Prof. Dr. P. Littelmann
Dipl.-Math. B. Niemann

Köln, 1. Juni 2011

Lie-Gruppen und algebraische Gruppen
Übung 8

(Abgabe: Mittwoch, 8. Juni 2011 in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Zeige: Sind $f, h \in \mathbb{C}[GL_n]$ $B \times B$-stabile Geraden zum Gewicht (λ^*, λ) und (μ^*, μ), dann ist das Produkt $f \cdot h$ auch wieder eine $B \times B$-stabile Gerade, aber zum Gewicht $(\lambda^* + \mu^*, \lambda + \mu)$.

Aufgabe 2:

a) Zeige: Jede diagonalisierbare Matrix $D \in GL_n(\mathbb{C})$ ist von der Form $D = \exp d$ mit $d \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisierbar.

b) Zeige: Jede unipotente (d.h. alle Eigenwerte $= 1$) Matrix $U \in GL_n(\mathbb{C})$ ist von der Form $U = \exp n$ mit $n \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotent.

c) Ist jede Matrix $g \in GL_n(\mathbb{C})$ von der Form $g = \exp h$, $h \in M_n(\mathbb{C})$?

Aufgabe 3: Sei $X \in M_n(\mathbb{C})$ und sei λ ein Eigenwert von X.

Zeige: $|\lambda| \leq \|X\|$.

Aufgabe 4: Sei $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$.

a) Zeige, dass $(x_1, y_1, u_1) \cdot (x_2, y_2, u_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, e^{ix_1 y_2} u_1 u_2)$ eine assoziative Verknüpfung definiert.

b) Zeige, dass G mit dieser Verknüpfung eine Gruppe ist.

c) Zeige, dass $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ eine C^∞-Abbildung ist.

d) Zeige, dass $G \times G \to G$, $\big((x_1, y_1, u_1), (x_2, y_2, u_2)\big) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2, e^{ix_1 y_2} u_1 u_2)$, eine C^∞-Abbildung ist.