Übung 4

1. Wir wollen in dieser Übung das stochastische Integral $\int_0^t f(s)\, \mathrm{d}W_s$ für eine stetige (deterministische) Funktion $t \mapsto f(t)$ berechnen.

a) (1P) Verifiziere, dass $f(s)$ auf $[0, t]$ beschränkt ist.

b) (2P) Finde die Verteilung von

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(it/n)(W_{(i+1)t/n} - W_{it/n}) \; .$$

c) (3P) Finde die Verteilung von $\int_0^t f(s)\, \mathrm{d}W_s$.

d) (3P) Zeige, dass $\{\int_0^t f(s)\, \mathrm{d}W_s\}$ $\mathcal{F}_t$-adaptiert ist.

e) (3P) Zeige, dass $\{\int_0^t f(s)\, \mathrm{d}W_s\}$ ein Gauss-Prozess ist mit Mittelwert 0 und unabhängigen Zuwächsen. Finde die Kovarianzen.

f) (3P) Verifiziere direkt, dass $\{\int_0^t f(s)\, \mathrm{d}W_s\}$ ein Martingal ist.

2. Sei $X_t = \mu t + \sigma W_t$ eine Brownsche Bewegung mit Drift, wobei $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Sei $T_a^b = \inf\{t : X_t \notin [a, b]\}$, wobei $a < 0 < b$.

a) (3P) Finden Sie alle (lokalen) Martingale der Form $\{f(X_t)\}$, wobei $f(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist.

b) (3P) Zeigen Sie, dass $f(X_t)$ ein quadratisch integrierbares Martingal ist und dass

$$\Big\{f^2(X_t) - \sigma^2 \int_0^t (f'(X_s))^2\, \mathrm{d}s\Big\}$$

ein Martingal ist.

c) (3P) Schliessen Sie, dass T_a^b fast sicher endlich ist.

d) (3P) Finden Sie $\mathbb{P}[X_{T_a^b} = b]$.

Nehmen wir nun an, dass $\mu \leq 0$. Wir setzen für $b > 0$ $T^b = \inf\{t : X_t > b\}$.

e) (3P) Finden Sie $\mathbb{P}[T^b < \infty]$.

Wir wollen nun die Laplace-Transformierte $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\alpha T^b}; T^b < \infty]$ bestimmen. Sei $\alpha > 0$.

f) (3P) Bestimmen Sie alle Martingale der Form $\{f(X_t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\}$, wobei $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist.

g) (3P) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\alpha T^b}; T^b < \infty]$.