H. Schmidli
C. Heuser Stochastische Finanzmathematik Sommer 2016

Übung 5

1. (4+4+4+4) Zeigen Sie mit Hilfe der Itô-Formel:

a) $X_t = \sin(W_t)$ genügt für alle $t < T(\omega) = \inf\{s > 0 : W_s \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$ der stochastischen DGL

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1 - X_t^2} dW_t.$$

b) $X_t := \arctan(W_t)$ genügt für alle t≥ 0 der stochastischen DGL

$$dX_t = -\sin(X_t)\cos^3(X_t)dt + \cos^2(X_t)dW_t.$$

Lösen Sie folgende stochastische DGL:

c) $dX_t = tX_t dt + e^{t^2/2}dW_t$ mit $X_0 = 1$,

d) $dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dW_t$ mit $X_0 = 0$.

2. (4+4+4+4+4) Sei $\mu, \sigma, x_0 > 0$ und $\gamma > \mu$. Wir betrachten den Diffusionsprozess

$$X_t = x + \sigma W_t + \mu t - \int_0^t \gamma \mathbb{1}_{X_s > x_0} \, \mathrm{d}s \; .$$

Die obige stochastische Integralgleichung hat eine eindeutige Lösung, was Sie hier nicht zeigen müssen. Wir können $\{X_t\}$ als den Wert einer Firma und das Integral $\int_0^t \gamma \mathbb{1}_{X_s > x_0} \, \mathrm{d}s$ als die akkumulierten Dividendenzahlungen interpretieren. Wir wollen den diskontierten Wert der Dividenden

$$V(x) = \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau \gamma \mathbb{1}_{X_s > x_0} \mathrm{e}^{-\delta s} \, \mathrm{d}s\Big]$$

berechnen, wobei $\delta > 0$ und $\tau = \inf\{t : X_t < 0\}$. Insbesondere haben wir $V(0) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\left\{V(X_{t\wedge\tau})\mathrm{e}^{-\delta(t\wedge\tau)} + \int_0^{t\wedge\tau} \gamma \mathbb{1}_{X_s>x_0}\mathrm{e}^{-\delta s}\,\mathrm{d}s\right\}$$

ein Martingal ist.

b) Nehmen wir an, $V(x)$ sei zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass $V(x)$ die Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - \delta V(x) + \gamma(1 - V'(x))\mathbb{1}_{x>x_0} = 0 \tag{1}$$

mit den Randbedingungen $V(0) = 0$ und $V'(x_0) = 1$ erfüllt.

c) Finden Sie die Lösung $f(x)$ von (1) mit $f(0) = 0$ und $f'(x_0) = 1$.

d) Sei $f(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung von (1) mit $f(0) = 0$ und $f'(x_0) = 1$ und nehmen wir an, dass $f(x)$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass $f(x) = V(x)$.

e) Zeigen Sie, dass es höchstens einen Wert x_0 gibt, so dass $V(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist.