Übung 3

1. (4+4+4+4) **Cox-Ross-Rubinstein-Modell**

Der risikolose Aktiv ist $S_n^0 = (1+r)^n$, und es gibt einen riskanten Aktiv, mit möglichen Preisänderungen

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n(1+a) \ , \\ S_n(1+b) \ . \end{cases}$$

Die Konstanten a, b erfüllen $-1 < a < b$. Der Startpreis S_0 ist bekannt. Sei $T_n = S_n / S_{n-1}$ die relative Preisänderung.

1. Zeige, dass der Preis der Call-Option $(S_N - K)^+$ ist von der Form $c(n, S_n)$, wobei c eine Funktion von K, a, b, r und p ist. Finde diese Funktion.
2. Zeige, dass die Replikationsstrategie ϕ für die Call-Option von der Form $H(n, S_{n-1})$ ist, wobei H eine Funktion von c ist. Finde die Strategie.
3. Sei nun T ein Zeitpunkt und $N \in \mathbb{N}$. Wir setzen $r = RT/N$ und definieren a und b so, dass

$$\sqrt{N} \log \frac{1+a}{1+r} = -\sigma \ , \qquad \sqrt{N} \log \frac{1+b}{1+r} = \sigma \ .$$

Wenn wir nun N nach unendlich konvergieren lassen, dann konvergiert der Prozess $\{S_{\lfloor tN/T \rfloor}\}$ zum sogenannten *Black-Scholes-Modell*. Die Variable r ist so gewählt, dass

$$\lim_{N \to \infty} (1+r)^N = \lim_{N \to \infty} (1 + RT/N)^N = e^{RT} \ .$$

Die Variable σ^2 wird so der Grenzwert der Varianz von $\log S_N$.

Seien $\{X_i^N : 1 \le i \le N\}$ iid Zufallsvariablen, die nur die zwei Werte in der Menge $\{-\sigma/\sqrt{N}, \sigma/\sqrt{N}\}$ annehmen, mit Mittelwert μ_N, so dass $\lim_{N\to\infty} N\mu_N = \mu \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Folge

$$Y_N = X_1^N + \cdots + X_N^N \ ,$$

in Verteilung gegen eine Normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 konvergiert.

4. Berechne den Grenzwert des Preises der Call-Option.

   Hinweis: Berechne zuerst den Put-Preis, da die Auszahlung des Puts beschränkt ist.

2. (4+4)

1. Sei $f(x, y)$ eine relle Funktion, die konvex im ersten Argument ist, und fallend im zweiten Argument. Sei $\{X_t\}$ ein Martingal und $\{Y_t\}$ ein fallender Prozess. Zeige, dass für zwei beschränkte Stoppzeiten τ_1 und τ_2, mit der Eigenschaft dass $\tau_1 \leq \tau_2$,

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau_1}, Y_{\tau_1})] \leq \mathbb{E}[f(X_{\tau_2}, Y_{\tau_2})]$$

   gilt.

2. Sei $\{\mathbf{S}_t\}$ der Preisprozess in einem vollständigen und arbitragefreien Markt. Wir nehmen an, dass der risikolose Aktiv $\{S_t^0\}$ wachsend ist. Zeige, dass es optimal ist, die Amerikanische Call-Option $Z_t = (S_t^1 - K)^+$ im letzt möglichen Zeitpunkt N auszuüben.

3. (8) Sei $\{X_t\}$ ein Lévy-Prozess, das heisst ein Prozess mit unabhängigen und stationären Zuwächsen und $X_0 = 0$. Es soll $\lim_{t \downarrow 0} \mathbb{E}[X_t^2] = 0$ gelten. Zeigen Sie, dass Konstanten c und c' existieren, so dass $\mathbb{E}[X_t] = ct$ und $\text{Var}[X_t] = c't$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\mathbb{E}[X_{tn}] = n\mathbb{E}[X_t]$ für $n \in \mathbb{N}$. Verwenden Sie, dass $\text{Var}[X_t]$ wachsend in t ist.