Prof. Dr. P. Littelmann
Dipl.-Math. B. Niemann

Köln, 8. Juni 2011

Lie-Gruppen und algebraische Gruppen
Übung 9

(Abgabe: Mittwoch, 22. Juni 2011 in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei $O_n(\mathbb{R}) = \{g \in M_n(\mathbb{R}) \mid g^t g = \mathbb{1}\}$ die reelle orthogonale Gruppe. Zeige:

$$\mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Lie} O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}.$$

Aufgabe 2: Sei H die Heisenberg-Gruppe

$$H = \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid g = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Zeige: Die Lie-Algebra von H ist

$$\mathfrak{h} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 3: Sei $O_n(\mathbb{R})$ die reelle orthogonale Gruppe und sei $SO_n(\mathbb{R})$ die *spezielle reelle orthogonale Gruppe*, d.h. $SO_n(\mathbb{R}) = \{g \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det g = 1\}$. Bezeichne mit $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

a) Sei $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Zeige: Ist $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v, v \rangle = 1$, dann gibt es einen Weg $\phi : [0,1] \to SO_n(\mathbb{R})$ mit $\phi(0) = \mathbb{1}$, $\phi(1)(v) = e_1$. („Man dreht v stetig auf e_1.")

b) Zeige: Ist $g \in SO_n$ beliebig, dann gibt es einen Weg $\varphi : [0,1] \to SO_n(\mathbb{R})$ mit $\varphi(1) = g$ und

$$\varphi(0) \in \{g \in SO_n(\mathbb{R}) \mid g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}, h \in SO_{n-1}(\mathbb{R})\}.$$

c) Zeige per Induktion über n: $SO_n(\mathbb{R})$ ist wegzusammenhängend.

d) Zeige: $O_n(\mathbb{R})$ ist nicht wegzusammenhängend und hat genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Aufgabe 4: Sei $U_n = \{g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \overline{g}^t g = \mathbb{1}\}$ die unitäre Gruppe mit Lie-Algebra die schief-hermiteschen Matrizen $\mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \overline{A}^t = -A\}$.

a) Zeige: Die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) \to U_n(\mathbb{C})$ ist surjektiv.

b) Folgere: $U_n(\mathbb{C})$ ist wegzusammenhängend.