ \frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S \}}{\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \text{ falls es } \exists s'' \in S : s''(s'm - sm') = 0}.$$

M_S wird dann in natürlicher Weise ein $k[Z]_S$ -Modul: $\frac{f}{s} \cdot \frac{m}{s'} = \frac{fm}{ss'}$ für ein $f \in k[Z]$, $m \in M$ und $s, s' \in S$, und $\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{ms' + m's}{ss'}$ für $m, m' \in M$ und $s, s' \in S$.

Desweiteren, sei $\delta \in \text{Der}_k k[Z]$ eine k -Derivation. Wir wollen δ zu einer k -Derivation auf dem Quotientenkörper $k(Z)$ ausweiten. Da $\delta(1) = 0$, muß die Derivation δ auf $\frac{1}{f}$ den Wert $\frac{-\delta(f)}{f^2}$ annehmen, damit $\delta(1) = \delta(f \frac{1}{f}) = 0$ ist. Man rechnet leicht nach, daß dann durch

$$\delta \left(\frac{g}{f} \right) = \frac{f\delta(g) - g\delta(f)}{f^2}$$

eine k -Derivation auf $k(Z)$ definiert wird. Insbesondere folgt auch direkt aus der Definition: Ist $S \subset k[Z]$ eine multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge, so definiert jedes $\delta \in \text{Der}_k k[Z]$ eine Derivation auf $k[Z]_S$. Da der natürliche Morphismus $k[Z] \rightarrow k[Z]_S$, $f \mapsto \frac{f}{1}$ injektiv ist, ist auch die Abbildung $\text{Der}_k k[Z] \rightarrow \text{Der}_k k[Z]_S$ injektiv und erweitert in natürlicher Weise zu einer Injektion von $k[Z]_S$ -Moduln

$$(\text{Der}_k k[Z])_S \rightarrow \text{Der}_k k[Z]_S. \tag{4.10}$$

Andererseits: Sei $\delta \in \text{Der}_k k[Z]_S$. Da $k[Z]$ endlich erzeugt ist, sagen wir $k[Z] = k[f_1, \dots, f_r]$, gibt es ein $s \in S$, so daß $s\delta(f_i) \in k[Z]$ für alle $i = 1, \dots, r$. Das heißt, $s\delta$ definiert eine Derivation auf $k[Z]$ und δ ist somit im Bild von $(\text{Der}_k k[Z])_S$, die Abbildung 4.10 ist also ein Isomorphismus.

Korollar 4.2.2 *Sei Z eine irreduzible glatte affine Varietät. Dann ist der Modul der Derivationen $\text{Der}_k k[Z] = \text{Vek}_{\text{alg}}(Z)$ ein lokal freier Modul über $k[Z]$ vom Rang $\dim Z$, das heißt, zu jedem Punkt $z \in Z$ gibt es eine spezielle offene Umgebung $U = Z_f$ von z , so daß $(\text{Der}_k k[Z])_f = \text{Der}_k k[Z]_f$ ein freier $k[Z]_f$ -Modul vom Rang $\dim Z$ ist.*

Beweis. Indem man $f = \mathfrak{m}_z$ setzt wie im Beweis von Satz 4.2.2, bekommt man durch die Trivialisierung von $\mathcal{T}Z_f = Z_f \times k^r$, $r = \dim Z = \dim Z_f$, einen Isomorphismus zwischen dem $k[Z]_f = k[Z_f]$ -Modul der Vektorfelder auf Z_f und den der Morphismen $Z_f \rightarrow k^r$ (mit der standard Addition). Letzteres ist offensichtlich ein freier Modul vom Rang $r = \dim Z$, da jeder Morphismus gegeben wird durch einen r -Tupel von regulären Funktionen:

$$\pi : Z_f \rightarrow k^r; \quad z \mapsto (f_1(z), \dots, f_r(z)).$$

•

Bemerkung 4.2.2 Die richtige ‘‘Sprache’’ für diese Untersuchungen ist eigentlich die der Garben, der Leser ist hier aufgefordert sich in der geeigneten Literatur (Hartshorne, Eisenbud, Kunz) weiter zu informieren.

Als **Warnung** sei hier angemerkt: Betrachte die Menge der Richtungen $T_z^{glob}Z$ im Tangentialraum, die man durch ein globales Vektorfeld erhält:

$$T_z^{glob}Z = \{v \in T_zZ \mid \exists \sigma \in \text{Vek}_{\text{alg}}(Z) : \sigma_z = v\}.$$

Dann ist $T_z^{glob}Z \subset T_zZ$ ein Untervektorraum. Ist Z glatt, so sagt das Korollar 4.2.2: $T_z^{glob}Z = T_zZ$. Ist Z nicht glatt, so ist dies in einem singulären Punkt im Allgemeinen ein echter Unterraum.

Beispiel 4.2.2 $Z = \{(x, y) \in k^2 \mid x^3 - y^2 = 0\}$, also $k[Z] = k[x, y]/(x^3 - y^2)$. Die Algebra hat als k -Vektorraumbasis die Klassen $\mathbb{B} = \{\bar{x}^n, \bar{x}^n\bar{y}; n \in \mathbb{N}\}$. Eine Derivation ist durch die Paare $(\delta(\bar{x}), \delta(\bar{y})) \in k[Z] \times k[Z]$ bestimmt. Da $\bar{x}^3 = \bar{y}^2$, folgt $\delta(\bar{x}^3) = \delta(\bar{y}^2)$ und somit $3\bar{x}^2\delta(\bar{x}) = 2\delta(\bar{y})\bar{y}$. Die Derivationen entsprechen also genau den Paaren:

$$\text{Der}_k k[Z] = \{(f_1, f_2) \in k[Z] \mid 3\bar{x}^2 f_1 - 2\bar{y} f_2 = 0\}$$

oder, als Vektorfelder nach $\mathcal{T}Z \subset k^2 \oplus k^2$ aufgefaßt:

$$\text{Vek}_{\text{alg}}(Z) = \left\{ \sigma : z \mapsto \left(z, f_1 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_z + f_2 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_z \right) \mid 3\bar{x}^2 f_1 - 2\bar{y} f_2 = 0, f_1, f_2 \in k[Z] \right\}$$

Sei $f_j = \sum_i a_{i,j} \bar{x}^i + \sum_\ell b_{\ell,j} \bar{x}^\ell \bar{y}$, dann ergibt die Gleichung oben für die f_j folgendes System von Gleichungen:

$$a_{0,1} = a_{0,2} = a_{1,2} = 0; \quad \forall i \geq 0 : 3a_{i+1,1} = 2b_{i,2} \quad \text{und} \quad 3b_{i,1} = 2a_{i+2,2}.$$

Der $k[Z]$ -Modul $\text{Der}_k k[Z]$ wird daher erzeugt von zwei Elementen δ_1, δ_2 mit:

$$\left(\delta_1(\bar{x}), \delta_1(\bar{y}) \right) = \left(\bar{x}, \frac{3}{2}\bar{y} \right) \quad \text{und} \quad \left(\delta_2(\bar{x}), \delta_2(\bar{y}) \right) = \left(\bar{y}, \frac{3}{2}\bar{x}^2 \right).$$

Der Modul $\text{Der}_k k[Z]$ ist nicht frei, man hat die Relation: $\bar{y}\delta_1 - \bar{x}\delta_2 = 0$. über der offenen Teilmenge $Z_{\bar{x}} = Z_{\bar{y}} = Z - \{(0, 0)\}$, die glatt ist, kann man die Relation auflösen und erhält: $\text{Der}_k k[Z_{\bar{x}}] = \text{Der}_k k[Z]_{\bar{x}}$ ist ein freier Modul, erzeugt von $\delta_1(\bar{x}) = \bar{x}$.

Betrachten wir nun den Ursprung $z = (0, 0)$. Dann ist $\dim T_0Z = k^2$ von der Dimension 2 aber $\dim Z = 1$, somit ist dies kein glatter Punkt. Beachte auch, dass alle Vektorfelder im Ursprung verschwinden, also

$$T_z^{glob}Z = 0 \subset T_zZ = k^2.$$

4.3 Gruppenoperationen und Vektorfelder

Ist $\phi : Z \rightarrow Z$ ein Automorphismus, so induziert $\mathbf{d}\phi : \mathcal{T}Z \rightarrow \mathcal{T}Z$ einen Automorphismus, der linear ist für festes $z \in Z$. Ist also $\sigma : Z \rightarrow \mathcal{T}Z$ ein Vektorfeld, so ist $\mathbf{d}\phi^*(\sigma) = \mathbf{d}\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ wieder ein Vektorfeld.

Identifizieren wir wieder die Vektorfelder mit den Derivationen. Es sei erinnert, daß $\phi^\# : k[Z] \rightarrow k[Z]$ ein Algebraautomorphismus ist. Daher ist $\mathbf{d}\phi(\delta) = \phi^\# \circ \delta \circ (\phi^{-1})^\#$ wieder eine Derivation.

Übung 4.3.1 Zeige: Unter der Korrespondenz Vektorfelder \leftrightarrow Derivationen, $\sigma \leftrightarrow \hat{\sigma}$, wird $\mathbf{d}\phi^*(\sigma)$ auf $\mathbf{d}\phi(\hat{\sigma})$ abgebildet.

Sei nun G eine affine algebraische Gruppe und sei Z eine affine G -Varietät. Wir betten $Z \hookrightarrow V$ G -äquivariant in eine endlichdimensionale rationale Darstellung ein, d.h., V ist ein endlichdimensionaler (rationaler) G -Modul und $Z \subset V$ ist ein G -stabile Zariski-abgeschlossene Teilmenge. Wir wissen, daß dann $k[V]$ eine rationale G -Darstellung ist, und G operiert durch Algebraautomorphismen.

Folglich ist $k[V]$ auch ein *rationaler \mathfrak{g} -Modul*, $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$. Das heißt, $k[V]$ ist eine Summe von endlichdimensionalen Darstellungen. Ist $f \in k[V]$ und $X \in \mathfrak{g}$, so schreiben wir Xf für die Funktion, die man aus f durch die Anwendung von X bekommt. Mit der Epsilon-Trikla läßt sich Xf wie folgt berechnen: Für alle $v \in V$ gilt:

$$\left((\text{id} + \epsilon X) f \right) (v) = f((\text{id} - \epsilon X)v) = f(v - \epsilon Xv) = f(v) + \epsilon(Xf)(v)$$

Beispiel 4.3.1 Sei $G = SL_2(\mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}^2$, und sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Dann gilt für $f(x, y) = x^n y^m \in \mathbb{C}[x, y] = \mathbb{C}[\mathbb{C}^2]$, $\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ und $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \left((\text{id} + \epsilon X) f \right) (\underline{u}) &= f\left((\text{id} - \epsilon X) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \\ &= (u - \epsilon(au + bv))^n (v - \epsilon(cu - av))^m \\ &= u^n v^m + \epsilon \left[(ma - na)u^n v^m - mcu^{n+1}v^{m-1} - nbu^{n-1}v^{m+1} \right]. \end{aligned}$$

Damit folgt: $Xf = \left\{ a\left(y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}\right) - cx\frac{\partial}{\partial y} - by\frac{\partial}{\partial x} \right\} f$.

Satz 4.3.1 \mathfrak{g} operiert auf $k[Z]$ durch Derivationen.

Beweis. Sei zunächst $Z = V \simeq k^n$ eine G -Darstellung. Sei $v = \sum_i a_i e_i$, sei $u = Xv = \sum_j b_j e_j$ und sei f homogen vom Grad m . Wie man leicht

nachrechnet (zum Beispiel an Monomen der Form $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$), gilt

$$f(v - \sum_j \epsilon b_j e_j) = f(v) + \epsilon \partial_{-u}|_v(f)$$

Aus der Gleichung $(\text{id} + \epsilon X)f(v) = f(v - \sum_j \epsilon b_j e_j) = f(v) + \epsilon(Xf)(v)$ folgt: X operiert auf $k[V]$ durch $(Xf)(v) = \partial_{(-Xv)}|_v(f)$, und damit gilt:

$$\begin{aligned} X(fh)(v) &= \partial_{(-Xv)}|_v(fh) \\ &= f(v)\partial_{(-Xv)}|_v(h) + h(v)\partial_{(-Xv)}|_v(f) \\ &= f(v)(Xh)(v) + h(v)(Xf)(v) \end{aligned}$$

Folglich: $X(fh) = f(Xh) + h(Xf)$.

Sei $Z \hookrightarrow V$ eingebettet in eine Darstellung und sei $I_Z \subset k[V]$ das Verschwindungsideal von Z . Da Z eine G -Varietät ist, ist das Ideal $I_Z \subset k[V]$ eine Unterdarstellung von G : $f \in I_Z \Rightarrow {}^g f \in I_Z \forall g \in G$. Damit ist I_Z auch eine Unterdarstellung von \mathfrak{g} . Die Derivationen gegeben durch die Elemente aus \mathfrak{g} induzieren daher auch Derivationen auf $k[Z] = k[V]/I_Z$. •

Sei G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe und sei λ die Linkstranslation auf $k[G]$, d.h., $\lambda_g : k[G] \rightarrow k[G]$, $(\lambda_g f)(h) = f(g^{-1}h)$, und sei ρ die Rechtstranslation auf $k[G]$, d.h., $(\rho_g f)(h) = f(hg)$. Eine Derivation δ heißt *linksinvariant* wenn

$$\lambda_g \circ \delta = \delta \circ \lambda_g \forall g \in G,$$

und entsprechend werden die *rechtsinvarianten* Derivationen definiert. Übersetzt man dies in die Sprache der Vektorfelder, so sind die *linksinvarianten* Vektorfelder genau die, für die gilt:

$$\mathbf{d}\lambda_g \circ \sigma = \sigma \circ \lambda_g \forall g \in G,$$

und entsprechend werden die *rechtsinvarianten* Vektorfelder definiert. Offensichtlich ist eine Derivation links- (rechts)-invariant dann und nur dann wenn das zugehörige Vektorfeld links- (rechts)-invariant ist, und umgekehrt. Bezeichne mit $\mathcal{L}(G)$ die Menge der links- G -invarianten Vektorfelder auf G und sei $\mathcal{R}(G)$ die Menge der rechts- G -invarianten Vektorfelder auf G .

Satz 4.3.2 Die Abbildung $\sigma \mapsto \sigma|_{\text{id}}$ definiert einen Liealgebrasomorphismus zwischen $\mathcal{L}(G)$ (respektive $\mathcal{R}(G)$) und $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$.

Beweis. Linearkombinationen von links- (rechts-) invarianten Derivationen sind wieder links- (rechts-) invariant, somit bildet $\mathcal{L}(G)$ (respektive

$\mathcal{R}(G)$) einen Untervektorraum des Raums aller Derivationen auf G . Die Derivationen bilden eine Liealgebra mit der üblichen Klammer: $[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$, und man rechnet leicht nach, daß die Klammer von $\mathcal{L}(G)$ (respektive $\mathcal{R}(G)$) invarianten Derivationen wieder ein $\mathcal{L}(G)$ (respektive $\mathcal{R}(G)$) invariante Derivation ist.

Somit bilden (unter der Bijektion Vektorfelder \leftrightarrow Derivationen) sowohl $\mathcal{L}(G)$ als auch $\mathcal{R}(G)$ eine Liealgebra. Die Abbildung $\sigma \rightarrow \sigma|_{\text{id}}$ ist offensichtlich linear, und, wegen der G -invarianz injektiv: Sowohl bezüglich der Rechtsmultiplikation als auch der Linksmultiplikation ist G ein Orbit, ein G -invariantes Vektorfeld ist damit durch seinen Wert an einem Punkt vollständig bestimmt. Um die Surjektivität zu zeigen, sei für $X \in \mathfrak{g}$ und $f \in k[G]$ die Funktion $f * X$ definiert durch: $(f * X)(g) = X(g^{-1}f)$, wobei X hier als Punktderivation im Punkt id operiert.

Übung 4.3.2 Zeige: $f * X \in k[G]$. Hinweis: Sei $\mu^\# : k[G] \rightarrow k[G] \otimes k[G]$ der Komorphismus der Multiplikation. Für $f \in k[G]$ sei $\mu^\#(f) = \sum f_i \otimes g_i$. Zeige: $\lambda_{g^{-1}}f = \sum f_i(g)g_i$, und damit $f * X = \sum (Xg_i)f_i$.

Zunächst einmal gilt für $f, h \in k[G]$:

$$\begin{aligned} (fh * X)(g) = X(g^{-1}fh) &= X(g^{-1}fg^{-1}h) \\ &= X(g^{-1}f)g^{-1}h(\text{id}) + g^{-1}f(\text{id})X(g^{-1}h) \\ &= X(g^{-1}f)h(g) + f(g)X(g^{-1}h) \\ &= ((f * X)h + f(h * X))(g) \end{aligned}$$

und damit ist $*X$ eine Derivation, die k -Linearität ist klar. Zudem gilt

$$\begin{aligned} (g'(f * X))(g) &= (f * X)(g'^{-1}g) \\ &= X(g^{-1}(g'f)) \\ &= ((g'f) * X)(g) \end{aligned}$$

und damit ist $*X$ G -linksinvariant.

Übung 4.3.3 Definiere ebenso wie in Übung 4.3.2: $(f *^r X)(g) = X(\rho_g f)$. Zeige: $f *^r X \in k[G]$, und $*^r X$ definiert so eine rechtsinvariante Derivation auf $k[G]$, so daß das zugehörige Vektorfeld an id den Wert X hat.

Sei nun δ eine linksinvariante Derivation, dann gilt wegen der G -Invarianz:

$$(f * \delta_{\text{id}})(g) = \delta_{\text{id}}(g^{-1}f) = \delta(g^{-1}f)(\text{id}) = g^{-1}(\delta(f))(\text{id}) = \delta(f)(g),$$

und damit $\delta(f) = (f * \delta_{\text{id}})$. Ist $X \in \mathfrak{g}$, so folgt für die Derivation $*X$:

$$(*X)_{\text{id}}(f) = (f * X)(\text{id}) = X(\text{id}^{-1}f) = X(f),$$

und somit ergibt umgekehrt die Derivation $*X$ an der Stelle id wieder die Punktderivation X . Damit ist gezeigt, daß die Abbildung $\delta \mapsto \delta|_{\text{id}}$ ein Vektorraumisomorphismus zwischen $\mathcal{L}(G)$ und \mathfrak{g} definiert, mit der Umkehrabbildung $X \mapsto *X$.

Als nächstes muß man sich überlegen, daß diese Abbildung ein Liealgebrenhomomorphismus ist. Dazu schauen wir uns genauer die Operation von $*X$ an. Sei $\mu : G \times G \rightarrow G$ die Multiplikationsabbildung, und sei $\mu^\sharp : k[G] \rightarrow k[G] \otimes k[G]$ der Komorphismus. Für $f \in k[G]$ sei $\mu^\sharp(f) = \sum f_i \otimes g_i$, dann ist

$$(\lambda_{g^{-1}}f)(h) = f(gh) = \sum f_i(g)g_i(h) \Rightarrow \lambda_{g^{-1}}f = \sum f_i(g)g_i.$$

Damit folgt:

$$(f * X)(g) = X(g^{-1}f) = X(\lambda_{g^{-1}}f) = X(\sum f_i(g)g_i) = \sum f_i(g)(Xg_i),$$

und somit: $f * X = \sum (Xg_i)f_i$. Als Folgerung bekommen wir für $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $f \in k[G]$:

$$((f * Y) * X)(e) = \sum (Yg_i)(f_i * X)(e) = \sum (Xf_i)(Yg_i)$$

Eine andere Art diese Konstruktion zu sehen ist wie folgt: Für $X, Y \in \mathfrak{g}$ sei $X \otimes Y : k[G] \otimes k[G] \rightarrow k$ die Abbildung definiert durch $f \otimes h \mapsto (Xf)(Yh)$ (Übung: dies ist wohldefiniert). Für $X, Y \in \mathfrak{g}$ sei nun $X \cdot Y$ definiert durch $X \cdot Y = (X \otimes Y) \circ \mu^\sharp$. Also für $f \in k[G]$ sei $\mu^\sharp(f) = \sum f_i \otimes g_i$, dann ist

$$(X \cdot Y)(f) = \sum X(f_i)Y(g_i) \Rightarrow (X \cdot Y)(f) = ((f * Y) * X)(e)$$

Um die zu beweisen, daß $\delta \mapsto \delta|_{\text{id}}$ ein Liealgebrenhomomorphismus ist, müssen wir zeigen, daß die Lieklammer auf den Derivationen in die Lieklammer auf den Matrizen übergeht. Es reicht, den Fall $G = GL_n$ zu betrachten. Die "Matrix einer Punktderivation" X in id ist die Matrix $A_X = (a_{i,j})$ mit $X(x_{i,j}) = a_{i,j}$. Entsprechend sei für Y die Matrix $B_Y = (b_{i,j})$ mit $Y(x_{i,j}) = b_{i,j}$. Dann gilt

$$(X \cdot Y)(x_{i,j}) = (X \otimes Y)(\sum_{\ell} x_{i,\ell} \otimes x_{\ell,j}) = \sum_{\ell} a_{i,\ell} b_{\ell,j},$$

dies ist gerade der (i, j) -te Eintrag in der Matrix $A_X B_Y$. Damit haben wir:

$$\left((*X * Y - *Y * X)(x_{i,j})(e) \right) = \left((X \cdot Y - Y \cdot X)x_{i,j} \right) = [A_X, B_Y].$$

Die Rechnung für rechtsinvariante Vektorfelder ist gleich und bleibt dem Leser überlassen. •

Die folgende Übung erklärt den Zusammenhang zwischen den linksinvarianten und den rechtsinvarianten Vektorfeldern:

Übung 4.3.4 Sei $\text{Inv} : G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ der Isomorphismus von Varietäten gegeben durch das Invertieren, und sei $\mathbf{d}\text{Inv}$ der induzierte Isomorphismus $\mathcal{T}G \rightarrow \mathcal{T}G$. Dann ist σ ein linksinvariantes Vektorfeld dann und nur dann wenn $\mathbf{d}\text{Inv} \circ \sigma \circ \text{Inv}$ ein rechtsinvariantes Vektorfeld ist, und für $X \in \mathfrak{g}$ gilt: $\mathbf{d}\text{Inv} \circ (*X) \circ \text{Inv} = *^r(-X)$, wobei $*^r(-X)$ das durch $-X$ eindeutig bestimmte rechtsinvariante Vektorfeld ist.

Hinweis: Zeige, daß $\lambda_g(f \circ \text{Inv})(h) = \sum f_i(h^{-1}) \otimes g_i(g)$ für $\mu^\sharp f = \sum f_i \otimes g_i$, und somit $[\text{Inv}^\sharp \circ (*X) \circ \text{Inv}^\sharp](f) = \sum -X(f_i) \circ g_i$.

Sei Z eine affine G -Varietät. Eine besondere Klasse von Vektorfeldern auf Z erhalten wir auf die folgende Weise: Sei $X \in \mathfrak{g} = \text{Lie } G$ fest gewählt, und sei $\sigma_X : Z \rightarrow \mathcal{T}Z$ das Vektorfeld definiert in einem Punkt $z \in Z$ durch:

$$\sigma_X(z) = (z, \mathbf{d}\mu_z(X)),$$

wobei $\mu_z : G \rightarrow Z, g \mapsto gz$, die Orbitabbildung und $\mathbf{d}\mu_z : \mathfrak{g} \rightarrow T_z Z$ das Differential ist.

Satz 4.3.3 Das Vektorfeld σ_X ist ein algebraisches Vektorfeld auf Z mit der Eigenschaft $\mathbf{d}g(\sigma_{\text{Ad } g^{-1}(X)}(z)) = \sigma_X(gz)$ für alle $g \in G$. Die Abbildung $X \mapsto \sigma_{-X}$ ist ein Liealgebromorphismus in von $\text{Lie } G$ in die Liealgebra $V(Z)$ der Vektorfelder auf Z . Die zugehörige Derivation ist die in Satz 4.3.1 gegebene Operation von $\text{Lie } G$ auf $k[Z]$.

Beweis. Betrachte die Abbildung

$$\Psi : G \times Z \rightarrow G \times Z, \quad (g, z) \mapsto (g, gz).$$

Dies ist ein Isomorphismus von affinen Varietäten, der einen Isomorphismus $\mathbf{d}\Psi : \mathcal{T}G \times \mathcal{T}Z \rightarrow \mathcal{T}G \times \mathcal{T}Z$ induziert. Ist also σ ein algebraisches Vektorfeld auf $G \times Z$, dann ist auch $\mathbf{d}\Psi \circ \sigma \circ \Psi^{-1}$ auch wieder ein algebraisches Vektorfeld.

Für $X \in \mathfrak{g}$ sei $\hat{\sigma} = (*^r X, 0)$ das Vektorfeld, das in der ersten Komponente das rechtsinvariante Vektorfeld zu X auf G ist und der Nullschnitt in der zweiten Komponente. Setze $\sigma = \mathbf{d}\Psi \circ \hat{\sigma} \circ \Psi^{-1}$, dann ist

$$\sigma(\text{id}, z) = \mathbf{d}\Psi_{(\text{id}, z)}(X, 0) = \left((\text{id}, z); (X, \mathbf{d}\mu_z(X)) \right).$$

Die Einschränkung $\sigma|_{(\text{id}, Z)}$ ist ein Morphismus $\sigma|_{(\text{id}, Z)} : \text{id} \times Z \rightarrow \mathfrak{g} \times \mathcal{T}Z$, dessen Projektion auf die zweite Komponente dann das gewünschte algebraische Vektorfeld $\sigma_X : Z \rightarrow \mathcal{T}Z$ mit $\sigma_X(z) = (z, \mathbf{d}\mu_z(X))$ liefert.

Indem wir $Z \hookrightarrow V$ in eine Darstellung einbetten, sehen wir sofort mit der Epsilontik für $v \in V$, $h \in G$ und $X \in \text{Lie } G$: $\mathbf{d}\mu_v(X) = Xv$ und

$$\mathbf{d}\mu_{hv}(X) = Xhv = h(h^{-1}Xh)v = \mathbf{d}h(\mu_v(\text{Ad } h^{-1}(X))).$$

Ebenso folgt (siehe Beispiel 4.3.1 und der Beweis von Satz 4.3.1) aus der Anwendung der Epsilontik auf die Linearformen x_i : σ_{-X} ist das Vektorfeld zur Derivation erhalten aus der G -Operation auf $k[V]$. Insbesondere, die Abbildung $\text{Lie } G \rightarrow \text{End}(k[V])$, $X \mapsto \sigma_{-X}$, ist ein Liealgebrahomomorphismus. Wie üblich gelten dann die gleichen Argumente auch für $Z \hookrightarrow V$. •

Definition 4.3.1 Eine endlichdimensionale Liealgebra \mathfrak{g} heißt halbeinfach, wenn sie außer der 0 kein kommutatives Ideal besitzt. Eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe G heißt halbeinfach, wenn sie außer $\{\text{id}\}$ keinen zusammenhängenden abgeschlossenen kommutativen Normalteiler besitzt.

Satz 4.3.4 Sei G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe. Dann gilt für $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$:

$$G \text{ ist halbeinfach} \Leftrightarrow \mathfrak{g} \text{ ist halbeinfach}$$

Beweis. Ist $N \subset G$ ein kommutativer zusammenhängender abgeschlossener Normalteiler, so ist $\text{Lie } N$ ein kommutatives Ideal in \mathfrak{g} (Korollar 4.1.2 und Satz 4.1.4), und beide haben die gleiche Dimension. Damit folgt “ \Leftarrow ”.

Sei Umgekehrt G halbeinfach und $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ ein kommutatives Ideal. Sei $H \subset G$ die Zusammenhangskomponente der 1 des Zentralisators von \mathfrak{n} in G , d.h., $H = \{g \in G \mid gng^{-1} = n \forall n \in \mathfrak{n}\}^0$. Dann ist $\mathfrak{h} = \text{Lie } H$ der Zentralisator in \mathfrak{g} von \mathfrak{n} (Theorem 4.1.3). Da \mathfrak{n} ein Ideal ist, ist auch der Zentralisator von \mathfrak{n} ein Ideal (Übung), und damit ist H ein Normalteiler in G (Satz 4.1.4). Dann ist aber auch die Zusammenhangskomponente des Zentrums $Z(H)^0$ von H ein Normalteiler in G , mit Liealgebra $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \supset \mathfrak{n}$ (Satz 4.1.3). Da G halbeinfach ist folgt $Z(H)^0 = 1$ und somit $\mathfrak{n} = 0$. •

Aus der Darstellungstheorie (Weyl’s Theorem) der halbeinfachen Liealgebren folgt:

Theorem 4.3.1 Jede endlichdimensionale rationale Darstellung einer halbeinfachen affinen algebraischen Gruppe ist die direkte Summe von einfachen Darstellungen.

Beweis. Aus Satz 4.1.2 folgt: Jede endlichdimensionale rationale Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ halbeinfach ist dann und nur dann wenn $\mathfrak{d}\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}V$ eine halbeinfache Darstellung der Liealgebra ist. Weyl's Theorem besagt, daß das der Fall ist für halbeinfache Liealgebren. •

Sei $G \subset GL(V)$ eine affine algebraische Gruppe und sei $k[V]^G$ die Algebra der G -invarianten Polynome $k[V]^G$ auf V , d.h.,

$$\begin{aligned} k[V]^G &= \{f \in k[V] \mid {}^g f = f \forall g \in G\} \\ &= \{f \in k[V] \mid f \text{ ist konstant auf den } G\text{-Bahnen}\} \end{aligned}$$

Theorem 4.3.2 *Sind alle endlichdimensionalen rationalen Darstellungen von G halbeinfach (zum Beispiel G ist halbeinfach oder $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ ist quasihermitsch), dann ist die Algebra $k[V]^G$ auf V endlich erzeugt, d.h., es gibt G -invariante Funktionen f_1, \dots, f_r , so daß $k[V]^G = k[f_1, \dots, f_r]$.*

Die Varietät $V//G = \text{MaxSpec } k[V]^G$ wird der *kategorische Quotient* von V nach G genannt.

Theorem 4.3.3 *$V//G$ parametrisiert die abgeschlossenen Orbits, d.h., die Inklusion $k[V]^G \hookrightarrow k[V]$ induziert einen surjektiven Morphismus $\pi : V \rightarrow V//G$, der konstant ist auf den Bahnen, und die Faser über jedem Punkt enthält genau einen abgeschlossenen Orbit. Weiter ist das Bild einer G -stabilen abgeschlossenen Teilmenge abgeschlossen, und sind $Z_1, Z_2 \subset V$ G -stabil und abgeschlossen, so ist $\pi(Z_1 \cap Z_2) = \pi(Z_1) \cap \pi(Z_2)$.*

Beweis. (Theorem 4.3.2 und 4.3.3) Da G die natürliche Graduierung auf $k[V]$ respektiert, sieht man leicht, daß ein Polynom G -invariant ist dann und nur dann wenn alle seine homogenen Teile auch invariant sind. Die homogenen Komponenten $k[V]_m \subset k[V]$ sind aber endlichdimensionale rationale Darstellungen, wir können daher ein Komplement S von $k[V]^G$ in $k[V]$ finden als G -Modul: $k[V] = k[V]^G \oplus S$, wobei $S = \sum_{U \subset k[V]} U$ die Summe aller einfachen Moduln in $k[V]$ ist, die nicht die triviale Darstellung ist. Dann ist S gleichzeitig auch ein $k[V]^G$ -Modul, und $k[V]^G S \cap k[V]^G = 0$.

Seien nun $f_1, \dots, f_r \in k[V]^G$ und sei $I \subset k[V]$ das von diesen erzeugte Ideal, also $I = \sum_{j=1}^r k[V]f_j$, Dann ist $k[V]^G \cap I = \sum_{j=1}^r k[V]^G f_j$ das von diesen Funktionen erzeugte Ideal in $k[V]$. Da $k[V]$ noethersch ist und alle aufsteigenden Ketten von Idealen stationär werden, erfüllt somit $k[V]^G$ auch diese Bedingung, ist also noethersch. Damit ist insbesondere das homogene Ideal $J = \{f \in k[V]^G \mid \deg f \geq 1\}$ der Invarianten positiven Grades endlich erzeugt, also $J = (f_1, \dots, f_r)$ mit f_1, \dots, f_r homogen vom Grad d_i .

Sei $k[f_1, \dots, f_r] \subset k[V]^G$ die Unter algebra erzeugt von den f_i . Per Induktion über den Grad zeigt man: $k[f_1, \dots, f_r] = k[V]^G$. Dies ist klar für die konstanten Funktionen. Sei also bereits gezeigt $k[f_1, \dots, f_r]_j = k[V]_j^G$ für alle $j < m$ und sei $f \in k[V]_m^G$. Dann ist $f = \sum a_j f_j$ mit $a_j \in k[V]^G$ homogen und vom Grad echt kleiner als m , und somit sind die a_j selbst Element in $k[f_1, \dots, f_r]$, also auch $f \in k[f_1, \dots, f_r]$.

Somit ist $V//G = \text{MaxSpec } k[V]^G$ eine affine Varietät, und die Inklusion $k[V]^G \subset k[V]$ induziert einen Morphismus von affinen Varietäten $\pi : V \rightarrow V//G$. Ist $v \in V$ mit Maximalideal $\mathfrak{m}_v \subset k[V]$, so ist $\pi(v) \in V//G$ der Punkt mit Maximalideal $\mathfrak{m}_{\pi(v)} = \mathfrak{m}_v \cap k[V]^G$. Da $\mathfrak{m}_{gv} = g\mathfrak{m}_v = \{g f \mid f \in \mathfrak{m}_v\}$ und offensichtlich $\mathfrak{m}_{gv} \cap k[V]^G = \mathfrak{m}_v \cap k[V]^G$, ist klar, daß π konstant ist auf den Bahnen. Sei $z \in V//G$ mit Maximalideal $\mathfrak{m}_z \subset k[V]^G$, sei $\tilde{\mathfrak{m}} \subset k[V]$ das von \mathfrak{m} in $k[V]$ erzeugte Ideal. Da $\tilde{\mathfrak{m}} \cap k[V]^G = \mathfrak{m}_z$ ist, folgt $\mathfrak{m} \neq k[V]$. Es existiert daher ein maximales Ideal $\mathfrak{m}_v \subset k[V]$ für ein $v \in V$ mit $\mathfrak{m}_v \supset \tilde{\mathfrak{m}}$, und daher " $\pi(v) = \mathfrak{m}_v \cap k[V]^G = \mathfrak{m}_z = z$ ". Die Abbildung π ist also surjektiv.

Sei nun $z \in V//G$ und sei $v \in V$ so, daß $\pi(v) = z$. Da der Morphismus konstant auf dem Orbit Gv ist und stetig (in der Zariski-Topologie), gilt auch $\pi(\overline{Gv}) = z$. Angenommen $Gv \neq \overline{Gv}$. Betrachte die Orbitabbildung $G \rightarrow \overline{Gv}$, $g \mapsto gv$. Dann enthält das Bild eine in \overline{Gv} offene Teilmenge U (Theorem 2.8.1). Also ist der Orbit $Gv = \bigcup_{g \in G} gU$ selbst offen in seinem Abschluß \overline{Gv} . Damit ist $Y = \overline{Gv} - Gv$ also eine echte abgeschlossene Teilmenge von \overline{Gv} , insbesondere gilt $\dim Y < \dim \overline{Gv}$. Somit gilt auch für jedes $y \in Y$: $\dim \overline{Gy} < \dim \overline{Gv}$. Da $\pi(y) = \pi(v)$ folgt per Induktion über die Dimension der Orbitabschüsse: Es gibt in \overline{Gv} einen abgeschlossenen Orbit $Gy \subset \overline{Gv}$. Somit gibt es zu jedem $z \in V//G$ ein $v \in V$, so daß $\pi(v) = z$ und der Orbit Gv ist abgeschlossen.

Seien nun $Y, Z \subset V$ zwei G -stabile Varietäten, dann sind die Verschwindungsideale I_Y und I_Z Unterdarstellungen von $k[V]$. Aus der isotypischen Zerlegung folgt sofort: $(I_Y + I_Z) \cap k[V]^G = (I_Y + I_Z) \cap k[V]^G$ und damit $\pi(Z \cap Y) = \pi(Z) \cap \pi(Y)$. Insbesondere: Disjunkte abgeschlossene Orbits haben disjunkte Bilder, also liegt in jeder Faser $\pi^{-1}(z)$ für $z \in V//G$ genau ein abgeschlossener Orbit. •

Bemerkung 4.3.1 Sei Z eine affine G -Varietät, so kann man Z G -äquivariant einbetten in ein Darstellung V . Sind alle endlichdimensionalen rationalen Darstellungen von G halbeinfach, so kann man $\pi : V \rightarrow V//G$ einschränken auf Z , bezeichne das Bild mit $Z//G$. Dies ist nach dem obigen Theorem eine affine Varietät, mit Koordinatenring $k[Z]^G$.

Übung 4.3.5 Zeige: $Z//G$ zusammen mit der Abbildung $\pi : Z \rightarrow Z//G$

hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem Morphismus von affinen Varietäten $\psi : Z \rightarrow Y$, der konstant ist auf den G -Bahnen in Z , gibt es eine eindeutig bestimmten Morphismus von affinen Varietäten $\psi' : Z//G \rightarrow Y$, so daß $\psi = \psi' \circ \pi$.

4.4 Isomorphismen von algebraischen Gruppen

Zunächst etwas algebraische Geometrie. Sei $\phi : Z \rightarrow Y$ ein dominanter Morphismus von affinen irreduziblen Varietäten gleicher Dimension. Die Inklusion $k[Y] \hookrightarrow k[Z]$ induziert eine Inklusion $k(Y) \hookrightarrow k(Z)$, die eine endliche Körpererweiterung ist. Der Grad $[k(Z) : k(Y)]$ heißt auch der Grad der Abbildung.

Satz 4.4.1 *Es gibt eine offene dichte Teilmenge $U \subset Y$, so daß für alle $y \in U$ die Faser aus genau $[k(Z) : k(Y)]$ Punkten besteht.*

Beweis. Die Körpererweiterung $k(Y) \hookrightarrow k(Z)$ ist endlich und separabel, besitzt also ein primitives Element $r \in k[Z]$ mit Minimalpolynom $f(T) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j T^j + T^m$, $a_j \in k(Y)$. Sei b ein gemeinsames Vielfaches der Nenner der a_0, \dots, a_{m-1} , dann ist br auch ein primitives Element. Sei $\tilde{f}(T) = (a_0 b^m) + (a_1 b^{m-1})T + \dots + (a_{m-1} b)T^{m-1} + T^m$, dann ist $\tilde{f}(br) = 0$. Indem man also r geeignet durch ein $r' = br$, $b \in k[Y]$, ersetzt, kann man annehmen: Die Koeffizienten a_i des Minimalpolynoms liegen in $k[Y]$. Sei $k[Z] = k[Y][f_1, \dots, f_r]$, jedes der f_j ist von der Form $\sum h_j r^j$ mit $h_j \in k(Y)$. Durch Übergang zu einer offenen Teilmenge kann man die h_j alle als invertierbar auf Y annehmen, also $\mathbb{C} k[Z] = \sum_{j=0}^{m-1} k[Y] r^j$.

Sei $y \in Y$ mit Maximalideal \mathfrak{m}_y , dann ist $\phi^{-1}(y) = V(\mathfrak{m}_y k[Z])$ und $k[\phi^{-1}(y)] = k[Z]/\sqrt{\mathfrak{m}_y k[Z]} \simeq \bigoplus_j k\bar{r}^j \simeq k[T]/\bar{f}(T)$ mit $\bar{f}(T) = \sum_{j=0}^{m-1} \bar{a}_j T^j + T^m$ und $\bar{a}_j \equiv a_j \pmod{\mathfrak{m}_y}$. Es besteht also die Faser aus genau m Punkten wenn $\bar{f}(T)$ genau m verschiedene Nullstellen hat. Sei D die Diskriminante von f , auf der offenen Teilmenge auf der diese nicht verschwindet, ist dies der Fall. •

Satz 4.4.2 *Ein dominanter Morphismus $\phi : Z \rightarrow Y$ ist generisch injektiv $\Leftrightarrow \phi$ ist birational, d.h. $[k(Z) : k(Y)] = 1$. Und weiter ist ϕ birational $\Leftrightarrow \exists$ spezielle offene Teilmenge $W \subset Y$ so daß für $U = \phi^{-1}(W) \subset Z$, gilt: $\phi|_U : U \rightarrow W$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Die erste Äquivalenz ist offensichtlich. Die Richtung “ \Leftarrow ” ist bei der zweiten Äquivalenz auch klar, es bleibt die Richtung “ \Rightarrow ” zu zeigen. Wir

identifizieren die beiden Funktionenkörper und bekommen wegen der Dominanz Inklusionen $k[Y] \subset k[Z] \subset k(Z) = k(Y)$. Sei $k[Z] = k[Y][f_1, \dots, f_t]$ mit $f_i = g_i/h_i$, wobei $g_i, h_i \in k[Y]$. Dann ist offensichtlich für $h = h_1 \cdots h_t$: $k[Y]_h \subset k[Z]_h$ und damit $Y_h \simeq Z_h$. •

Korollar 4.4.1 *Ein bijektiver Morphismus $\phi : G \rightarrow G'$ zwischen zusammenhängenden affinen algebraischen Gruppen ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Der Morphismus ist birational nach Satz 4.4.2, sei $G'_f \subset G'$ eine spezielle offene Teilmenge, so daß $\phi^{-1}(G'_f) \rightarrow G'_f$ ein Isomorphismus ist. Indem man die offenen Teilmengen durch $g \in G'$ verschiebt, findet man eine endliche offene Überdeckung von G' durch spezielle offene Teilmengen, so daß die Einschränkungen jeweils Isomorphismen sind.

Beachte: $G = \bigcup G'_{g f}$, und damit $\emptyset = \bigcap V((^g f)) = V((^g f : g \in G'))$. Da $k[G']$ noethersch ist, kann aus den $^g f$ also eine endliche Teilmenge ausgewählt werden, so daß $1 \in (f_1, \dots, f_r)$, also $G' = \bigcup_{i=1}^r G'_{f_i}$, und die Inklusion $k[G'] \subseteq k[G]$ ist jeweils Gleichheit nach Lokalisierung $k[G']_{f_i} = k[G]_{f_i} \subset k(G) = k(G')$.

Sei $f \in \bigcap_i k[G']_{f_i} = \bigcap_i k[G]_{f_i} \supseteq k[G]$, es gibt also Potenzen $n_i \in \mathbb{N}$ und $h_i \in k[G']$, so daß $f = h_i/f_i^{n_i}$ in $k[G']_{f_i}$. Indem man h_i durch $h_i f_i^{N-n_i}$ ersetzt falls nötig, kann man sogar annehmen: $f = h_i/f_i^N$ in $k[G']_{f_i}$ für eine festes $N \in \mathbb{N}$.

Nun ist $1 \in (f_1, \dots, f_r)$, und sogar in (f_1^N, \dots, f_r^N) . Sei $1 = \sum_j a_j f_j^N$ mit $a_j \in k[G']$, dann gilt

$$f = f \cdot \left(\sum_j a_j f_j^N \right) = \sum_j h_j f_j^N \frac{a_j}{f_j^N} \in k[G'],$$

und somit auch $k[G'] \supseteq k[G]$. •

4.5 Wurzeln und Gewichte

Sei G eine affine zusammenhängende algebraische Gruppe. Ein *Torus* T in G ist eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe, die, als affine Gruppe, isomorph ist zu T_n für ein n . Der Torus $T \subset G$ wird *maximaler Torus* genannt wenn er in keinem weiteren Torus in G echt enthalten ist.

Beispiel 4.5.1 Die Gruppe $T_n \subset GL_n$ ist ein maximaler Torus, und ebenso die Gruppe $T = T_n \cap SL_n$. Desweiteren sind die Gruppen $T \subset G$ im Abschnitt 1.6 alles maximale Tori in den jeweiligen Gruppen G .

Sei G eine affine algebraische Gruppe. Mit $X(G)$ bezeichnet man alle Charaktere von G , d.h., alle eindimensionalen Darstellungen von G . Natürlich ist $X(G) \subset k[G]$, es sind insbesondere invertierbare Funktionen. Bezüglich der Multiplikation in $k[G]$ bilden sie eine Untergruppe von $k[G]$. Dabei entspricht die Multiplikation dem Tensorprodukt der Darstellungen, und der Übergang zur inversen $(1/f)$ Funktion entspricht dem Übergang zur dualen Darstellung. Ist G zusammenhängend und $\chi \in X(G)$, so ist $\chi(G) = 1$ oder $\chi(G) = k^*$, insbesondere ist also $X(G)$ eine torsionsfreie abelsche Gruppe.

Lemma 4.5.1 *Sei G eine abstrakte Gruppe und sei $X(G)$ die Menge aller Homomorphismen $\chi : G \rightarrow k^*$. Dann bilden die $X(G)$ eine linear unabhängige Teilmenge in der Algebra aller k -wertigen Funktionen auf G .*

Beweis. Sei χ_1, \dots, χ_n eine minimale linear abhängige Teilmenge, also seien ohne Einschränkung $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$ linear unabhängig und $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \chi_i + \chi_n = 0$. Da $\chi_1 \neq \chi_n$, sei $y \in G$ so, daß $\chi_1(y) \neq \chi_n(y)$. Dann gilt für alle $g \in G$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \chi_i(gy) + \chi_n(gy) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} a_i \chi_i(g) \chi_i(y) + \chi_n(g) \chi_n(y) = 0$$

aber natürlich auch $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \chi_i(g) \chi_n(y) + \chi_n(g) \chi_n(y) = 0$, und damit

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\chi_i(y) - \chi_n(y)) \chi_i(g) = 0$$

mit von Null verschiedenen Koeffizienten, im Gegensatz zur Annahme. •

Satz 4.5.1 *Eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe eines T_n ist ein Torus, insbesondere ist $X(T)$ eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe und somit isomorph zu einem \mathbb{Z}^m . Weiter bildet $X(T)$ eine Basis des k -Vektorraums $k[T]$, und die Charaktere von T sind von der Form $\chi|_T$ für ein $\chi \in X(T_n)$. Sei andererseits $Y(T)$ die abelsche Gruppe aller Morphismen $\rho : k^* \rightarrow T$. Dann definiert die bilineare Form:*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X(T) \times Y(T) \rightarrow \mathbb{Z}, (\chi, \rho) \mapsto \langle \chi, \rho \rangle \text{ wobei } \chi(\rho(t)) = t^{\langle \chi, \rho \rangle} \quad \forall t \in k^*$$

eine nicht-ausgeartete Paarung zwischen $X(T)$ und $Y(T)$.

Beweis. Für $T = T_n$ ist $k[T_n] = k[x_1^\pm, \dots, x_n^\pm]$, und alle Charaktere sind von der Form $\chi(t) = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}(t)$ für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist $X(T_n)$

isomorph zu \mathbb{Z}^n , und die Charaktere bilden ein Basis des k -Vektorraums $k[T_n]$.

Sei nun $T \subset T_n$ eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe. Die Abbildung $k[T_n] \rightarrow k[T]$ ist surjektiv, und die Einschränkung eines Charakters ist wieder ein Charakter. Daher bilden die $\chi|_T$ mit $\chi \in X(T_n)$ ein Erzeugendensystem von $k[T]$ als k -Vektorraum. Lemma 4.5.1 besagt aber, daß die Charaktere linear unabhängig sind, also bilden die $\chi|_T$ mit $\chi \in X(T_n)$ eine Basis des k -Vektorraums $k[T]$, und insbesondere:

$$X(T) = \{\chi|_T \mid \chi \in X(T_n)\}.$$

Damit ist $X(T)$ als Quotient einer endlich erzeugten abelschen Gruppe wieder eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, und, da T zusammenhängend ist, auch torsionsfrei. Es folgt: $X(T) \simeq \mathbb{Z}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Sei $\chi_1, \dots, \chi_m \in X(T)$ eine Basis, und sei $\psi : T \rightarrow T_m$ der Morphismus von affinen algebraischen Gruppen $\underline{t} \mapsto (\chi_1(\underline{t}), \dots, \chi_m(\underline{t}))$. Der Komorphismus $\psi^\sharp : k[T_m] \rightarrow k[T]$ schickt ein Monom $x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} \in k[T_m]$ auf $\chi_1^{a_1} \cdots \chi_m^{a_m} \in k[T]$. Die $x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$ bilden eine Basis von $k[T_m]$ und die $\chi_1^{a_1} \cdots \chi_m^{a_m}$ bilden eine Basis von $k[T]$, der Komorphismus ist also ein Isomorphismus, und damit ist auch $\psi : T \rightarrow T_m$ ein Isomorphismus.

Für $T = T_m$ sei ϵ_i die Projektion auf die i -te Koordinate und sei ρ_i die Einbettung von k^* in die i -te Koordinate von T_m . Dann bilden die ϵ_i und ρ_i jeweils ein freies Erzeugendensystem von $X(T)$ und $Y(T)$, das dual zueinander ist bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$. •

Für einen Beweis des folgenden Theorems verweisen wir auf die Bücher von Borel, Humphreys oder Springer über algebraische Gruppen.

Theorem 4.5.1 *Sei G eine affine algebraische Gruppe. Alle maximalen Tori in G sind konjugiert.*

Sei nun $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine endlichdimensionale rationale Darstellung und sei $T \subset G$ ein maximaler Torus. Die Einschränkung $\rho|_T : T \rightarrow GL(V)$ ist dann eine rationale endlichdimensionale Darstellung von T . Aus Korollar 3.1.1 folgt: Die Darstellung ist die direkte Summe von 1-dimensionalen Darstellungen. Zu $\chi \in X(T)$ sei

$$V_\chi = \{v \in V \mid \rho(\underline{t})v = \chi(\underline{t})v\},$$

genannt der *Gewichtsraum* von V zum Gewicht χ . Der T -Modul V zerfällt in die direkte Summe seiner Gewichtsräume $V = \bigoplus_{\chi \in X(T)} V_\chi$.

Sei $\mathbb{Z}[X]$ der Gruppenring der Gruppe $X(T)$ mit Basis $\{e^\nu \mid \nu \in X\}$. Die formale Summe

$$\text{Char } V = \sum_{\nu \in X} \dim V_\nu e^\nu$$

wird der Charakter der Darstellung genannt. Wir fassen e^ν als Funktion auf T auf durch $e^\nu(\underline{t}) = \nu(\underline{t})$, somit können wir auch $\text{Char } V$ als Funktion auffassen: $\text{Char } V(\underline{t}) = \sum_{\nu \in X} \dim V_\nu e^\nu(\underline{t})$. Dann ist aber

$$\text{Char } V(\underline{t}) = \text{Tr } \rho(\underline{t}),$$

nicht weiter als die Spurfunktion auf der Darstellung.

Betrachten wir eine spezielle Darstellung, die adjungierte Darstellung $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g})$. Sei wieder T ein maximaler Torus in G , dann wird die Menge

$$\Phi = \{\nu \in X \mid \nu \neq 0, \mathfrak{g}_\nu \neq 0\}$$

die Menge der Wurzeln (des charakteristischen Polynoms von $\text{Ad } t$) genannt.

Beispiel 4.5.2 Sei $G = GL_n$, $T = T_n$, dann ist $\mathfrak{g} = M_n$. Wir haben $X = \mathbb{Z}^n$, und die Menge der Wurzeln ist

$$\Phi = \{\beta = \epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}.$$

Beachte: $\Phi = \Phi^+ \cup -\Phi^+$, wobei $\Phi^+ = \{\beta = \epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Sei $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$, dann läßt sich jede Wurzel in Φ^+ schreiben als ganzzahlige rein positive und jede Wurzel in $-\Phi^+$ als ganzzahlige rein negative Linearkombination der Elemente in $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$. Sei $E_{\epsilon_i - \epsilon_j} \in \mathfrak{g}$ das Element

$$E_{\epsilon_i - \epsilon_j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

wobei der Eintrag 1 in der i -ten Zeile und j -ten Spalte ist, und $\mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} = kX_{\epsilon_i - \epsilon_j}$. Man bekommt eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\beta \in \Phi} \mathfrak{g}_\beta \quad \text{mit } \mathfrak{g}_0 = \text{Lie } T, \quad \text{und } \dim \mathfrak{g}_\beta = 1 \forall \beta \in \Phi.$$

Beispiel 4.5.3 Sei $G = SL_n$, $T = T_n \cap SL_n$, dann ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, der Unterraum der $n \times n$ -Matrizen mit Spur 0. Wir haben $X = \mathbb{Z}^n / \mathbb{Z}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)$, und die Menge der Wurzeln ist

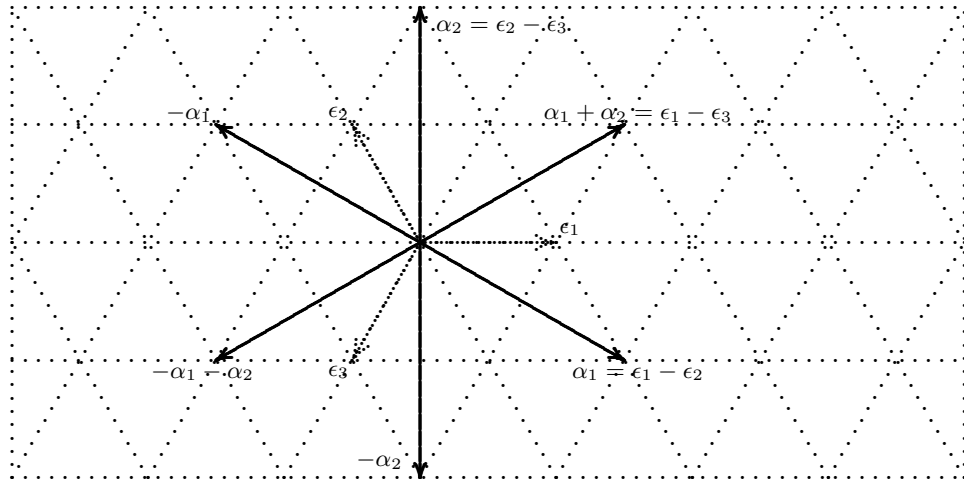
$$\Phi = \{\beta = \epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\},$$

genauso wie oben. Wieder ist $\mathfrak{g}_0 = \text{Lie } T$, $\mathfrak{g}_\beta = kE_\beta$ für $\beta \in \Phi$, wobei E_β ist wie in (4.11). Man bekommt eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\beta \in \Phi} \mathfrak{g}_\beta \quad \text{mit } \mathfrak{g}_0 = \text{Lie } T, \quad \text{und } \dim \mathfrak{g}_\beta = 1 \forall \beta \in \Phi.$$

Als Beispiel das Gitter $X(T) = \mathbb{Z}^3 / \mathbb{Z}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$ für den maximalen Torus $T \subset SL_3$, mit den Erzeugern $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ und dem Wurzelsystem

$$\Phi = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\} \supset \Phi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\} \supset B = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$



Beispiel 4.5.4 Sei $G = Sp_{2m}$ und $T = T_n \cap Sp_{2m}$ wie in Beispiel 1.6.3, dann ist die Liealgebra geben in Beispiel 4.1.2. Die Charaktergruppe $X(T)$ ist dann isomorph zu \mathbb{Z}^m mit den Erzeugern $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ (Projektionen der Diagonalmatrix auf die i -te Komponente). Das Wurzelsystem ist

$$\Phi = \{\pm(\epsilon_i - \epsilon_j), \pm(\epsilon_i + \epsilon_j), \pm 2\epsilon_i \mid 1 \leq i < j \leq m\}$$

Beachte, man hat wieder $\Phi = \Phi^+ \cup -\Phi^+$, wobei in diesem Fall

$$\Phi^+ = \{(\epsilon_i - \epsilon_j), (\epsilon_i + \epsilon_j), 2\epsilon_i \mid 1 \leq i < j \leq m\},$$

und setze $B = \{\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{m-1} = \epsilon_{m-1} - \epsilon_m, \alpha_m = 2\epsilon_m\}$. Wieder lassen sich die Element aus Φ^+ als ganzzahlige rein positive und aus Φ^- als ganzzahlige rein negative Linearkombinationen der Element aus B schreiben. Für $\beta = \epsilon_i - \epsilon_j$ sei

$$E_\beta = \begin{pmatrix} E_{\epsilon_i - \epsilon_j} & 0 \\ 0 & -E_{\epsilon_{m-i+1} - \epsilon_{m-j+1}} \end{pmatrix},$$

wobei die Matrizen $E_{\epsilon_i - \epsilon_j} \in M_m$ wie in (4.11) sind. Für $\beta = \epsilon_i + \epsilon_j$ seien die entsprechenden Matrizen E_β und $E_{-\beta}$ definiert durch

$$E_\beta = \begin{pmatrix} 0 & E_{\epsilon_i - \epsilon_j} + E_{\epsilon_{m-i+1} - \epsilon_{m-j+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\beta} = {}^t E_\beta,$$

sowie für $\beta = 2\epsilon_i$ sei

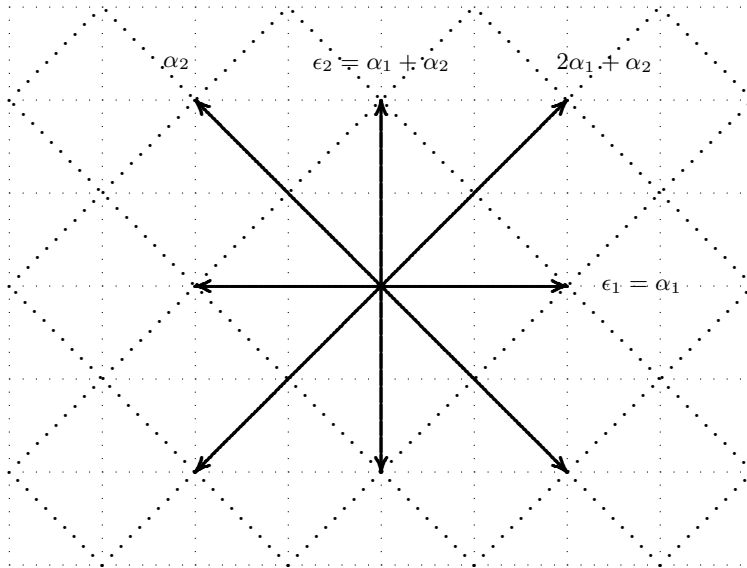
$$E_\beta = \begin{pmatrix} 0 & E_{\epsilon_i - \epsilon_{m-i+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\beta} = {}^t E_\beta.$$

Man bekommt eine Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\beta \in \Phi} \mathfrak{g}_\beta \quad \text{mit } \mathfrak{g}_0 = \text{Lie } T, \quad \text{und } \dim \mathfrak{g}_\beta = 1 \forall \beta \in \Phi.$$

Das nachfolgende Beispiel zeigt die Charaktergruppe $X(T)$ für die Gruppe Sp_4 mit den Erzeugern ϵ_1, ϵ_2 und dem Wurzelsystem

$$\begin{aligned} \Phi &= \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(2\alpha_1 + \alpha_2)\} \\ &\quad \cup \\ \Phi^+ &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2\} \\ &\quad \cup \\ B &= \{\alpha_1, \alpha_2\} \end{aligned}$$



Wir haben in den vorangegangenen Abschnitten mehrere Beispiele für linear reduktive algebraische Gruppen angetroffen: die allgemeine lineare Gruppe GL_n und die spezielle lineare Gruppe SL_n , die symplektische Gruppe Sp_{2m} und die spezielle orthogonale Gruppe SO_n , Tori, und quasihermitesche Gruppen, die halbeinfachen Gruppen. Einen allgemeinen Beweis des folgenden Theorems findet man in den Büchern von Borel, Humphreys oder Springer über algebraische Gruppen, in den Beispielen kann die Aussage des folgenden Strukturtheorems leicht direkt verifiziert werden:

Theorem 4.5.2 *Sei G eine zusammenhängende linear reduktive algebraische Gruppe mit Liealgebra \mathfrak{g} , und sei $T \subset G$ ein maximaler Torus. Bezeichne mit Φ das Wurzelsystem. Dann gilt:*

i) $\Phi = -\Phi$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\beta \in \Phi} \mathfrak{g}_\beta$, wobei $\dim \mathfrak{g}_\beta = 1$ für alle $\beta \in \Phi$ und $\mathfrak{g}_0 = \text{Lie } T$.

ii) Man kann Φ schreiben als $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ mit $\Phi^- = -\cup \Phi^+$, Φ^+ ist stabil unter Addition und $\Phi^+ \cap \Phi^- = \emptyset$. Man nennt ein Element in Φ^+ einfach, wenn es nicht zerlegt werden kann als Summe zweier Wurzeln in Φ^+ . Die einfachen Wurzeln sind linear unabhängige Elemente in der abelschen Gruppe $X(T)$, jede Wurzel in Φ^+ kann als positive, jede Wurzel in Φ^- als negative ganzzahlige Linearkombination der einfachen Wurzeln geschrieben werden. Die Wurzeln in Φ^+ werden daher auch als positive, die in Φ^- als negative Wurzeln bezeichnet, und die Menge der einfachen Wurzeln B wird als Basis des Wurzelsystems bezeichnet.

iii) Für $\beta \in \Phi$ seien $E_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ und $E_{-\beta} \in \mathfrak{g}_{-\beta}$ jeweils Erzeuger des Wurzelraums. Dann ist $H_\beta = [E_\beta, E_{-\beta}] \neq 0$ in $\text{Lie } T$, und $E_\beta, H_\beta, E_{-\beta}$ können so normiert werden, daß

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto E_\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto H_\beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto E_{-\beta}$$

einen Liealgebrasomorphismus von \mathfrak{sl}_2 auf die von $E_\beta, H_\beta, E_{-\beta}$ erzeugte Unterliealgebra von \mathfrak{g} definiert.

iv) Sind $\beta, \delta \in \Phi$, so daß $\beta + \delta \in \Phi$, dann ist $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\delta] = \mathfrak{g}_{\beta+\delta}$. Für $\beta \in \Phi$ sei $\mathbf{d}\beta : \text{Lie } T \rightarrow k$. Ist $h \in \text{Lie } T$, dann gilt $[h, E_\beta] = \mathbf{d}\beta(h)E_\beta$.

v) Sei $N_G(T)$ der Normalisator von T in G . Die Gruppe $N_G(T)/T$ ist endlich und wird die Weylgruppe W von G genannt. W operiert auf der Charaktergruppe durch $\chi \mapsto \chi \circ w$. Dabei operiert W transitiv auf der Menge der möglichen Zerlegungen $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$

Wir fixieren eine Zerlegung $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$. Betrachte die Zerlegung der Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ mit

$$\mathfrak{h} = \text{Lie } T, \quad \mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\beta \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\beta, \quad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\beta \in \Phi^+} \mathfrak{g}_{-\beta}$$

In den Beispielen hat man immer: \mathfrak{h} liegt in den Diagonalmatrizen und \mathfrak{n}^+ repektive \mathfrak{n}^- liegt in den oberen beziehungsweise unteren Dreiecksmatrizen. Für ein eingebettetes $G \subset GL(V)$ kann die Zerlegung immer so gewählt werden:

Die einfachen Wurzeln $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ sind linear unabhängige Elemente der abelschen Gruppe $X(T)$, und somit gibt es ein $\rho \in Y(T)$ mit $\langle \alpha_j, \rho \rangle \geq 1$ für alle j . Der maximale Torus T ist in der $GL(V)$ diagonalisierbar, und dann kann man die Diagonalgestalt gleich so wählen, daß

$$\forall t \in k^* : \rho(t) = \text{diag}(t^{m_1}, \dots, t^{m_n}) \quad \text{mit } m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n.$$

Damit folgt sofort: M_n zerfällt unter der Konjugation von $\rho(k^*)$ in die direkte Summe von Eigenräume, wobei die Eigenräume, auf denen k^* mit einer positiven Potenz von t operiert, alle in den oberen Dreiecksmatrizen (mit Nullen auf der Diagonalen) liegen, und die, bei denen k^* mit einer negativen Potenz von t operiert, alle in den unteren Dreiecksmatrizen (mit Nullen auf der Diagonalen) liegen.

Für eine solche Einbettung einer zusammenhängenden linear reductiven algebraischen Gruppe setze $B = (G \cap B_n)^0$, $U = (G \cap U_n)^0$ und $U^- = (G \cap U_n^-)^0$, wobei U_n^- die Untergruppe der unteren Dreiecksmatrizen der GL_n mit 1 auf der Diagonalen ist. Für die Liealgebren gilt dann wegen der durchschnittserhaltenden Eigenschaft von Liealgebren:

$$\text{Lie } B = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+, \quad \text{Lie } U = \mathfrak{n}^+ \quad \text{und} \quad \text{Lie } U^- = \mathfrak{n}^-. \quad (4.12)$$

Für einen allgemeine Beweis des folgenden Theorems verweisen wir wieder auf die Literatur, in den Beispielen ist das Resultat jeweils leicht nachzurechnen.

Theorem 4.5.3 *$B \subset G$ ist eine Boreluntergruppe, d.h., B ist eine maximale zusammenhängende auflösbare Untergruppe von G . Alle Boreluntergruppen von G sind konjugiert zu B in G . U ist eine maximale zusammenhängende unipotente (d.h. nur aus unipotenten Elementen bestehende Gruppe) Untergruppe von G , und alle maximalen unipotenten Untergruppen von G sind konjugiert zu U .*

Korollar 4.5.1 Sei $\phi : G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung einer zusammenhängenden linear reduktiven affinen algebraische Gruppe und sei $U \subset G$ eine maximale zusammenhängende unipotente Untergruppe. Dann ist $V^U \neq 0$, und $V = \langle GV^U \rangle$.

Beweis. Es reicht, das Korollar für irreduzible Darstellungen zu beweisen. Die Konstruktion von U oben zeigt, daß man immer $U \subset U_n$ ($n = \dim V$) annehmen kann und daher ist $V^U \neq 0$, was, wegen der Irreduzibilität von V , sofort $V = \langle GV^U \rangle$ zur Folge hat. •

Um die Darstellungen genauer zu untersuchen, sei $E_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ ein von Null verschiedenes Element in $\mathfrak{g} \subset M_n$. Dann ist E_β eine nilpotente Matrix, und die Abbildung: $\exp_\beta : k \rightarrow GL_n$,

$$t \mapsto e^{tE_\beta} = \text{id} + tE_\beta + \frac{t^2 E_\beta^2}{2!} + \frac{t^3 E_\beta^3}{3!} + \dots + \frac{t^{n-1} E_\beta^{n-1}}{(n-1)!} + \underbrace{\frac{t^n E_\beta^n}{n!}}_{=0} + \dots,$$

ein Morphismus von der affinen algebraischen Gruppe k (mit Addition als Gruppenstruktur) in die GL_n . Mit Hilfe der Epsilontik sieht man sofort:

$$\text{Lie } \exp_\beta(k) = kE_\beta = \mathfrak{g}_\beta.$$

Satz 4.5.2 Sei G eine linear reduktive zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit fest gewähltem maximalen Torus T und maximalen unipotenten Untergruppen U, U^- passend zu der Zerlegung des Wurzelsystems $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$. Dann gibt es zu jeder Wurzel β eine eindimensionale abelsche abgeschlossene Untergruppe $U_\beta \subset U$ für $\beta \in \Phi^+$ und $U_\beta \subset U^-$ für $\beta \in \Phi^-$, mit $\text{Lie } U_\beta = \mathfrak{g}_\beta$. Diese U_β werden Wurzeluntergruppen genannt. Ist $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine rationale endlichdimensionale Darstellung, so ist $\exp(t\mathbf{d}\rho(E_\beta)) = \rho(\exp(tE_\beta))$.

Die Gruppe U wird erzeugt von den U_β , $\beta \in \Phi^+$, U^- wird erzeugt von den U_β , $\beta \in \Phi^-$, und G wird erzeugt von T und den U_β , $\beta \in \Phi$. Weiter gilt: U ist ein Normalteiler in B , $B = TU = UT$, $N_G(B)^0 = B$, $N_G(U)^0 = B$ und $U^-TU = U^-B \subset G$ ist eine Zariski-offene Teilmenge in G .

Bemerkung 4.5.1 Man kann sogar zeigen: $N_G(B) = B$, $N_G(U) = B$.

Beweis. Wir nehmen \mathbb{C} wieder $G \subset GL_n$, und die Wahl von T, B, U und Φ^+ ist wie in (4.12). Da der Funktor Gruppe \rightarrow Liealgebra durchschnittserhaltend ist, erhalten wir sofort den ersten Teil über die Wurzeluntergruppen. Es ist auch klar, daß $\text{Lie } \rho(U_\beta) = k\mathbf{d}\rho(E_\beta)$, also $\rho(U_\beta) = \{e^{t\mathbf{d}\rho(E_\beta)} \mid t \in k\}$.

Betrachte als nächstes die Untergruppe V von U erzeugt von den U_β mit $\beta \in \Phi^+$. Nach Lemma 4.5.2 ist V eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe von U , deren Liealgebra alle \mathfrak{g}_β , $\beta \in \Phi^+$, enthält. Folglich ist $\text{Lie } V = \text{Lie } U$ und somit $U = V$.

Ebenso zeigt man, daß U^- von den U_β mit $\beta \in \Phi^-$ erzeugt wird. Da T die Untergruppen U_β normalisiert:

$$\underline{t}e^{sE_\beta}\underline{t}^{-1} = e^{tsE_\beta\underline{t}^{-1}} = e^{(\beta(\underline{t})s)E_\beta},$$

normalisiert T auch U (und U^-). Die von T und U erzeugte Untergruppe ist $TU = UT \subset B$ ist abgeschlossen und zusammenhängend nach Lemma 4.5.2, die Liealgebra enthält \mathfrak{h} und \mathfrak{n}^+ , und somit $B = TU = UT$ aus Dimensionsgründen.

Aus Theorem 4.5.2 (insbesondere Teil *iv*) $N_{\mathfrak{g}}\text{Lie } B = \text{Lie } B$ und $N_{\mathfrak{g}}\mathfrak{n}^+ = \text{Lie } B$, also $N_G(B)^0 = B$ und $N_G(U)^0 = B$.

Betrachte als nächstes den Morphismus $\phi : U^- \times B \rightarrow G$, $(u, b) \mapsto ub^{-1}$. Da $U^- \cap B = \text{id}$, ist diese Abbildung injektiv. Da $\dim U^- \times B = \dim \mathfrak{n}^- + \dim \text{Lie } B = \dim \mathfrak{g} = \dim G$, enthält die konstruierbare Menge $U^-B = \text{Im } \phi$ eine offene dichte Teilmenge $Y \subset G$. Aber $U^-B = \bigcup_{u \in U^-, b \in B} uVb^{-1}$, und somit selbst offen und dicht. •

Sei H eine affine algebraische Gruppe und sei $(Z_i)_{i \in I}$ ein Familie von irreduziblen Varietäten mit Morphismen $\phi_i : Z_i \rightarrow G$, so daß $\text{id} \in \phi(Z_i)$ für alle $i \in I$. Sei $Y' \subset G$ die (abstrakte) von den $\phi_i(Z_i)$ erzeugte Untergruppe von H , und sei $Y \subset H$ der Schnitt über alle abgeschlossenen Untergruppen von H , die $\bigcup_{i \in I} \phi_i(Z_i)$ enthalten.

Lemma 4.5.2 *Dann ist $Y = Y'$ eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von H , und es gibt eine endliche Folge $\{i_1, \dots, i_N\}$ in I (mit möglichen Wiederholungen), so daß $Y = \phi_{i_1}(Z_{i_1})^{e_1} \cdots \phi_{i_N}(Z_{i_N})^{e_N}$, wobei $e_j = \pm 1$ und $\phi_{i_1}(Z_{i_1})^{-1} = \{\phi_i(z)^{-1} \mid z \in Z_i\}$.*

Beweis. ☉ kann man annehmen, daß die $\phi_i(Z_i)^{-1}$ bereits in der Familie liegen. Für eine beliebige endliche Folge $\underline{i} = \{i_1, \dots, i_N\}$ in I betrachte

$$p_{\underline{i}} : \prod Z_{i_j} \rightarrow H, \quad (z_{i_j}) \mapsto \phi_{i_1}(z_{i_1}) \cdots \phi_{i_N}(z_{i_N}).$$

Das Bild $\text{Im } p_{\underline{i}}$ ist eine konstruierbare Menge, der Abschluß eine irreduzible Varietät. Hat man zwei Folgen $\underline{i}, \underline{i}'$, so sieht man leicht: $\overline{\text{Im } p_{\underline{i}}} \cdot \overline{\text{Im } p_{\underline{i}'}} \subset \overline{\text{Im } p_{(\underline{i}, \underline{i}')}}$, wobei letzteres einfach die beiden Folgen hintereinandergesetzt bedeutet. Nun wird jede aufsteigende Folge von irreduziblen Varietäten in H stationär, sei also \underline{i} ein Folge, so daß $\overline{\text{Im } p_{\underline{i}}}$ ein maximales Element ist. Die

Maximalität impliziert, daß $\overline{\text{Im } p_i} \subset G$ stabil ist unter Multiplikation und der Bildung von Inversen, somit ist $\overline{\text{Im } p_i}$ eine abgeschlossene Untergruppe. Nach Konstruktion enthält $\overline{\text{Im } p_i}$ alle Y_i , also $Y = \overline{\text{Im } p_i}$.

Nun ist $\text{Im } p_i$ eine konstruierbare Menge in $\overline{\text{Im } p_i}$, das gleiche Argument wie im Beweis von Satz 3.0.4 zeigt: Aus $\text{Im } p_i \subset Y$ konstruierbar folgt $\text{Im } p_i \cdot \text{Im } p_i = Y$, und somit $Y = \text{Im } p_{(\underline{i}, \underline{i})}$. •

Wie vorher sei G linear reduktiv, zusammenhängend, mit fest gewähltem maximalen Torus T , Borel B und unipotentem U , so daß $B = TU$. Sei Φ das Wurzelsystem und entsprechend der Wahl von U sei Φ^+ die Menge der positiven Wurzeln.

Ist V eine endlichdimensionale rationale Darstellung, so ist $V^U \neq 0$, und, da U von T normalisiert wird, ist $V^U = \bigoplus_{\mu \in X(T)} V_\mu^U$. Die T -Eigenvektoren ($\neq 0$) in V^U (in V_μ^U) heißen *Höchstgewichtsvektoren* (zum Gewicht μ).

Wir führen eine partielle Ordnung auf $X(T)$ ein: $\lambda \succ \mu$ falls $\lambda - \mu$ eine positive Linearkombination von positiven Wurzeln ist.

Satz 4.5.3 *Sei $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine irreduzible endlichdimensionale rationale Darstellung. Dann ist $\dim V^U = 1$ und $V^U = V_\chi$ für ein $\chi \in X(T)$. Ist $V_\nu \neq 0$ für ein $\nu \in X(T)$, $\nu \neq \chi$, dann ist $\chi \succ \nu$. Das Gewicht χ wird das Höchste gewicht genannt und die Darstellung wird mit $V(\chi)$ bezeichnet.*

Weiter ist $V(\chi)$ durch χ eindeutig bestimmt, d.h., wenn V' eine endlichdimensionale rationale Darstellung ist v_χ ist ein Höchstgewichtsvektor zum Gewicht χ , dann ist $\langle Gv_\chi \rangle \subset V'$ ein irreduzibler Untermodul, isomorph zu $V(\chi)$. Ist insbesondere V' irreduzibel vom höchsten Gewicht χ , dann ist V' isomorph zu $V(\chi)$.

Beweis. Sei $v_\mu \in V$ ein Gewichtsvektor zum Gewicht μ , und sei $E_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$. Dann gilt für $\underline{t} \in T$:

$$\underline{t}(E_\beta v_\mu) = \text{Ad } \underline{t}(E_\beta) \underline{t}(v_\mu) = (\mu + \beta)(\underline{t})v_\mu,$$

also $E_\beta v_\mu \in V_{\mu+\beta}$. Damit folgt

$$U_\beta v_\mu \subset v_\mu + \sum_{i \geq 1} V_{\mu+i\beta}$$

Betrachte nun V^U , da U ein Normalteiler in B ist, ist V^U stabil unter T und zerfällt in die direkte Summe von Gewichtsräume: $V^U = \bigoplus (V^U)_\mu$. Bezüglich \succ sei χ ein minimales Element mit $(V^U)_\chi \neq 0$ und sei $v_\chi \in (V^U)_\chi$ ein Gewichtsvektor. Dann gilt:

$$V = \langle G.v_\chi \rangle = \langle \overline{U^- B.v_\chi} \rangle = \langle U^- B.v_\chi \rangle = \langle U^- .v_\chi \rangle \subset \langle v_\chi + \sum_{\chi \succ \nu} V_\nu \rangle$$

Wegen der Minimalität und des Koeffizienten von v_χ in dem obigen Ausdruck folgt: $V^U = V_\chi$, und $\dim V^U = \dim V_\chi = 1$.

Sei nun V' eine beliebige endlichdimensionale rationale Darstellung und sei $v_\chi \in V^U$ ein Höchstgewichtsvektor zum Gewicht μ . Bezeichne mit W den von v_χ erzeugten Untermodul $\langle Gv_\chi \rangle$. Dann folgt wie oben:

$$W = kv_\chi \oplus \bigoplus_{\chi \succ \mu} W_\mu.$$

Zerlegt man also W in die direkte Summe von einfachen Moduln, so gibt es genau einen einfachen Modul W' mit $kv_\chi \subset W'$. Dann ist aber $\langle Gv_\chi \rangle = W'$, also ist W ein einfacher Modul.

Seien nun W_1 und W_2 zwei einfache endlichdimensionale Darstellungen vom höchsten Gewicht χ , und seien $v_i \in W_i$ jeweils Höchstgewichtsvektoren. Betrachte $W = W_1 \oplus W_2$, dann ist $w = (v_1, v_2)$ wieder ein Höchstgewichtsvektor, und $W' = \langle Gw \rangle$ ist eine einfache endlichdimensionale rationale Darstellung, vom höchsten Gewicht χ . Die Projektionen $p_i : W' \rightarrow W_i$, $i = 1, 2$, sind G -äquivariante Homomorphismen, nicht trivial (da $p_i(w) = v_i \neq 0$), und die Moduln sind alle einfach. Folglich ist p_i , $i = 1, 2$, ein Isomorphismus, und damit sind W_1 und W_2 isomorph. •

Um die als Höchstgewichte in Frage kommenden $\chi \in X(T)$ genauer zu beschreiben, untersuchen wir wie G aus lauter SL_2 -Untergruppen zusammengeklebt ist. Zunächst einmal ein

Lemma 4.5.3 *Sei G eine zusammenhängende affine algebraische Gruppe. Dann ist die derivierte Gruppe (G, G) , d.h., die von den Elementen der Form $ghg^{-1}h^{-1}$ erzeugte (abstrakte) Untergruppe eine abgeschlossene zusammenhängende normale Untergruppe von G , und $\text{Lie}(G, G)$ enthält alle Elemente der Form $[X, Y]$ und $\text{Ad } g(X) - X$ mit $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $g \in G$.*

Ist G linear reaktiv, so ist $G = Z(G)^0 \cdot (G, G)$, wobei $Z(G)^0 \cap (G, G)$ eine endliche Gruppe ist und (G, G) ist halbeinfach mit $\text{Lie}(G, G) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Beweis. Für $y \in G$ sei $\phi_y : G \rightarrow G$, $g \mapsto ygy^{-1}g^{-1}$. Dies ist ein Morphismus von Varietäten, und Lemma 4.5.2 impliziert: Die von den $\phi_y(G)$ erzeugte Untergruppe ist abgeschlossen und zusammenhängend. Da diese Untergruppe gleich (G, G) ist, folgt zudem, daß es sich um einen Normalteiler handelt.

Das Bild von ϕ_y ist in (G, G) enthalten, und somit ergibt das Differential von ϕ_y eine Abbildung $\mathbf{d}\phi_y : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Lie}(G, G)$. Mit der Epsilontik berechnet man $\mathbf{d}\phi_y = \text{Ad } y - \text{id}$. Insbesondere enthält $\text{Lie}(G, G)$ alle Elemente der Form $\text{Ad } y(X) - X$ mit $X \in \mathfrak{g}$. Für $X \in \mathfrak{g}$ betrachte die Abbildung $\psi_X :$

$G \rightarrow \text{Lie}(G, G)$, $g \mapsto \text{Ad } g(X) - X$. Dann ist $\mathfrak{d}\psi_X = -\text{ad } X$, somit enthält $\text{Lie}(G, G)$ auch alle Kommutatoren $[X, Y]$ für $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Ist G linear reduktiv, so zerfällt \mathfrak{g} in die direkte Summe von einfachen Darstellungen. Fassen wir die trivialen Darstellungen in \mathfrak{g}^G zusammen, so sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s \oplus \mathfrak{g}^G$. Aus Theorem 4.1.3 folgt, $\mathfrak{g}^G = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ist das Zentrum von \mathfrak{g} . Jedes der \mathfrak{g}_i ist auch eine einfache Darstellung von \mathfrak{g} bezüglich ad , folglich ist jedes der \mathfrak{g}_i ein einfaches nicht kommutatives Ideal, insbesondere: $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$ und $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ für $i \neq j$. Somit ist $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_s$ eine halbeinfache Liealgebra. Da $\text{Lie } Z(G)^0 \subset \text{Lie } T$ (Theorem 4.5.2), ist $Z(G)^0$ ein Torus. Sei $G \subset GL(V)$, und sei $V = \bigoplus_{\nu \in X(Z(G)^0)} V_\nu$ eine Zerlegung von V bezüglich der Charaktere von $Z(G)^0$. Da G das Zentrum zentralisiert, folgt $G \subset \prod GL(V_\nu)$. Aus der Determinantenproduktformel leitet man sofort ab: $(GL(U), GL(U)) \subset SL(U)$, und daher liegt (G, G) bereits in $\prod SL(V_\nu)$. Andererseits besteht $Z(G)^0$ in jedem $GL(V_\nu)$ -Block aus Skalarmatrizen, und davon gibt es nur endlich viele mit Determinante 1. Es folgt: $(G, G) \cap Z(G)^0$ ist endlich, und damit auch $\text{Lie}(G, G) \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Wir haben bereits gezeigt: $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \text{Lie}(G, G)$ und $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Somit folgt: $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \text{Lie}(G, G)$ und (G, G) ist halbeinfach, da $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ halbeinfach ist.

•

Satz 4.5.4 *Sei G eine linear reductive zusammenhängende affine algebraische Gruppe mit maximalen Torus T und sei Φ die Menge der Wurzeln. Für $\beta \in \Phi$ sei $T_\beta = (\text{Ker } \beta)^0$ und sei $Z(\beta) = Z_G(T_\beta)^0$. Dann ist $Z(\beta)$ erzeugt von T und den $U_\beta, U_{-\beta}$, $\mathfrak{z}(\beta) = \text{Lie } Z(\beta)$ zerfällt in $\mathfrak{z}(\beta) = \mathfrak{g}_\beta \oplus \text{Lie } T \oplus \mathfrak{g}_{-\beta}$. Weiter gilt $Z(\beta) = (Z(\beta), Z(\beta)) \cdot T_\beta$, und $(Z(\beta), Z(\beta))$ ist isomorph zu SL_2 oder $PSL_2 (= \text{Ad}(SL_2))$.*

Beweis. Nach Theorem 4.1.3 ist $\text{Lie } Z_G(\text{Lie } T_\beta)^0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\text{Lie } T_\beta)$. Da $T_\beta \subset Z_G(\text{Lie } T_\beta)$, und die Liealgebra des Zentrums von $Z_G(\text{Lie } T_\beta)$ gleich dem Zentrum der Liealgebra von $Z_G(\text{Lie } T_\beta)$ ist, folgt T_β liegt im Zentrum von $Z_G(\text{Lie } T_\beta)$ und somit $Z_G(\text{Lie } T_\beta)^0 \subset Z(\beta)$. Andererseits liegt T_β im Zentrum von $Z(\beta)$ und somit kommutiert $\text{Lie } T_\beta$ mit $\text{Lie } Z(\beta)$, also $\text{Lie } Z(\beta) \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\text{Lie } T_\beta) = \text{Lie } Z_G(\text{Lie } T_\beta)$. Aus Dimensionsgründen folgt $Z_G(\text{Lie } T_\beta)^0 = Z(\beta)$. Dann ist aber nach Konstruktion klar: $\mathfrak{z}(\beta) = \text{Lie } T \oplus \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{-\beta}$, und $\mathfrak{z}(\beta) = [\mathfrak{z}(\beta), \mathfrak{z}(\beta)] \oplus \text{Lie } T_\beta$, wobei $\text{Lie } T_\beta$ das Zentrum der Liealgebra ist und $\mathfrak{z}(\beta)$ ist isomorph zu \mathfrak{sl}_2 .

Mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Satz 4.5.2 zeigt man: $Z(\beta)$ ist erzeugt von T, U_β und $U_{-\beta}$. Nehmen wir wieder $G \subset GL(V)$ an und zerlegen V in die direkte Summe von T_β -Darstellungen: $V = \bigoplus_{\nu \in X(T_\beta)} V_\nu$, so folgt wie oben: $Z(\beta) = (Z(\beta), Z(\beta)) \cdot T_\beta$, mit endlichem Durchschnitt,

und somit $\text{Lie}(Z(\beta), Z(\beta)) = [\mathfrak{z}(\beta), \mathfrak{z}(\beta)] \simeq \mathfrak{sl}_2$. Insbesondere ist $Z'(\beta) = (Z(\beta), Z(\beta))$ eine halbeinfache Gruppe, jede Darstellung ist vollständig zerlegbar in die direkte Summe von einfachen Darstellungen. Sei $S \subset Z'(\beta)$ ein maximaler Torus, dann ist $S = k^*$ und $X(S) \simeq \mathbb{Z}$. Sei $V = \bigoplus_{\chi \in X(S)} V(\chi)$.

Übung 1.3.4

•