Prof. Dr. P. Littelmann
Dipl.-Math. B. Niemann

Köln, 11. Mai 2011

Lie-Gruppen und algebraische Gruppen
Übung 5

(Abgabe: Mittwoch, 18. Mai 2011 in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei Z eine affine algebraische Varietät und sei $M \subseteq Z$ eine Teilmenge. Bezeichne mit $I_M = \{f \in k[Z] \mid f|_M \equiv 0\}$ und sei $\overline{M} = V(I_M)$.

a) Zeige: $\overline{M}$ ist die kleinste Zariski abgeschlossene Teilmenge von Z, die M enthält.

b) Zeige:

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{M \subseteq X \subseteq Z \\ X abgeschlossen}} X$$

Aufgabe 2: Sei G eine (abstrakte) Gruppe, sei $\rho : G \to GL(V)$ eine irreduzible Darstellung. $\Psi \in GL(V)$ habe die Eigenschaft:

$$\Psi(\rho(g)(v)) = \rho(g)(\Psi(v)).$$

Zeige: $\Psi = \lambda Id$ für ein $\lambda \in k$.
(Beachte: k ist algebraisch abgeschlossen, also hat Ψ einen nicht-trivialen Eigenraum!)

Aufgabe 3: Sei G eine (abstrakte) Gruppe, sei $\rho : G \to GL(V)$. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

a) V ist vollständig reduzibel.

b) V wird aufgespannt von den irreduziblen Untermoduln.

c) Zu jeder Unterdarstellung $U \subseteq V$ gibt es eine Unterdarstellung $U' \subseteq V$ mit $V = U \oplus U'$.

Aufgabe 4: Seien G, H (abstrakte) Gruppen und sei

$$\rho : G \times H \to GL(U)$$

eine irreduzible Darstellung, so dass U als G-Darstellung und auch als H-Darstellung vollständig reduzibel ist.

a) Betrachte U nur als eine G-Darstellung. Zeige: Es gibt für G eine irreduzible Unterdarstellung $V \subseteq U$. Bezeichne mit $\rho_V : G \to GL(V)$ die zugehörige Abbildung. Zeige: Alle irreduziblen G-Unterdarstellungen von U sind isomorph zu V, insbesondere $U = \underbrace{V \oplus \ldots \oplus V}_{r}$ als G-Darstellung.

(Beachte: Elemente aus G und H vertauschen!).

b) Sei $Hom_G(V, U) := \{\phi \in Hom(V, U) \mid \forall v \in V, \forall g \in G : \phi(\rho_V(g)v) = \rho(g)(\phi(v))\}$ der Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach U, die die Aktion der Gruppe G respektieren, d.h. erst $\rho_V(g)$ auf v anwenden und dann ϕ ist das gleiche wie erst ϕ anwenden und dann $\rho(g)$. Zeige: $\dim Hom_G(V, U) = r$.