Prof. Dr. P. Littelmann
Dipl.-Math. B. Niemann

Köln, 22. Juni 2011

Lie-Gruppen und algebraische Gruppen
Übung 10

(Abgabe: Mittwoch, 29. Juni 2011 in der Vorlesung)

Aufgabe 1: Sei $\phi : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{C})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{iat} \end{pmatrix}$, wobei a eine beliebige (aber fest zu wählende) irrationale Zahl ist.

Zeige:

$$\overline{\phi(\mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{is} \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 2: Zeige: Eine Matrix-Lie-Gruppe hat höchstens abzählbar viele Wegzusammenhangskomponenten. Gib ein Beispiel einer Lie-Gruppe mit abzählbar vielen Wegzusammenhangskomponenten.

Aufgabe 3: Seien $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ mit $[X, [X, Y]] = 0$ und $[Y, [Y, X]] = 0$ (oder, anders gesagt, $ad_X^2(Y) = 0$, $ad_Y^2(X) = 0$).

Beweise die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel mit Hilfe der Reihenentwicklungen von exp und log. (In diesem Fall erhält man als Formel: $\log(e^X e^Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]$)

Aufgabe 4: Zeige:

a) Die Lie-Algebren $\operatorname{Lie} SL_2(\mathbb{C})$ und $\operatorname{Lie} SO_3(\mathbb{C})$ sind isomorph.

b) Die Lie-Gruppen $SL_2(\mathbb{C})$ und $SO_3(\mathbb{C})$ sind nicht isomorph.