H. Schmidli
C. Heuser Stochastische Finanzmathematik Sommer 2016

Übung 2

1. Ein Markt sei durch die Matrix $\mathbf{D}$ gegeben. Sei $U^i(\mathbf{c}) = \mathbb{E}[u(c)]$ für alle Händler i, wobei c die Zufallsvariable mit Wert c_j im Zustand j bezeichnet, und die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand j der richtige Zustand der Welt ist, mit p_j bezeichnet wird, wobei $0 < p_j < 1$ und $\sum p_j = 1$ gilt. Hier ist $\mathbb{P}$ das physikalische Mass (das Mass in der realen Welt) und nicht das risikoneutrale Mass. Die Funktion $u(c)$ ist gegeben durch $u(c) = c^\gamma/\gamma$, mit $\gamma < 1$ und $\gamma \neq 0$. Wir betrachten die Nutzenfunktion des representativen Händlers

$$U_\lambda(\mathbf{x}) = \sup_{\substack{\mathbf{c}^1+\cdots+\mathbf{c}^m \le x \\ \mathbf{c}^i \in \mathbb{R}_+^S}} \sum_{i=1}^m \lambda^i U^i(\mathbf{c}^i) \; . \tag{1}$$

1. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ die Formel $U_\lambda(\mathbf{c}) = \mathbb{E}[kc^\gamma/\gamma]$ gilt, wobei $k > 0$ eine Konstante ist, die von λ abhängt. Das Problem (1) wird durch $\mathbf{c}^i = k^i\mathbf{x}$ gelöst, wobei $k^i \ge 0$. Wir haben $k^i = 0$ genau dann, wenn $\lambda^i = 0$.
2. Nehmen wir an, dass $\mathbf{e}^i$ sich als Linearkombintation der Zeilen von $\mathbf{D}$ schreiben lässt. Zeigen Sie, dass es Preise $\mathbf{q}$ und eine Äquilibriumkonsumverteilung gibt, die Pareto-optimal ist.

2. Cox-Ross-Rubinstein-Modell Der risikolose Aktiv ist $S_n^0 = (1+r)^n$, und es gibt einen riskanten Aktiv, mit möglichen Preisänderungen

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a) \; , \\ S_n(1+b) \; . \end{cases}$$

Die Konstanten a, b erfüllen $-1 < a < b$. Der Startpreis S_0 ist bekannt. Sei $T_n = S_n/S_{n-1}$ die relative Preiänderung.

a) Zeige, dass der diskontierte Preisprozess $\{\tilde{S}_n\}$ genau dann ein Martingal unter $\mathbb{P}$ ist, wenn $\mathbb{E}[T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = 1 + r$.

b) In welchem Intervall muss r liegen, so dass der Markt arbitragefrei ist?

c) Finde Arbitragestrategien, falls der Markt nicht arbitragefrei ist.

Wir nehmen nun an, dass $r \in (a, b)$ und wir definieren

$$p = \frac{b-r}{b-a} \; .$$

d) Zeige, dass $\{\tilde{S}_n\}$ genau dann ein Martingal ist, falls $\{T_n\}$ iid sind, und $\mathbb{P}[T_n = 1 + a] = p = 1 - \mathbb{P}[T_n = 1 + b]$.

3. Call-Put-Parität Sei ein Markt definiert wie in der Vorlesung. Wir nehmen an, dass dass der risikolose Aktiv $\{S_t^0\}$ deterministisch ist, das heisst, S_t^0 ist $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$-messbar für alle t. Weiter gebe es im Markt eine Call-Option $(S_T^1 - K)^+$ und eine Put-Option $(K - S_T^1)^+$ auf den ersten Aktiv. Ein Händler hat eine Call-Option verkauft, und will nun diese hedgen. Zeige, dass es eine konstantes Portfolio, bestehend aus dem ersten Aktiv, dem risikolosen Aktiv und der Put-Option gibt, das die Call-Option hedged. Diese Strategie hat den Vorteil, dass der Händler den Markt nicht überwachen muss, um sein Portfolio anzupassen. Finde mit Hilfe dieses Portfolios eine Formel, um den Preis der Call-Option durch die Preise der Put-Option, des risikolosen Aktivs und des ersten Aktivs zu berechnen.

4. Sei T eine Stoppzeit und $\{\mathcal{F}_t\}$ eine Filtration. Zeige, dass

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \le t\} \in \mathcal{F}_t \;\forall t \in \mathbb{R}_+\}$$

eine σ-Algebra ist.