Prof. Dr. P. Littelmann
Dipl.-Math. B. Niemann

Köln, 13. April 2010

Lie-Gruppen und algebraische Gruppen
Übung 1

Die Übung findet montags 08:15–09:45 in S2(!) statt.

Aufgabe 1: Zu beliebigen $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$ gibt es ein Polynom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $n-1$ mit $f(j) = a_j$ für $j = 1, 2, ..., n$.

Aufgabe 2: Die Morphismen $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ der Form $(x, y) \mapsto (x, y + f(x))$ mit einem Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ sind Isomorphismen.

Aufgabe 3: Hier wollen wir folgendes zeigen: Die Gruppe der polynomialen Automorphismen (d.h. Isomorphismen auf sich selbst) des $\mathbb{C}^2$ wirkt n-fach transitiv auf $\mathbb{C}^2$, und zwar für jedes $n > 0$. Wir verwenden dazu die beiden vorangehenden Aufgaben.

a) Sind $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$, so gibt es einen Automorphismus $\phi : \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2$ mit $\phi((j, 0)) = (a_j, j)$, $j = 1, 2, ..., n$.

b) Sind $p_j = (a_j, b_j) \in \mathbb{C}^2$ $(j = 1, ..., n)$ Punkte mit verschiedenen x-Koordinaten a_i, so gibt es einen Automorphismus $\phi : \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2$ mit $\phi(p_j) = (a_j, j)$, $j = 1, ..., n$.

c) Die Automorphismengruppe des $\mathbb{C}^2$ ist n-fach transitiv für jedes $n \geq 1$.

d) Ist $E \subset \mathbb{C}^2$ eine endliche Teilmenge, so gibt es eine Untergruppe H von $Aut(\mathbb{C}^2)$ mit Fixpunktmenge $(\mathbb{C}^2)^H = E$.

(Eine Gruppe G operiert auf einer Menge X n-fach transitiv, falls es für je n verschiedene Punkte $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ ein Element $g \in G$ gibt, so dass $g.x_i = y_i$ für $1 \leq i \leq n$.)

Aufgabe 4: Die Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ definiert einen bijektiven Morphismus auf $Y = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2 \mid v_1^3 - v_2^2 = 0\}$. Aber φ^{-1} ist kein Morphismus.