Prof. Dr. P. Littelmann
Dipl.-Math. B. Niemann

Köln, 25. Mai 2011

Lie-Gruppen und algebraische Gruppen
Übung 7

(Abgabe: Mittwoch, 1. Juni 2011 in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & z_{1,2} & z_{1,3} & z_{1,4} \\ 0 & 1 & z_{2,3} & z_{2,4} \\ 0 & 0 & 1 & z_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{C}).$$

Zeige

$$A = U_{\epsilon_3-\epsilon_4}(z_{3,4})U_{\epsilon_2-\epsilon_4}(z_{2,4})U_{\epsilon_1-\epsilon_4}(z_{1,4})U_{\epsilon_2-\epsilon_3}(z_{2,3})U_{\epsilon_1-\epsilon_3}(z_{1,3})U_{\epsilon_1-\epsilon_2}(z_{1,2}).$$

Aufgabe 2: Sei $\sigma_0 \in S_n$ das Element mit $\sigma_0(1) = n$, $\sigma_0(2) = n-1$, $\ldots$, $\sigma_0(n) = 1$.

a) Zeige: Ist $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$, $1 \leq i < j \leq n$ eine positive Wurzel, so ist $\sigma_0(\alpha)$ eine negative Wurzel (das heißt $-\sigma_0(\alpha)$ ist eine positive Wurzel). Welche ist es?
b) Sei $\lambda \in X^+$, $\lambda = a_1\epsilon_1 + \ldots + a_n\epsilon_n$.
Zeige: $\lambda^* = -\sigma_0(\lambda)$, wobei $\lambda^* = -a_n\epsilon_1 - \ldots - a_1\epsilon_n$.
c) Sei $V(\lambda)$ die zugehörige irreduzible Darstellung mit B-stabiler Gerade $\mathbb{C}v_\lambda$ und Gewichtsraumzerlegung $V(\lambda) = \oplus_{\mu\in X} V(\lambda)_\mu$. Sei $\lambda^t = \sigma_0(\lambda)$.
Zeige: $V(\lambda)_\mu \neq 0 \Rightarrow \mu \succeq \lambda^t$.

Aufgabe 3: Sei $(X, \mathbb{C}[X])$ eine affine Varietät. Für $f \in \mathbb{C}[X]$ sei

$$X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

a) Analog zu der Art und Weise wie man $\mathbb{Q}$ als Paare von Elementen aus $\mathbb{Z}$ mit Kürzungsrelation definiert, definieren wir

$$\mathbb{C}[X]_f = \{h/f^m \mid h \in \mathbb{C}[X], m \geq 0\}/„\sim“$$

wobei $h/f^m \sim h'/f^k$ wenn $hf^k = h'f^m$ und wir definieren als Addition und Multiplikation

$$(h/f^m) + (h'/f^k) = (hf^k + h'f^m)/f^{m+k}, \quad (h/f^m)\cdot(h'/f^k) = hh'/f^{m+k}.$$

Zeige: Die Definition der Addition und Multiplikation ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.
b) Zeige: $\mathbb{C}[X]_f$ ist eine endlich erzeugte reduzierte Algebra (also der Koordinatenring einer affinen Varietät).
c) Sei $X \subseteq \mathbb{C}^m$ eingebettet mit Verschwindungsideal $I(X)$, und sei

$$\widehat{X_f} = \{(y,z) \in \mathbb{C}^m \oplus \mathbb{C} \mid h(y) = 0 \forall h \in I(X); f(y)z - 1 = 0\}$$

Zeige: Die Abbildung $(y,z) \mapsto y$ definiert eine Bijektion $\widehat{X_f} \to X_f$
d) Zeige: $\mathbb{C}[\widehat{X_f}] \simeq \mathbb{C}[X]_f$, und durch die Bijektion oben wird damit $(X_f, \mathbb{C}[X]_f)$ zu einer affinen Varietät.