H. Schmidli Stochastische Finanzmathematik Sommer 2016
C. Heuser

Übung 7

1. Sei X gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}X_t = (a - bX_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}W_t\,, \qquad X_0 = x\,.$$

1. Wieso können wir Satz 4.17 nicht anwenden, um Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen?

Man kann aber trotzdem zeigen, dass es eine eindeutige Lösung der Gleichung gibt. Die Lösung hat weiter die Eigenschaft, dass $X_t \geq 0$ für alle t. Weiter ist $\mathbb{E}[X_t^3]$ beschränkt.

b) Schliessen Sie, dass $\{\int_0^t X_t^{1/2}\,\mathrm{d}W_t\}$ und $\{\int_0^t X_t^{3/2}\,\mathrm{d}W_t\}$ Martingale sind.

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_t]$ und $\mathbb{E}[X_t^2]$.

2. Sei X_t die Lösung der folgenden stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t &= (\mu X_t + \mu')\,\mathrm{d}t + (\sigma X_t + \sigma')\,\mathrm{d}W_t \\ X_0 &= 0. \end{cases}$$

Sei $S_t = \exp\{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\}$.

1. Leiten Sie die stochastische Differentialgleichung für S_t^{-1} her.
2. Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{d}(X_t S_t^{-1}) = S_t^{-1}((\mu' - \sigma\sigma')\,\mathrm{d}t + \sigma'\,\mathrm{d}W_t).$$
3. Leiten Sie die explizite Darstellung von X_t her.