Übung 6

1. (6+6+6+6) Seien $\mu(t)$, $r(t) \geq 0$ und $\sigma(t)$ deterministische und beschränkte Funktionen, wobei $\inf\{\sigma(t) : 0 \leq t \leq T\} > 0$. Wir betrachten einen Markt mit einem risikolosen Aktiv S^0, gegeben durch

$$\mathrm{d}S_t^0 = r(t)S_t^0 \,\mathrm{d}t \;, \qquad S_0^0 = 1 \;,$$

und einem riskanten Aktiv S, gegeben durch

$$\mathrm{d}S_t = \sigma(t)S_t \,\mathrm{d}W_t + \mu(t)S_t \,\mathrm{d}t \;,$$

wobei W eine standard Brownsche Bewegung ist. Wir setzen $\tilde{S}_t = S_t/S_t^0$. Man kann dann selbstfinanzierende Strategien, zulässige Strategien und Arbitrage analog zum Black-Scholes Modell definieren.

1. Zeigen Sie, dass
$$S_t = S_0 \exp\Bigl\{\int_0^t \sigma(s)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t (\mu(s) - \sigma^2(s)/2)\,\mathrm{d}s\Bigr\} \;.$$
2. Zeigen Sie, dass es ein äquivalentes Martingalmaß gibt, das heißt ein Maß, unter dem $\tilde{S}_t$ ein Martingal ist.

   Hinweis: Sie können folgendes Resulat verwenden. Sei $\{\theta_t\}$ ein stochastischer Prozess, so dass
$$L_t = \exp\Bigl\{\int_0^t \theta_s \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \,\mathrm{d}s\Bigr\}$$
   ein Martingal ist. Definiert man das äquivalente Maß $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}[L_T; A]$, dann ist der Prozess $W_t^* = W_t - \int_0^t \theta_s \,\mathrm{d}s$ eine standard Brownsche Bewegung unter dem Maß $\mathbb{P}^*$.
3. Sei $f(h)$ eine Zufallsvariable, so dass $\mathbb{E}^*[h^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass es eine selbstfinanzierende Hedging-Strategie $\{(\theta^0, \theta_t)\}$ gibt, die h reproduziert. Schließen Sie, dass der Wert dieser Strategie
$$V_t(\boldsymbol{\theta}) = \exp\Bigl\{-\int_t^T r(s)\,\mathrm{d}s\Bigr\}\mathbb{E}^*[h \mid \mathcal{F}_t]$$
   ist.

4. Betrachten wir nun die Europäische Option $h = f(S_T)$. Bestimmen Sie den Wert der Option.

2. (6+6) Betrachten wir die Amerikanische Put-Option im Black-Scholes Modell, also $h_t = (K - S_t)^+$. Sei $\mathcal{T}$ die Menge der Stoppzeiten mit Werten in $[0, T]$. Wir bezeichnen mit

$$f(T, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^*[\mathrm{e}^{-r\tau}\{K - x\mathrm{e}^{\sigma W_\tau^* + (r - \sigma^2/2)\tau}\}^+] \ ,$$

so dass der Preis der Option im Zeitpunkt 0 $f(T, S_0)$ beträgt. Beachten Sie, dass T hier die Restlaufzeit bezeichnet, und nicht wie in der Vorlesung, die gegenwärtige Zeit.

1. Zeigen Sie,
   a) $T \mapsto f(T, x)$ ist steigend in T.
   b) $x \mapsto f(T, x)$ ist fallend und konvex.
   c) $x \mapsto x + f(T, x)$ ist steigend und konvex.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $f(T, y) - f(T, x) \le x - y$ für $0 \le y < x$. Bemerken Sie, dass $(K - y)^+ - (K - x)^+ \le x - y$.
2. Zeigen Sie, dass es eine fallende Funktion $T \mapsto c(T) \in (0, K)$ gibt, so dass $f(T, x) = K - x$ für $x \le c(T)$ und $f(T, x) > (K - x)^+$ für $x > c(T)$.