Prof. Dr. P. Littelmann
Dipl.-Math. B. Niemann

Köln, 4. Mai 2011

Lie-Gruppen und algebraische Gruppen
Übung 4

Zariski-Topologie
(Abgabe: Mittwoch, 11. Mai 2011 in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Für ein Ideal $\mathcal{I} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ sei $V(\mathcal{I}) = \{v \in k^n \mid f(v) = 0\}$ die Nullstellenmenge. Seien $\mathcal{I}_j$, $j \in J$ Ideale in $k[x_1, \dots, x_n]$.

a) Zeige: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei Ideale mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. dann gilt $V(\mathcal{A}) \supseteq V(\mathcal{B})$

b) Zeige:
$$\bigcap_{j\in J} V(\mathcal{I}_j) = V(\sum_{j\in J} \mathcal{I}_j).$$

c) Zeige: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei Ideale dann gilt
$$V(\mathcal{A}) \cup V(\mathcal{B}) = V(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = V(\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}).$$

Aufgabe 2: Wir sagen eine Teilmenge $X \subset k^n$ ist abgeschlossen, wenn gilt $X = V(\mathcal{A})$ für ein Ideal in $k[x_1, \dots, x_n]$. Zeige: Ein beliebiger Durchschnitt von abgeschlossenen Teilmengen ist abgeschlossen, eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen Teilmengen ist wieder abgeschlossen.

Wir sagen eine Teilmenge $U \subset k^n$ ist offen, wenn gilt U ist das Komplement einer abgeschlossenen Menge. Zeige: Eine beliebige Vereinigung von offenen Teilmengen ist offen, ein endlicher Durchschnitt von offenen Teilmengen ist wieder offenen.

Unter eine *Topologie* auf einer Menge M versteht man eine Kollektion Σ von Teilmengen von M, genannt offene Mengen, die die Eigenschaft hat: Die beliebige Vereinigung von offenen Mengen ist offen, der endliche Schnitt von offenen Mengen ist offen, und sowohl die leere Menge als auch ganz M sind offen. Zeigen Sie: Die oben definierten offenen Teilmengen bilden eine Topologie auf dem k^n.

Diese Topologie wird *Zariski-Topologie* genannt.

Aufgabe 3: Sei $X \subset k^n$ eine affine Varietät. Wir definieren als die Zariski Topologie auf X die induzierte Topologie, d.h. die offenen respektive abgeschlossenen Teilmengen von X sind die Teilmengen, die man als Schnitt von X mit einer offenen (respektive abgeschlossenen) Teilmenge erhält.

a) Sei $\pi : k[x_1, \dots, x_n] \to k[X]$. Zeige: Ist $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal, dann ist $\pi(I)$ ein Ideal, und wenn $J \subset k[X]$ ein Ideal ist, dann ist $\pi^{-1}(J)$ ein Ideal.

b) Für $x \in X$ sei $\mathfrak{M}_x \subset k[X]$ das maximale Ideal. Sei $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal. Zeige:
$$V(I) \cap X = \{x \in X \mid \mathfrak{M}_x \supseteq \pi(I)\}$$

c) Folgere: Die Zariski-Topologie auf X is unabhängig von der Einbettung.