1 Einige Grundlagen

1.1 Bezeichnungen und Notationen

Um Größenverhältnisse von Zahlen darzustellen, verwendet man die folgenden Zeichen:

1. Das Symbol "$\geq$" bedeutet "größer als oder gleich groß wie".
2. Das Symbol "$>$" bedeutet "echt größer als".
3. Das Symbol "$\leq$" bedeutet "kleiner als oder gleichgroß wie".
4. Das Symbol "$<$" bedeutet "echt kleiner als".

Das heißt $a < b$ schreibt man, wenn die Zahl a echt kleiner als die Zahl b ist, wobei $a \geq b$ geschrieben wird, wenn die Zahl a größer oder genauso groß sein kann wie die Zahl b.

Die Menge aller Zahlen, die echt größer als die Zahl a sind, aber die gleichzeitig auch echt kleiner als eine Zahl b sind, wird mit

$$(a, b) \text{ oder mit } \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

angegeben. Hierbei ist $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ wie folgt zu lesen. Es ist die Menge aller reellen Zahlen x, für die gilt, dass sie echt größer a und echt kleiner b sind. Des Weiteren hat man

1. die Menge aller reellen Zahlen x, die echt größer als die Zahl a, aber kleiner oder gleich der Zahl b sind, d.h.

   $$(a, b] \text{ oder mit } \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

2. die Menge aller reellen Zahlen x, die größer oder genauso groß sind wie die Zahl a, aber echt kleiner sind als die Zahl b, d.h.

   $$[a, b) \text{ oder mit } \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

3. die Menge aller reellen Zahlen x, die größer als oder genauso groß wie die Zahl a sind, die aber gleichzeitig kleiner als oder gleich der Zahl b sind, d.h.

   $$[a, b] \text{ oder mit } \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Man bezeichnet diese Mengen auch als Intervalle, wobei (a, b) das offene Intervall zwischen a und b bezeichnet; $[a, b)$ das rechts halboffene und $(a, b]$ das links halboffene Intervall zwischen a und b beschreibt; und $[a, b]$ als das abgeschlossene Intervall von a bis b bezeichnet wird. Die Zahl

$$m = \frac{a+b}{2} \text{ ist die "Intervall-Mitte" und } d = b - a \text{ ist die "Intervall-Länge",}$$

sofern $b \geq a$ gilt.

Den Betrag einer Zahl a stellt man mit dem Symbol $|a|$ dar. Hierbei gilt, dass der Betrag von a immer nichtnegativ ist und wie folgt definiert wird:

$$|a| = a, \text{ falls } a \geq 0 \text{ und } |a| = -a, \text{ falls } a \leq 0.$$

Also ist der Betrag der Zahl -4 gleich 4. Kürzer schreibt man eine solche Definition auch wie folgt:

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a \leq 0. \end{cases}$$

1.2 Weitere Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen

Es seien a, b und c drei beliebige reelle Zahlen. Dann gelten:

1. Das Assoziativgesetz: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ sowie $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. Das Kommutativgesetz: $a + b = b + a$ sowie $a \cdot b = b \cdot a$
3. Das Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

1.3 Potenzen und Regeln für das Rechnen mit Potenzen

Wir bezeichnen nun im Nachfolgenden mit a und b zwei beliebige reelle Zahlen und mit n und m zwei beliebige natürliche Zahlen. Wir führen für $a \neq 0$ folgende Notationen ein:

$$\begin{aligned} a^n &:= \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \\ a^{-n} &:= \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n\text{-mal}} \\ a^{1/n} &:= \sqrt[n]{a}. \end{aligned}$$

Somit sehen wir, dass

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \text{ ist.}$$

In dem Spezialfall $m = n = 2$ gilt die Gleichung

$$a^{2/2} = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Außerdem setzt man für alle reellen Zahlen a

$$a^0 := 1. \text{ Insbesondere ist somit } 0^0 := 1.$$

Aus den oben angegebenen Notationen folgen nun für $a \neq 0$ und $b \neq 0$ leicht die aus der Schule bekannten Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m}, \ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \\ a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n, \ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m}. \end{aligned}$$

Anmerkung 1 *Tatsächlich gelten diese Regeln nicht nur für alle $n, m \in \mathbb{N}$, sondern sie gelten, wenn $a > 0$ ist, auch für $n, m \in \mathbb{R}$. Dass dies wirklich so ist, werden wir in einem späteren Kapitel noch genauer sehen.*

1.4 Binomische Formeln

Es seien a und b zwei beliebige reelle Zahlen, dann gelten die nachfolgenden Formeln:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ (a-b)^2 &= (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ (a+b) \cdot (a-b) &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$