H. Schmidli
C. Heuser

Stochastische Finanzmathematik

Sommer 2016

Übung 1

1. Das Dividenden-Preis-Paar $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{q})$ heisst **schwach arbitragefrei**, falls $\boldsymbol{\theta D} \geq 0$ impliziert, dass $\boldsymbol{\theta q} \geq 0$. Zeige, $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{q})$ ist genau dann schwach arbitragefrei, falls es einen schwachen State-Price-Vektor gibt $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}_+^S$. Das ist ein Vektor $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}_+^S$, so dass $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{D\psi}$.

2. Nehmen wir an, dass $(\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^m)$ Pareto-optimal ist. Zeige, dass jede Äquilibrium-Konsumverteilung Pareto-optimal ist.

3. Ein Markt ist gegeben durch

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 35 \\ 40 \\ 12 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 24 & 20 & 48 \\ 44 & 44 & 36 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

a) Gibt es Arbitrage? Falls nicht, finden Sie alle State-Price-Vektoren.

b) Ist der Markt vollständig? Falls ja, finden Sie ein Portfolio, das die Werte $(32, 32, 36)$ in den drei Zuständen reproduziert.

c) Wir fügen zum Markt eine Call-Option auf den Aktiv 1 mit Ausübungspreis 25 dazu. Bestimmen Sie alle Preise der Option, falls es keine Arbitrage geben soll.

d) Wir fügen einen Aktiv zum Markt, der den Wert $(32, 32, 36)$ in den drei Zuständen hat. Welches sind die möglichen Preise, falls keine Arbitrage existieren soll?

4. Ein Markt ist gegeben durch

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 120 & 100 & 80 \\ 80 & 100 & 120 \\ 100 & 100 & 100 \end{pmatrix}.$$

Ein Händler hat das Einkommen $\boldsymbol{e} = (40, 50, 60)$ und die Nutzenfunktion

$$U(\boldsymbol{c}) = \log c_1 + \log c_2 + \log c_3 .$$

a) Zeige, dass es keine Arbitrage gibt.

b) Finde alle optimalen Portfolios.