Prof. Dr. P. Littelmann
Dipl.-Math. B. Niemann

Köln, 27. April 2011

Lie-Gruppen und algebraische Gruppen
Übung 3

(Abgabe: Mittwoch, 4. Mai 2011 in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei $G \subset GL(\mathbb{C}^n)$ eine endliche Untergruppe.

Zeige: G ist eine affine algebraische Gruppe.

Aufgabe 2: Sei $G \subset GL(\mathbb{C}^n)$ eine endliche Untergruppe.

Zeige: Es gibt eine hermitesche Form $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ auf dem $\mathbb{C}^n$ mit der Eigenschaft:

$$\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n, \forall g \in G.$$

Aufgabe 3: Sei $G \subset GL(\mathbb{C}^n)$ eine Untergruppe.

Eine Unterraum $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt G-stabil falls $g(U) \subset U$ für alle $g \in G$. Ein G-stabiler Unterraum heißt irreduzibel bezüglich G, falls aus $U' \subset U$ G-stabil folgt $U' = 0$ oder $U' = U$. Man nennt einen Unterraum V vollständig reduzibel bezüglich G, falls es irreduzible G-stabile Unterräume $U_1, \ldots, U_s$ gibt mit $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$.

Zeige: Ein Unterraum $V \subset \mathbb{C}^n$ ist vollständig reduzibel bezüglich $G \Leftrightarrow$ zu jedem G-stabilen Unterraum $U \subset V$ gibt es einen G-stabilen Unterraum $W \subset V$, so dass $V = U \oplus W$.

Aufgabe 4: Sei $G \subset GL(\mathbb{C}^n)$ eine endliche Untergruppe.

Zeige: Ein Unterraum $V \subset \mathbb{C}^n$ ist vollständig reduzibel.
(Hinweis: Benutze die Aufgaben 2 und 3.)