Prof. Dr. P. Littelmann
Dipl.-Math. B. Niemann

Köln, 18. Mai 2011

Lie-Gruppen und algebraische Gruppen
Übung 6

(Abgabe: Mittwoch, 25. Mai 2011 in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Seien $\rho_1 : GL_n(\mathbb{C}) \to GL(V)$ und $\rho_2 : GL_n(\mathbb{C}) \to GL(W)$ Darstellungen. Eine GL_n-lineare Abbildung $\Phi : V \to W$ ist ein Vektorraumhomomorphismus für den gilt

$$\Phi(\rho_1(g)(v)) = \rho_2(g)(\Phi(v)) \quad \forall g \in GL_n,\ \forall v \in V.$$

Zeige:

a) $\operatorname{Ker} \Phi \subseteq V$ ist eine Unterdarstellung.

b) $\operatorname{Im} \Phi \subseteq W$ ist eine Unterdarstellung.

c) Wenn ρ_1, ρ_2 irreduzibel sind, dann ist entweder Φ ein Isomorphismus oder Φ ist die Nullabbildung, d.h. $\operatorname{Ker} \Phi = V$ und $\operatorname{Im} \Phi = 0$.

Aufgabe 2: Zeige: Sei $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$. Dann gilt für die Diagonalmatrix $\underline{t} \in T_n$:

$$\underline{t} U_\alpha(z) \underline{t}^{-1} = U_\alpha(t_i t_j^{-1} z) = U_\alpha(\alpha(\underline{t}) z).$$

Aufgabe 3: Sei $(Z, k[Z])$ eine affine Varietät, sei $X \subseteq Z$ eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge und sei $I(X) \subset k[Z]$ das Verschwindungsideal. Zeige: $(X, k[Z]/I(X))$ ist eine affine Varietät.

Aufgabe 4: Seien G, H linear reduktive affine algebraische Gruppen und sei $k = \mathbb{C}$. Ansonsten benutzen wir die Notationen wie auf Blatt 5, Aufgabe 4, insbesondere sei $\rho : G \times H \to GL(U)$ und $V \subseteq U$ ist eine irreduzible Unterdarstellung für G.

a) Zeige: Die Abbildung $\psi : H \to GL(\operatorname{Hom}_G(V, U))$, $\psi(h)(\phi) := \rho(1, h) \circ \phi$ definiert eine Darstellung.

b) Zeige: Die Abbildung

$$\eta : V \otimes \operatorname{Hom}_G(V, U) \to U, \quad v \otimes \phi \mapsto \phi(v)$$

ist ein Isomorphismus von $G \times H$ Darstellungen.

c) Folgere: Jede irreduzible $G \times H$-Darstellung ist von der Form $V \otimes W$, wobei $\rho_1 : G \to GL(V)$ und $\rho_2 : H \to GL(W)$ irreduzible Darstellungen sind.