H. Schmidli
C. Heuser Stochastische Finanzmathematik Sommer 2016

Übung 9

1. Sei $\{S_t\}$ ein Black-Scholes-Modell und $S_t^0 = \mathrm{e}^{rt}$ der risikolose Aktiv. Sei $M_t = \sup\{S_s : 0 \le s \le t\}$ das laufende Maximum. Die Option mit Auszahlung $(M_T - K)^+$ heisst "look back Option". Berechnen Sie den Preis der Option zur Zeit 0 und zur Zeit t. Sie brauchen dabei die Integrale nicht explizit zu berechnen.
Hinweis: Die Verteilung des Maximums einer Brownschen Bewegung mit Drift $\{\sigma W_t + \mu t\}$ ist

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{0\le t\le T} \sigma W_t + \mu t \le x\Big] = \Phi\Big(\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\Big) - \mathrm{e}^{2x\mu/\sigma^2}\Phi\Big(\frac{-x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\Big) ,$$

wobei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

2. Sei $\{r(t)\}$ ein Cox-Ingersoll-Ross Modell

$$\mathrm{d}r(t) = (a^* - b^* r(t))\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{r(t)}\mathrm{d}W_t^* .$$

Betrachten wir das Mass

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_1}{\mathrm{d}\mathbb{P}^*} = \frac{\exp\{-\int_0^T r(v)\mathrm{d}v\}}{P(0,T)} .$$

1. Berechnen Sie die momentenerzeugende Funktion $\mathbb{E}_1[\mathrm{e}^{\beta r(\zeta)}]$ der Variable $r(\zeta)$ unter dem Mass $\mathbb{P}_1$, wobei $0 < \zeta \le T$.

Man kann daraus schliessen (Sie brauchen dies nicht zu tun), dass

$$\frac{2r(\zeta)[\gamma^*(\mathrm{e}^{\gamma^*\zeta}+1) + (\sigma^2\psi_{0,1}^*(T-\zeta) + b^*)(\mathrm{e}^{\gamma^*\zeta}-1)]}{\sigma^2(\mathrm{e}^{\gamma^*\zeta}-1)} =: r(\zeta)L_1 .$$

eine nicht-zentrale χ^2 Verteilung mit $4a/\sigma^2$ Freiheitsgraden und Parameter

$$\xi_1 = \frac{8r(0)\gamma^{*2}\mathrm{e}^{\gamma^*\zeta}}{\sigma^2(\mathrm{e}^{\gamma^*\zeta}-1)(\gamma^*(\mathrm{e}^{\gamma^*\zeta}+1) + (\sigma^2\psi_{0,1}(T-\zeta)+b^*)(\mathrm{e}^{\gamma^*\zeta}-1))} ,$$

wobei $\gamma^2 = \sqrt{b^{*2} + 2\sigma^2}$.

b) Sei

$$r^* = -\frac{a^*\phi_{0,1}(T-\zeta) + \log K}{\psi_{0,1}(T-\zeta)} \ .$$

Betrachten wir die Call-Option $(P(\zeta,T)-K)^+$. Zeigen Sie, dass die Option nur ausgeübt wird, falls $r(\zeta) < r^*$.

c) Zeigen Sie, dass der Preis C_0 der Call-Option gegeben ist durch

$$C_0 = P(0,T)F_{4a^2/\sigma^2,\xi_1}(r^*L_1) - KP(0,\zeta)F_{4a^2/\sigma^2,\xi_2}(r^*L_2) \ ,$$

wobei $F_(\delta,\xi)(x)$ die Verteilungsfunktion der nicht-zentralen χ^2 Verteilung bezeichnet. Bestimmen Sie insbesondere L_2 und ξ_2.