Übung 8

1. (6+6+6) Sei $\{M_t\}$ ein stetiger Prozess mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{P}[M_t > 0] = 1$ für alle $t \in [0, T]$.

a) Finden Sie ein Beispiel, für das $\mathbb{P}[\forall t \in [0, T], M_t > 0] = 0$.

Sei nun $\{M_t\}$ ein Martingal. Definieren Sie die Stoppzeit $\tau = \inf\{t : M_t = 0\} \wedge T$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[M_T 1_{\{\tau = T\}}] = \mathbb{E}[M_T]$.

c) Schliessen Sie, dass $\mathbb{P}[\forall t \in [0, T], M_t > 0] = 1$.

2. (12) Beweisen Sie die nachfolgende Gleichung aus dem Beweis von Proposition 5.11 für μ, $b > 0$ und $\alpha > -\mu^2/2$ mit Hilfe des Girsanov-Theorems:

$$\mathbb{E}^*[e^{-\alpha T_b}; T_b < \infty] = \exp\{\mu b - b\sqrt{\mu^2 + 2\alpha}\},$$

wobei $T_b = \inf\{t > 0 \; : \; W_t^* + \mu t < b\}$.

3. (6) Sei $\nu > 0$, $c > 1$ und W_t eine Brownsche Bewegung. Sei weiterhin

$$R_c = \inf\left\{t > 0 \; : \; \exp\left(\nu W_t - \frac{1}{2}\nu^2 t\right) = c\right\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Girsanov-Theorems, dass $P(R_c < \infty) = c^{-1}$.