Übung 10

1. (9+9+9) Sei der Markt gegeben durch

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad S_0^0 = 1, \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 = x$$

mit Konstanten r, μ, σ.

a) Bestimmen Sie den Preis des Finanzproduktes, welches den Betrag D auszahlt, wenn das Aktiv im Zeitraum $[0,T]$ die Barriere K erreicht bzw. überschreitet, und andernfalls nichts ausschüttet.

b) Bestimmen Sie den Preis des Finanzproduktes, welches den Betrag $(S_T)^k$ zum Zeitpunkt T auszahlt, wobei $k \in \mathbb{N}$.

c) Bestimmen Sie den Preis des Finanzproduktes, welches den Betrag $(S_T - K)^2$ zum Zeitpunkt T auszahlt.

2. (9) Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf einem Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ und $\{\mathcal{F}_t\}$ eine Filtration. Sei $\mathbb{P}^*$ ein Wahrscheinlichkeitsmass, das absolutstetig bezüglich $\mathbb{P}$ ist. Wir bezeichnen mit $L_T = \mathrm{d}\mathbb{P}^*/\mathrm{d}\mathbb{P}$ die Radon-Nikodym Ableitung, und $L_t = \mathbb{E}[L_T \mid \mathcal{F}_t]$ die Radon-Nikodym Ableitung auf $\mathcal{F}_t$. Sei $\{M_t\}$ ein adaptierter Prozess. Zeigen Sie: $\{M_t\}$ ist genau dann ein Martingal unter $\mathbb{P}^*$ falls $\{M_t L_t\}$ ein Martingal unter $\mathbb{P}$ ist.