Prof. Dr. P. Littelmann
Dipl.-Math. B. Niemann

Köln, 20. April 2011

Lie-Gruppen und algebraische Gruppen
Übung 2

(Abgabe: Mittwoch, 27. April 2011 in der Vorlesung)

Es gibt eine Webseite zur Vorlesung:

`http://www.mi.uni-koeln.de/~bniemann/liegruppen`

Die Übung am kommenden Montag findet nicht statt. Sie wird verschoben auf Mittwoch, den 27. April. Der genaue Ort wird auf der Homepage bekannt gegeben.

Aufgabe 1:

a) Zeige: $\Lambda^j(g) : \Lambda^j k^n \to \Lambda^j k^n$ ist ein Isomorphismus.

b) Sei $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechne $\Lambda^2(g)(v \wedge w)$.

Aufgabe 2: Sei $g \in GL_n(k)$.

Zeige:

$$\Lambda(g)(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_j}) = \sum_{1 \leq \ell_1 < \ldots < \ell_j \leq n} \mathrm{Minor}^{i_1 < \ldots < i_j}_{\ell_1 < \ldots < \ell_j}(g) e_{\ell_1} \wedge \ldots \wedge e_{\ell_j},$$

wobei $\mathrm{Minor}^{i_1 < \ldots < i_j}_{\ell_1 < \ldots < \ell_j}(g)$ die Determinante der Untermatrix von g ist bestehend aus den Spalten $i_1 < \ldots < i_j$ und Zeilen $\ell_1 < \ldots < \ell_j$.

Aufgabe 3: Zeige: Jede Matrix $A \in M_n(k)$ mit $A^m = Id$ für ein $m \geq 1$ ist diagonalisierbar.

Aufgabe 4: In der Vorlesung vom 13.04. kam folgender Satz:

Satz: *Die Abbildung $\varphi \to \varphi^\#$, die jedem Morhpismus $\varphi : Y_1 \to Y_2$ den Ringhomomorphismus $\varphi^\# : k[Y_2] \to k[Y_1]$ zuordnet, ist eine Bijektion.*

a) Erkläre, welcher Schritt im Beweis aus der Vorlesung noch fehlt.

b) Führe den Beweis zu Ende.