Übung 11

1. (3+3+3) Sei $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \le t)$, wobei W_t eine Brownsche Bewegung ist. Sei X_t und Y_t $\mathcal{F}_t$–messbar für alle $t \in [S,T]$ und $\mathbb{E}[\int_S^T Z_t^2 dt] < \infty$ für $\{Z_t\} \in \{\{X_t\}, \{Y_t\}\}$, wobei $S, T \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition und Hilfsatz 4.2, dass für alle $t \in (S,T)$

a)

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^t X_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^t X_s^2 ds\right],$$

b)

$$\int_S^T X_s dB_s = \int_S^t X_s dB_s + \int_t^T X_s dB_s \quad f.s.,$$

c)

$$\int_S^T (cX_s + Y_s) dB_s = c\int_S^T X_s dB_s + \int_S^T Y_s dB_s, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. (2+2+2+3) Sei W_t eine Brownsche Bewegung. Untersuchen Sie ob

a) $X_t = t^2 W_t - 2\int_0^t sW_s ds$

b) $X_t = W_t^3 - 3tW_t$

c) $X_t = \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$

d) $X_t = \exp(\frac{1}{2}t)\sin(W_t)$

Martingale sind.

3. (5+4)Sei W_t^* die Brownsche Bewegung unter $\mathbb{P}^*$ und ein Aktiv S_t erfülle folgende Gleichung

$$dS_t = (2t + \sigma(\frac{1}{2} - W_t^*))dt - \sigma(W_t^*)^2 dW_t^*,$$

wobei $\sigma \neq 0$ und $S_0 = 1$ ist. Ein Händler bietet nun folgendes Finanzprodukt an: Der Käufer erhält den Wert $D > 0$, wenn S_t zum Zeitpunkt T größer als ein Wert $K > 0$ ist.

a) Berechnen Sie den fairen Preis für $K > T + 1$ und $\sigma > 0$. Welchen fairen Preis erhält man für $K = T + 1$?

b) Angenommen der faire Preis ist c. Welchen Wert muss K haben?

4. (9) Berechnen Sie in einem Black-Scholes-Model den fairen Wert zum Zeitpunkt $t \in (0, T)$ eines europäischen 'Butterflies', welcher durch eine Auszahlung von

$$(S_T - L)^+ + (S_T - A)^+ - 2(S_T - K)^+$$

mit $A, L, K \in \mathbb{R}_+$ zum Zeitpunkt T definiert ist.