Dirk Horstmann

Lösungen zu den Übungsaufgaben aus dem Buch "Mathematik für Biologen"

(1. Auflage)

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

1. Auflage
März 2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einstieg und grafische Darstellungen von Messdaten

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1.1 (Nominale Merkmale)
Neben den bereits bekannten Merkmalen, die mithilfe einer metrischen Skala angegeben werden, gibt es auch Merkmale, die sich nicht mithilfe eines Zahlenwertes angeben lassen. Zu diesen Merkmalen gehören die Nominalmerkmale *z. B. Geschlecht, Beruf, Haarfarbe, Studienrichtung. Um hier gegebenenfalls eine Analyse der verschiedenen Ausprägungen der betrachteten Objekte vornehmen zu können, werden diese als Punkte auf einer Skala angeordnet. Auf diese Weise erhält man eine sogenannte* nominale Skala*. Diese Skalen erlauben lediglich das Abzählen der Objekte einer bestimmte Merkmalsausprägung. Der Ausprägung, die die größte Häufigkeit besitzt, kommt hierbei eine besondere Rolle zu. Man nennt sie* Modalwert *oder den* Modus *der zugrunde liegenden Messreihe.*

Bei der Frage nach der natürlichen Haarfarbe von 10.000 untersuchten Personen erhielt man die nachfolgenden Häufigkeiten der unterschiedlichen Haarfarben. 5423 Personen besaßen die Haarfarbe „braun”, 325 die Haarfarbe „rot”, 2540 die Haarfarbe „schwarz“ und 1712 Personen hatten die Haarfarbe „blond”.

Geben Sie den Modalwert des Ergebnisses dieser Untersuchung an.

Lösung 1.1
Da die Haarfarbe „braun“ mit 5423-mal am häufigsten vorkam, ist der Modalwert der Untersuchung der „Wert“: „braun“.

Übungsaufgabe 1.2 (Ordinale Merkmale)
Merkmale, die neben einer nominellen Unterscheidung auch noch eine (nach irgendeinem Kriterium vorzunehmende) Ordnung zulassen, bezeichnet man als ordinale Merkmale. Die jeweiligen Ausprägungen eines derartigen Merkmals bilden eine ordinale Skala.

Dieser Skalentyp liefert uns mehr Informationen, als wir von einer rein nominalen Skala ablesen können.

Die Attraktivität der Vorlesung „Mathematik für Studierende der Biologie“ wurde von 125 Studierenden subjektiv mit sieben vorgegebenen Rangwerten, nämlich -3 *(„ich kenne nichts Schlimmeres”),* -2 *(„gefällt mir gar nicht”),* -1 *(„gefällt mir nicht”),* 0 *(„habe keine Meinung dazu”),* $+1$ *(„gefällt mir”),* $+2$ *(„gefällt mir sehr gut”),* $+3$ *(„es gibt nichts Schöneres”) beurteilt. Dabei wählten fünf Studierende die Beurteilung „ich kenne nichts Schlimmeres”, 20 die Beurteilung „gefällt mir gar nicht“ und 40 die Beurteilung „gefällt mir nicht“ aus. 20 Studierende hatten keine Meinung, während 30 das Urteil „gefällt mir gut“ und zehn die Beurteilung „gefällt mir sehr gut” wählten. Die Beurteilung „ich kenne nichts Schöneres” wurde von keinem Studierenden ausgewählt.*

Was kann man somit über die Attraktivität der Vorlesung aussagen? Diskutieren Sie, welcher Mittelwertsbegriff in einem solchen Fall sinnvoller ist. Das arithmetische Mittel oder der Median?

Lösung 1.2

Der Median der Messreihe ist durch $x_{0.5} = -1$ gegeben. Das arithmetische Mittel der Messreihe hingegen hat den Wert $x_M = -0.36$. Der Median berücksichtigt stark die Häufigkeiten der einzelnen Merkmalsausprägungen. Einzelne (möglicher Weise) extreme „Ausreißer“ spielen somit keine so große Rolle. Dies ist beim arithmetischen Mittel anders. Hier gehen alle Werte gleich gewichtet ein und können somit das Endergebnis deutlich beeinflussen. Des Weiteren ist bei ordinalen Merkmalen ein „Verrechnen der Merkmalsausprägungen“ nicht möglich. Zwei Hörer, die von der Vorlesung begeistert sind, können nicht einen anderen Hörer, der die Vorlesung entsetzlich findet, aufwiegen. Daher ist das arithmetische Mittel bei besonders großen einzelnen Abweichungen und bei ordinalen Merkmalen nicht als Mittelwert geeignet. Die Attraktivität der Vorlesung wird in diesem konkreten Beispiel somit mit -1 bewertet.

Übungsaufgabe 1.3

Bei einer Befragung von 92 weiblichen und 53 männlichen Studierenden des Studienfachs Biologie wurden nachfolgende Angaben bzgl. des Alters der Studierenden gemacht:

Alter in Jahren	*Anzahl Studentinnen*
18	*1*
19	*34*
20	*22*
21	*17*
22	*8*
23	*2*
24	*2*
25	*3*
26	*1*
28	*1*
31	*1*

Alter in Jahren	*Anzahl Studenten*
19	*1*
20	*15*
21	*14*
22	*13*
23	*3*
24	*1*
25	*1*
26	*2*
29	*1*
30	*1*
41	*1*

1. *Stellen Sie die Daten grafisch dar. Erstellen Sie hierfür*

  a) *ein Säulendiagramm für das Alter der weiblichen Studierenden bzgl. der absoluten Häufigkeit,*

  b) *ein Flächendiagramm für das Alter der männlichen Studierenden bzgl. der relativen Häufigkeit,*

  c) *einen Boxplot, der Auskunft über das Alter aller Befragten gibt.*

2. *Was ist das durchschnittliche Alter der weiblichen und was das Durchschnittsalter der männlichen Befragten?*

Lösung 1.3

1. Die Daten lassen sich wie folgt grafisch darstellen:

  a) Das Säulendiagramm für das Alter der weiblichen Studierenden bzgl. der absoluten Häufigkeit hat die nachfolgende Gestalt:

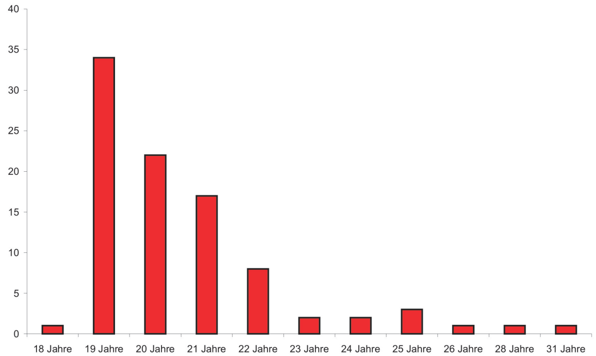

Abb. 1.1: Säulendiagramm für das Alter der weiblichen Studierenden bzgl. der absoluten Häufigkeit.

b) Die relativen Häufigkeiten des jeweiligen Alters der männlichen Studenten sind in der nachfolgenden Tabelle festgehalten:

Alter in Jahren	Anzahl Studenten in %
19	0.019
20	0.283
21	0.264
22	0.245
23	0.057
24	0.019
25	0.019
26	0.038
29	0.019
30	0.019
41	0.019

Das entsprechend Flächendiagramm ist im Nachfolgenden angegeben:

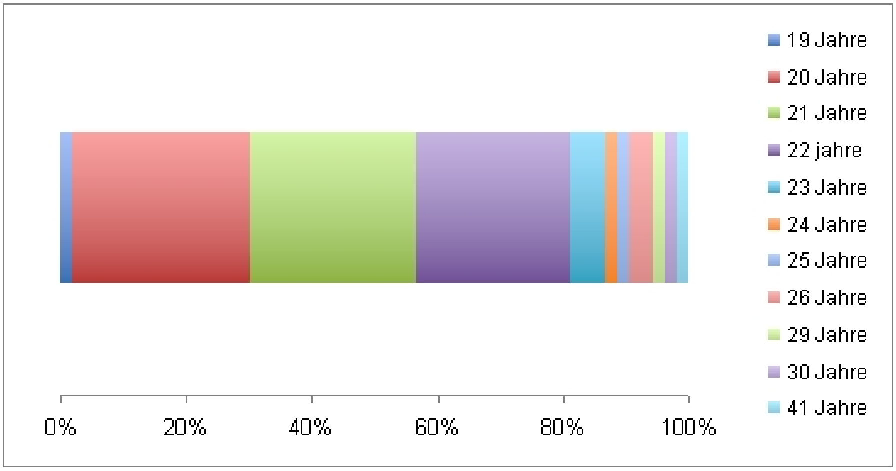

Abb. 1.2: Flächendiagramm für das Alter der männlichen Studierenden bzgl. der relativen Häufigkeiten.

c) Für den Boxplot, der Auskunft über das Alter aller Befragten gibt, berechnen wir zunächst die benötigten Größen:

$$x_{\text{min}} = 18,\ x_{\text{max}} = 41,\ x_{0.25} = 20,\ x_{0.5} = 20,\ x_{0.75} = 22,\ x_M = 21.1.$$

Der gesuchte Boxplot ist dann der Nachfolgende:

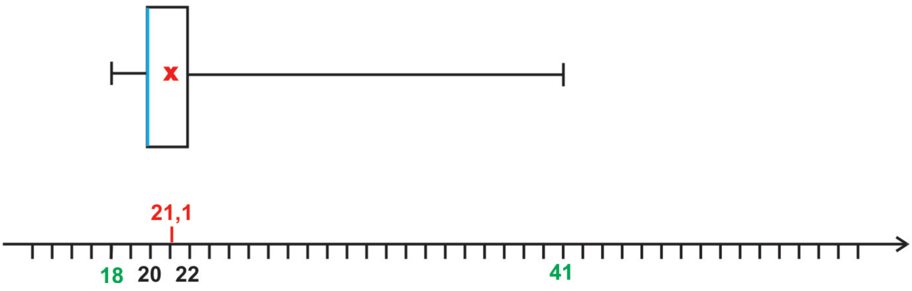

Abb. 1.3: Boxplot für das Alter aller Befragten.

2. Das durchschnittliche Alter x_M^w der weiblichen Befragten ist durch

$$\begin{aligned} x_M^w &= \frac{18\cdot 1 + 19\cdot 34 + 20\cdot 22 + 21\cdot 17 + 22\cdot 8 + 23\cdot 2 + 2\cdot 2 + 25\cdot 3 + 26 + 28 + 31}{92} \\ &= 20.55 \\ &\approx 20.6 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

und das Durchschnittsalter x_M^m der männlichen Befragten ist durch

$$\begin{aligned} x_M^m &= \frac{19\cdot 1 + 20\cdot 15 + 21\cdot 14 + 22\cdot 13 + 23\cdot 3 + 24 + 25 + 26\cdot 2 + 29 + 30 + 41}{53} \\ &= 22.06 \\ &\approx 22.1 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

gegeben.

Übungsaufgabe 1.4

*Erwachsene Ridley's Streifenkletternattern (*Elaphe taeniura ridley*) werden (den Angaben in der Literatur entsprechend) bis zu 250 cm lang. Bei 15 erwachsenen Schlangen wurden nun die folgenden Längen (in cm) beobachtet:*

$$223,\ 234,\ 217,\ 228,\ 220,\ 235,\ 209,\ 217,\ 207,\ 233,\ 254,\ 260,\ 225,\ 224,\ 231.$$

1. *Was ergibt sich für diese Messreihe als durchschnittliche Länge einer Ridley's Streifenkletternatter?*

2. *Stellen Sie die Messreihe mittels eines Boxplots dar.*

Lösung 1.4

1. Aufgrund der vorliegenden Messreihe erhalten wir $x_M = 227.8$ cm als durchschnittliche Länge einer Ridley's Streifenkletternatter.

2. Zur Erstellung des Boxplots berechnen wir nun:

$$x_{\text{min}} = 207,\ x_{\text{max}} = 260,\ x_{0.25} = 217,\ x_{0.5} = 225,\ x_{0.75} = 234.$$

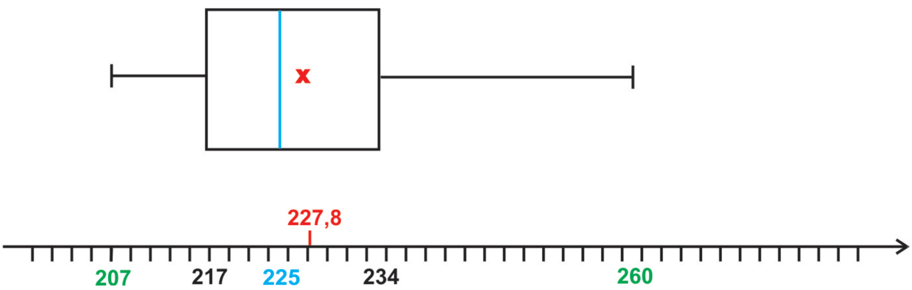

Abb. 1.4: Boxplot der vorliegenden Messreihe.

Übungsaufgabe 1.5 (Das geometrische Mittel)
Zur Bestimmung eines Mittelwerts bei relativen Änderungen eines Merkmals wird in der Regel das geometrische Mittel x_G verwendet. Das geometrische Mittel ist die N-te Wurzel des Produkts aus allen vorliegenden N Messdaten, d. h.:

$$x_G = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{N-1} \cdot x_N}.$$

Auch hier gibt es für das Produkt unter der Wurzel eine andere in der Mathematik übliche Notation. Man schreibt:

$$x_G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}.$$

Im Allgemeinen gilt, dass das arithmetische Mittel nicht gleich dem geometrischen Mittel ein und derselben Messdaten ist, d. h.

$$x_M \neq x_G.$$

Eine Universität verzeichnet in drei aufeinanderfolgenden Jahren Zuwachsraten der Studierendenzahl von 2 %, 4 % und 7 %. Im vierten Jahr nimmt die Anzahl um 1 % und im fünften Jahr um 2 % ab, danach bleibt sie konstant. Bestimmen Sie die mittlere Zuwachsrate. Um wie viel Prozent ist die Studierendenzahl durchschnittlich gestiegen?

Lösung 1.5
Wir berechnen entsprechend der Formeln die Größen x_G und x_M, wobei wir zunächst die Messwerte angeben:

$$x_1 = 1.02,\ x_2 = 1.04,\ x_3 = 1.07,\ x_4 = 0.99,\ x_5 = 0.98.$$

Somit ergibt sich für das geometrische Mittel der Wert:

$$x_G = \sqrt[5]{1.02 \cdot 1.04 \cdot 1.07 \cdot 0.99 \cdot 0.98} = 1.019472961.$$

Dies entspricht einer Zuwachsrate von ca. 1.94%. Für das arithmetische Mittel berechnen wir:

$$x_M = \frac{1}{5}(1.02 + 1.04 + 1.07 + 0.99 + 0.98) = 1.02.$$

Wir erhalten hier eine Zuwachsrate von 2%.

Übungsaufgabe 1.6

Das Weihnachtsgeld von sieben Mitarbeitern einer Abteilung wurde nach der von ihnen erbrachten Leistung gezahlt. Alle Mitarbeiter haben ein monatliches Einkommen von 2000 Euro. Das Weihnachtsgeld betrug bei zwei Mitarbeitern 57 %, bei einem 32 %, bei dreien 60 % und bei dem letzten 20 % des mtl. Einkommens. Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert und den Median des Weihnachtsgeldes.

Lösung 1.6

Zunächst berechnen wir auch hier die einzelnen „Messwerte“:

$x_1 = 1.140$, $x_2 = 1.140$, $x_3 = 640$, $x_4 = 1.200$, $x_5 = 1.200$, $x_6 = 1.200$, $x_7 = 400$.

Somit erhalten wir:

$$x_M = \frac{1}{7}(1.140 + 1.140 + 640 + 1.200 + 1.200 + 1.200 + 400) \approx 988.57$$

und

$$x_{0.5} = 1.140.$$

2 Grundlegende Rechenoperationen

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 2.1

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und schreiben Sie das Ergebnis als Bruch. Kürzen Sie, wenn dies möglich ist.

(a) $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{3} + \frac{5}{3}$ (c) $\frac{2}{3} / \frac{3}{6}$ (d) $\frac{4^2}{2} \cdot \frac{1}{4}$

(e) $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{7}}$ (f) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{3}\right)$ (g) $\frac{3+\frac{1}{2}}{4-\frac{1}{3}}$

Lösung 2.1

Bei den oben angegebenen Aufgaben ergeben sich die nachfolgenden Werte:

$$
\begin{array}{llcllcl}
\text{(a)} & \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} & = & \frac{5}{6}, & \text{(b)} & \frac{4}{3} + \frac{5}{3} & = & 3, \\
\text{(c)} & \frac{2}{3} / \frac{3}{6} & = & \frac{4}{3}, & \text{(d)} & \frac{4^2}{2} \cdot \frac{1}{4} & = & 2 \\
\text{(e)} & \frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{7}} & = & \frac{3}{5}, & \text{(f)} & \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{3}\right) & = & \frac{65}{252}, \\
\text{(g)} & \frac{3+\frac{1}{2}}{4-\frac{1}{3}} & = & \frac{21}{22} & & & &
\end{array}
$$

Übungsaufgabe 2.2

Rechnen Sie folgende Terme aus.

(a) $(a+b+c)^2$ (b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(c) $(a+b)^2(a-b)$ (d) $(a+b)^3$

Lösung 2.2

(a) $$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ac + cb + ab)$$

(b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a^3-a^2b+ab^2)+(ba^2-ab^2+b^3)=a^3+b^3$

(c) $(a+b)^2(a-b)=(a^2+2ab+b^2)(a-b)=a^3+a^2b-ab^2-b^3$

(d) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Übungsaufgabe 2.3

1. *Schreiben Sie* $8^{1/2}$, $2^{3/4}$, $x^{-1/4}$ *als Wurzel.*

2. *Berechnen Sie* $\sqrt{(a-b)^2}$ *für* $b>a$.

Lösung 2.3

1.

$$\begin{aligned} 8^{1/2} &= \sqrt{8}=2\sqrt{2}, \\ 2^{3/4} &= \sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{8}, \\ x^{-1/4} &= \frac{1}{\sqrt[4]{x}}. \end{aligned}$$

2. Für $b>a$ ist:

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-b)^2} &= |a-b| \\ &= -(a-b) \\ &= b-a. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 2.4

1. *Die beiden unterschiedlichen Seiten eines Rechtecks werden je um 30 % vergrößert. Um wie viel Prozent vergrößert sich dann der Flächeninhalt des Rechtecks?*

2. *Die drei unterschiedlichen Seitenflächen eines Quaders werden je um 40 % vergrößert. Um wie viel Prozent vergrößern sich damit die Oberfläche und das Volumen des Quaders?*

Lösung 2.4

1. Der Flächeninhalt I eines Rechtecks berechnet sich aus dem Produkt der Grundseite a mal der Höhe b des Rechtecks. Werden nun diese beiden Seiten um jeweils 30 % vergrößert, so erhalten wir für das neue Rechteck den Flächeninhalt:

$$I=1.3\cdot a\cdot 1.3\cdot b=1.69\cdot a\cdot b.$$

Das neue Rechteck hat also einen um 69% vergrößerten Flächeninhalt.

2. Das Volumen V eines Quaders ist das Produkt der Länge der Grundseite a mal der Höhe des Quaders b mal der Tiefe c des Quaders. Werden nun die Seitenflächen um je 40 % vergrößert, so erhält man für den vergrößerten Quader das Volumen

$$V=\sqrt{1.4}\cdot a\cdot\sqrt{1.4}\cdot b\sqrt{1.4}\cdot c=(\sqrt{1.4})^3\cdot a\cdot b\cdot c\approx 1.6565\cdot a\cdot b\cdot c.$$

Das Volumen vergrößert sich somit um 65.65%. Für die Oberfläche erhält man:

$$O=2\cdot 1.4\cdot a\cdot b+2\cdot 1.4\cdot a\cdot c+2\cdot 1.4\cdot c\cdot b=1.4\cdot(2\cdot a\cdot b+2\cdot a\cdot c+2\cdot b\cdot c).$$

Somit vergrößert sich die Oberfläche um 40%.

Übungsaufgabe 2.5

Zeigen Sie mithilfe einer vollständigen Induktion über n, dass die sogenannten Fibonacci-Zahlen, die durch die Rekursionsformel

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1) \text{ mit } F(1) = F(2) = 1$$

definiert sind, die Gleichung

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

erfüllen.

Lösung 2.5

1. Induktionsanfang: Für $n_0 = 1$ gilt:

$$F(1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right) = 1.$$

Für $n_1 = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} F(2) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} \right) - \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4} \right) \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \geq n_0$ gilt:

$$F(n+1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

3. Induktionsbehauptung:Für $n+2$ gilt:

$$F(n+2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right).$$

4. Induktionsschritt: Es gilt, dass:

$$\begin{aligned} F(n+2) &= F(n+1) + F(n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n} \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]
\end{aligned}
$$

Übungsaufgabe 2.6

Beweisen Sie mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion die nachfolgenden Aussagen:

1. *Für $n \geq 4$ gilt:*

$$2^n < n!.$$

2. *Für $n \neq 3$ gilt:*

$$n^2 \leq 2^n.$$

Lösung 2.6

1. Für $n \geq 4$ gilt:

$$2^n < n!.$$

a) Induktionsanfang: Für $n_0 = 4$ gilt:

$$16 = 2^4 < 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!.$$

b) Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \geq n_0$ gilt:

$$2^n < n!.$$

c) Induktionsbehauptung:Für $n+1$ gilt:

$$2^{n+1} < (n+1)!.$$

d) Induktionsschritt: Da $n \geq 4$ ist, gilt:

$$
\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\
&< 2 \cdot n! \\
&< (n+1) \cdot n! \\
&= (n+1)!
\end{aligned}
$$

Somit haben wir die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ bewiesen.

2. Für $n \neq 3$ gilt:

$$n^2 \leq 2^n.$$

a) Induktionsanfang: Zunächst bemerken wir, dass

$$1^2 \leq 2^1$$

und

$$2^2 \leq 2^2$$

ist. Sei nun $n_0 = 4$. Dann ist:

$$n_0^2 = 4^2 = 16 \leq 16 = 2^4 = 2^{n_0}.$$

b) Induktionsvoraussetzung: Es sei nun $n \geq n_0$ und es gelte:

$$n^2 \leq 2^n$$

c) Induktionsbehauptung: Für $n+1$ gilt:

$$(n+1)^2 \leq 2^{n+1}.$$

d) Induktionsschritt: Es gilt:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\
&\leq n^2 + \frac{n^2}{2} + 1, \text{ da } n \geq 4, \\
&\leq n^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}, \text{ da } n \geq 4, \\
&\leq 2n^2 \\
&\leq 2 \cdot 2^n \\
&= 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass

$$\frac{n^2}{2} - 2n \geq 0 \Leftrightarrow n^2 - 4n \geq 0$$

für alle $n \geq 4$ gilt. Somit wäre auch diese Aussage bewiesen.

Übungsaufgabe 2.7

Zeigen Sie mithilfe des Binomischen Lehrsatzes, dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ *und jede natürliche Zahl* $n \geq 2$ *die Ungleichung*

$$(1+x)^n > \frac{n^2}{4} x^2$$

erfüllt ist.

Lösung 2.7

Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt die Ungleichung

$$(1+x)^n > \frac{n^2}{4}x^2.$$

1. Induktionsanfang: Es sei $n_0 = 2$, dann gilt:

$$x^2 = \frac{2^2}{4}x^2 = \frac{n_0^2}{4}x^2 < 1+2x+x^2 = (1+x)^2 = (1+x)^{n_0}.$$

2. Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \geq n_0$ gilt:

$$\frac{n^2}{4}x^2 < (1+x)^n.$$

3. Induktionsbehauptung: Für ein $n+1$ gilt:

$$\frac{(n+1)^2}{4}x^2 < (1+x)^{n+1}.$$

4. Induktionsschritt: Es gilt:

$$\begin{aligned}
(x+1)^{n+1} &= (1+x)\cdot(1+x)^n \\
&= (1+x)^n + x(1+x)^n \\
&> \frac{n^2}{4}x^2 + x(1+x)^n \\
&\geq \frac{n^2}{4}x^2 + nx^2 \\
&= \frac{n^2}{4}x^2 + \frac{4n}{4}x^2 \\
&\geq \frac{n^2}{4}x^2 + \frac{2n+1}{4}x^2 \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}x^2
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 2.8

1. *Sechs Kühe fressen an einem Tag 200 kg Gras. Wie viel kg Gras fressen vier Kühe in sieben Stunden?*
2. *In drei Stunden legt ein Fahrzeug bei konstanter Geschwindigkeit 210 km zurück, wie weit kommt es in 7.5 Stunden?*
3. *Die Organisationsabteilung einer Bücherei plant für die Umgestaltung der Verkaufsräume eine Zeit von 42 Arbeitstagen ein. Dazu sind 17 Arbeitskräfte erforderlich, die acht Stunden/Tag arbeiten. Nach zehn Arbeitstagen erkranken vier Arbeitskräfte. Ihre Arbeitsunfähigkeit erstreckt sich über einen Zeitraum von sieben Arbeitstagen. Ermitteln Sie, wie viel Überstunden während der Krankheitszeit der vier Arbeitskräfte je Mitarbeiter und Arbeitstag vorgesehen werden müssen, wenn der geplante Termin eingehalten werden soll.*
4. *Eine Person zahlt für drei Bücher 18 Euro. Wie viel Euro kosten dann acht Bücher?*

Lösung 2.8

1. Sechs Kühe fressen an einem Tag 200 kg Gras. Somit frisst eine Kuh

$$\frac{200}{24 \cdot 6} \text{ kg/h.}$$

Konsequenterweise fressen vier Kühe in sieben Stunden

$$4 \cdot 7 \text{ h} \cdot \frac{200}{24 \cdot 6} \text{ kg/h} = \frac{350}{9} \text{ kg} \approx 38.89 \text{ kg.}$$

2. Das Fahrzeug legt somit in einer Stunde 70 km zurück. Damit kommt es in 7.5 Stunden 525 km weit.
3. Wenn alle Arbeitskräfte gesund bleiben, arbeiten diese insgesamt 17 · 8 h = 136 h pro Tag. Während der Krankheitstage müssen diese Arbeitsstunden auf die Gesunden umverteilt werden, d.h.:

$$13 \cdot x = 136 \, h$$

Die führt uns auf $x \approx 10.46$ h. Somit müssen die 13 Gesunden an den sieben Krankheitstagen 2.46 h mehr arbeiten, damit der geplante Termin eingehalten werden kann.
4. Eine Person zahlt für drei Bücher 18 Euro. Ein Buch kostet somit 6 Euro. Somit kosten acht Bücher 48 Euro.

3 Rechnen mit Ungleichungen

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 3.1

Welche der folgenden Mengen ist nach oben bzw. nach unten beschränkt?

(a)	$\mathbb{R}_+$	*(b)*	$\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
(c)	$\{x^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$	*(d)*	$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$
(e)	$\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}, a > 0\}$	*(f)*	$\left\{\frac{a}{1+n^2} \mid n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}\right\}$
(g)	$\{x \mid x^2 < 3\}$	*(h)*	$\{5, 6\}$

Geben Sie, soweit möglich, auch das Infimum und das Supremum der Mengen an.

Lösung 3.1

(a) $\mathbb{R}_+$ ist nach unten beschränkt mit Null als Infimum und nach oben unbeschränkt.

(b) $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist nach unten beschränkt mit Null als Infimum und nach oben unbeschränkt.

(c) $\{x^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist nach unten und nach oben unbeschränkt.

(d) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist nach unten und nach oben unbeschränkt.

(e) $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}, a > 0\}$ ist nach unten und nach oben unbeschränkt.

(f) $\left\{\frac{a}{1+n^2} \mid n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}\right\}$ ist nach unten und nach oben unbeschränkt.

(g) $\{x \mid x^2 < 3\}$ ist nach unten beschränkt mit $-\sqrt{3}$ als Infimum
und nach oben beschränkt mit $\sqrt{3}$ als Supremum.

(h) $\{5, 6\}$ ist nach oben beschränkt mit 6 als Maximum
und nach unten beschränkt mit 5 als Minimum.

Übungsaufgabe 3.2
Welche Menge ist durch die Ungleichung

$$\left| |x^2-2| - \frac{1}{5} \right| < \frac{2}{3}$$

festgelegt?

Lösung 3.2
Die Lösungsmenge ist durch

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in \left(-\frac{\sqrt{645}}{15}, -\frac{\sqrt{255}}{15} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{255}}{15}, \frac{\sqrt{645}}{15} \right) \right\}$$

gegeben.

Übungsaufgabe 3.3
Lösen Sie die nachfolgenden Ungleichungen:

(a)	$\frac{x+1}{x+2} \leq 2$	*(b)*	$x^3 < x$
(c)	$\frac{5}{9x^2-16} > 0$	*(d)*	$x^4 + 3x^2 > 4$
(e)	$\lvert x-5 \rvert < 10^{-3}$	*(f)*	$\lvert x^3 \rvert < \lvert x \rvert$.

Lösung 3.3
Die gesuchten Lösungsmengen sind die Nachfolgenden:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty, -3] \cup (-2, \infty)\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)\}$

(c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)\right\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in (4.999, 5.001)\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-1, 0) \cup (0, 1)\}$.

4 Ploynome und Polynomdivision

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 4.1

Führen Sie die nachfolgenden Polynommultiplikationen durch:

$$\begin{aligned} a) &\quad (3x^4-7x^3+x^2-1)\cdot(x+1) \\ b) &\quad (2x^5-10x^4+7x^3-3x)\cdot(x^2+1) \\ c) &\quad (3x^7+8x^6+6x^5+3)\cdot(x^3+3x^2+1). \end{aligned}$$

Lösung 4.1

$$\begin{aligned} a)\ (3x^4-7x^3+x^2-1)\cdot(x+1) &= 3x^5-4x^4-6x^3+x^2-x-3 \\ b)\ (2x^5-10x^4+7x^3-3x)\cdot(x^2+1) &= 2x^7+9x^5-10x^6-10x^4+4x^3-3x \\ c)\ (3x^7+8x^6+6x^5+3)\cdot(x^3+3x^2+1) &= 3x^10+17x^9+21x^7+30x^8 \\ &\quad +8x^6+6x^5+3x^3+9x^2+3. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 4.2

Führen Sie folgende Polynomadditionen bzw. -subtraktionen durch:

$$\begin{aligned} a) &\quad (3x^4-7x^3+x^2-1)+(2x^5-10x^4+7x^3-3x) \\ b) &\quad (x^2+1)+(18x^4-29) \\ c) &\quad (8x^7+9x^6+57x^5+11)-(x^3+3x^2+1). \end{aligned}$$

Lösung 4.2

$$a)\ (3x^4-7x^3+x^2-1)+(2x^5-10x^4+7x^3-3x) = 2x^5-7x^4+x^2-3x-1$$

$$\begin{aligned} b)\ (x^2+1)+(18x^4-29) &= 18x^4+x^2-28 \\ c)\ (8x^7+9x^6+57x^5+11)-(x^3+3x^2+1) &= 8x^7+9x^6+57x^5-x^3-3x^2+10. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 4.3

Führen Sie – soweit wie möglich – die nachfolgenden Polynomdivisionen durch:

$$\begin{aligned} a) &\quad (3x^4-7x^3+x^2-1):(x+1) \\ b) &\quad (2x^5-10x^4+7x^3-3x):(x^2+1) \\ c) &\quad (3x^7+8x^6+6x^5+3):(x^3+3x^2+1). \end{aligned}$$

Lösung 4.3

$$\begin{aligned} a) &\quad (3x^4-7x^3+x^2-1):(x+1) = 3x^3-10x^2+11x-11+\tfrac{10}{x+1} \\ b) &\quad (2x^5-10x^4+7x^3-3x):(x^2+1) = 2x^3-10x^2-9x+10-\tfrac{8x+10}{x^2+1} \\ c) &\quad (3x^7+8x^6+6x^5+3):(x^3+3x^2+1) = 3x^4-x^3+9x^2-30x+91+\tfrac{-282x^2+30x-88}{x^3+3x^2+1}. \end{aligned}$$

5 Lineare Gleichungssysteme

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 5.1

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \\ 11 & 10 & 12 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 12 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie: (a) $A \cdot B$, (b) $B + C$, (c) $C \cdot D$, (d) $E \cdot D$, (e) $F - E$, (f) $E \cdot F$, (g) $A \cdot G$, (h) $G \cdot H$, (i) $H \cdot G$.

Lösung 5.1

Es gilt:

$$(a)\, A \cdot B \quad = \quad \begin{pmatrix} 80 & 70 & 90 \\ 184 & 158 & 210 \end{pmatrix}$$

$$(b)\ B+C = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 15 \\ 7 & 5 & 9 \\ 16 & 14 & 18 \\ 16 & 14 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(c)\ C \cdot D = \begin{pmatrix} 222 \\ 42 \\ 162 \\ 102 \end{pmatrix}$$

$$(d)\ E \cdot D = \begin{pmatrix} 31 \\ 47 \\ 101 \end{pmatrix}$$

$$(e)\ F - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(f)\ E \cdot F = \begin{pmatrix} 13 & 15 & 16 \\ 38 & 25 & 29 \\ 62 & 51 & 59 \end{pmatrix}$$

$$(g)\ A \cdot G = \begin{pmatrix} 85 \\ 205 \end{pmatrix}$$

$$(h)\ G \cdot H = \begin{pmatrix} 32 & 16 & 12 & 8 \\ 56 & 28 & 21 & 14 \\ 72 & 36 & 27 & 18 \\ 80 & 40 & 30 & 20 \end{pmatrix}$$

$$(i)\ H \cdot G = 107.$$

Übungsaufgabe 5.2

Bestimmen Sie die Lösungen der nachfolgenden Gleichungssysteme:

$$a)\ \begin{aligned} 2x+3y &= 8 \\ x-5y &= -3 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x+3y &= 7 \\ x+y &= 0 \end{aligned}$$

$$c)\ \begin{aligned} x+y &= -3 \\ 3x+5y &= 10 \\ 3x-y &= 11 \end{aligned} \qquad d)\ \begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ 2x+3y+4z &= 2 \\ 5x+7y+9z &= 6 \end{aligned}$$

$$e)\quad \begin{aligned} 2x+4y-2z+2v &= 6\\ 5x+10y+v &= 0\\ 3x+y-z+2v &= 1 \end{aligned} \qquad f)\quad \begin{aligned} 3x+5y+2z &= 20\\ 4x+y &= 40\\ -9x-15y-6z &= 30 \end{aligned}$$

Lösung 5.2

$a)$ $x=\frac{31}{13},\ y=\frac{14}{13}$

$b)$ $x=-\frac{7}{2},\ y=\frac{7}{2}$

$c)$ Besitzt keine Lösung!

$d)$ Besitzt keine Lösung!

$e)$ $\left\{(x,y,z,v) \mid \text{Für } \mu \in \mathbb{R} \text{ ist } x=\frac{2}{3}-\frac{11}{3}\mu, y=\mu, z=-\frac{17}{3}+\frac{20}{3}\mu, v=-\frac{10}{3}+\frac{25}{3}\mu\right\}$

$f)$ Besitzt keine Lösung!

Übungsaufgabe 5.3

Überprüfen Sie die nachfolgenden Vektoren jeweils auf lineare Unabhängigkeit:

$$a)\ \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\7\\9\end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-3\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix}6\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\7\\-2\end{pmatrix}$$

Lösung 5.3

Die Vektoren in den Aufgabenteilen a), b) und c) sind linear abhängig, während die im Aufgabenteil d) linear unabhängig sind.

Übungsaufgabe 5.4

Berechnen Sie jeweils die Determinante der nachfolgenden Matrizen:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&1\end{pmatrix} \qquad b)\ B=\begin{pmatrix}2&3&-4\\0&-4&2\\1&-1&5\end{pmatrix}$$

$$c)\ C=\begin{pmatrix}2&3\\-4&2\end{pmatrix} \qquad d)\ D=\begin{pmatrix}3&-4\\-4&1\end{pmatrix}$$

$$e)\ E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -4 & -6 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad f)\ F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung 5.4
Die Determinanten der Matrizen lauten:

$$\begin{array}{ll} a) & \det(A) = 27 \\ b) & \det(B) = -46 \\ c) & \det(C) = 16 \\ d) & \det(D) = -13 \\ e) & \det(E) = 0 \\ f) & \det(F) = 45 \end{array}$$

Übungsaufgabe 5.5
Ermitteln Sie jeweils die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der nachfolgenden Matrizen:

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad d) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 5.5
Die Eigenwerte lauten für die Matrix

$$a) \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = 2 \text{ und } \lambda_2 = 6.$$

Bei der Bestimmung von Eigenvektoren erhalten wir zwei für den Eigenwert $\lambda_1 = 2$, die z.B. durch

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } w_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, und für den Eigenwert $\lambda_2 = 6$ erhalten wir z.B. den Eigenvektor

$$v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$b) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = 1 \text{ und } \lambda_2 = 3.$$

Bei der Bestimmung von Eigenvektoren erhalten wir zwei für den Eigenwert $\lambda_2 = 3$, die z.B. durch

$$v_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } w_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind, und für den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ erhalten wir z.B. den Eigenvektor

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$c) \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = 3.$$

Bei der Bestimmung von Eigenvektoren erhalten wir für den Eigenwert $\lambda_1 = 3$ z.B. den Eigenvektor

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$d) \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = 2$$

Bei der Bestimmung von Eigenvektoren erhalten wir für den Eigenwert $\lambda_1 = 2$ z.B. den Eigenvektor

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 5.1

Es sei hier noch einmal daran erinnert, dass jedes Vielfache eines Eigenvektors x_{λ_i} zum Eigenwert λ_i ebenfalls die entsprechende Gleichung für den Eigenvektor löst. Daher sind Eigenvektoren nicht eindeutig bestimmt.

Übungsaufgabe 5.6

Berechnen Sie die Lösungen der nachfolgenden Gleichungen:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Lösung 5.6

Die Lösungen sind gegeben durch:

$$a) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$b) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe 5.7

Bei verschiedenen Auswertungsverfahren wird vorausgesetzt, dass aus einer Datenmatrix X zuerst die sogenannte Kovarianzmatrix $\mathscr{S} = (s_{ij})_{p\times p}$ *berechnet wird. Hierbei steht s_{ij} mit $i \neq j$ für die* Kovarianz *zwischen den aus den Elementen der i-ten und der j-ten Spalte bestehenden Stichproben. Die Kovarianz s_{ij} ist ein Maß für die gemeinsame Variation der Merkmalswerte von X_i und X_j. Sie wird mit der Formel*

$$s_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_{ki} - \overline{x}_{\cdot i})(x_{kj} - \overline{x}_{\cdot j})$$

berechnet. Hierbei bezeichnet $\overline{x}_{\cdot i}$ das arithmetische Mittel der Elemente der i-ten Spalte von X. Im Falle $i = j$ erhält man daraus die bekannte Formel für die aus den Elementen der i-ten Spalte gebildete Varianz, d. h. $s_{ii} = s_i^2$.

Bei einer medizinischen Testreihe wurden nun an sieben Probanden folgende Werte der Parameter X_1 und X_2 ermittelt:

X_1	2.24	4.78	3.43	2.69	4.51	6.01	3.89
X_2	11.8	12.9	14.8	14.6	15.1	14.4	13.8

Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix zu der oben gegebenen Datenmatrix X.

Lösung 5.7

Die Kovarianzmatrix ist durch

$$\begin{pmatrix} 1.672 & 0.52 \\ 0.52 & 1.401 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Übungsaufgabe 5.8

Berechnen Sie die Lösungen der nachfolgenden Gleichungssysteme, indem Sie jeweils die Inversen der Matrizen berechnen und bei der Ermittlung der Lösung verwenden:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 23 \\ 23 \end{pmatrix} \quad f)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung 5.8
Die jeweiligen Inversen und Lösungsvektoren sind gegeben durch:

$$a)\quad \begin{pmatrix} 5/13 & 3/13 \\ 1/13 & -2/13 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31/13 \\ 14/13 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d)\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 19 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$e)\quad \begin{pmatrix} 9/23 & 11/46 & 5/23 \\ -1/23 & -7/23 & 2/23 \\ -2/23 & -5/23 & 4/23 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39/2 \\ -6 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$f)\quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 7/2 & -3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe 5.9
Zeigen Sie die nachfolgenden Behauptungen für komplexe Zahlen:

1. $\frac{1+2i}{1+i} = \frac{3+i}{2}$

2. $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ *für beliebige* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
3. $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ *für beliebige* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

Lösung 5.9

1. Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1+2i}{1+i} &= \frac{1+2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\\ &= \frac{(1+2i)(1-i)}{2}\\ &= \frac{3+i}{2}.\end{aligned}$$

2. Es seien $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$ und $z_3 = e+if$ drei beliebige komplexe Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}z_1(z_2z_3) &= (a+ib)((c+id)(e+if))\\ &= (a+ib)(ce-df+i(de+cf))\\ &= ace-adf-bde-bcf+i(bce-bdf+ade+acf)\\ &= (ac-bd)e+i^2(ad+bc)f+ie(bc+ad)+if(ac-bd))\\ &= (ac-bd)(e+if)+i(ad+bc)(e+if)\\ &= (ac-bd+i(ad+bc))(e+if)\\ &= ((a+ib)(c+id))(e+if)\\ &= (z_1z_2)z_3\end{aligned}$$

3. Es seien $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$ und $z_3 = e+if$ drei beliebige komplexe Zahlen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}z_1(z_2+z_3) &= (a+ib)((c+id)+(e+if))\\ &= (a+ib)((c+e)+i(d+f))\\ &= (ac+ae-bd-bf)+i(ad+af+bc+be))\\ &= (ac+ae-bd-bf)+i(ad+af+bc+be))\\ &= ((ac-bd)+i(ad+bc)+(ae-bf)+i(af+be))\\ &= ((a+ib)(c+id)+(a+ib)(e+if)\\ &= z_1z_2+z_1z_3.\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 5.10

Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}$ *die Lösungen der Gleichung*

$$4z^2 - 12z + 25 = 0.$$

Lösung 5.10

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen $z_1 = \frac{3}{2} + 2i$ und $z_2 = \frac{3}{2} - 2i$.

Übungsaufgabe 5.11

Durch Zufuhr von Wasserdampf (H_2O) und Energie lässt sich Methan (CH_4) in Wasserstoff H_2 und Kohlenmonoxid (CO) aufspalten. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für diese Reaktion auf und lösen Sie dieses, indem Sie die Inverse der Koeffizientenmatrix berechnen.

Lösung 5.11

Die beobachtete Reaktion lässt sich auch als

$$H_2O + y_1CH_4 = y_2H_2 + y_3CO$$

schreiben. Hieraus können wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2 &= 4y_1 - 2y_2 \\ 0 &= y_1 - y_3 \\ 1 &= y_3 \end{aligned}$$

herleiten. Die Inverse der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ist gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich als Lösung der Lösungsvektor

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Reaktion erhalten wir somit:

$$H_2O + CH_4 = 3H_2 + CO.$$

Übungsaufgabe 5.12

Schreiben Sie die nachfolgenden komplexen Zahlen in der Form „Realteil $+i\cdot$ Imaginärteil”:

1. $1/(13-4i)$,
2. $(2-7i)/(5+3i)$.

Lösung 5.12

Es gilt:

1. $1/(13-4i) = \frac{13}{185} + \frac{4}{185}i$,
2. $(2-7i)/(5+3i) = -\frac{11}{34} - \frac{41}{34}i$.

Übungsaufgabe 5.13

Berechnen oder vereinfachen Sie die nachfolgenden Ausdrücke:

1. $(2+3i)(12-5i)$,
2. $(14+5i)+(11-14i)$,
3. $|2+3i|$,
4. $|11-14i|$,
5. $(4-3i)^2$,
6. $\overline{(14+5i)} \cdot \overline{(11-14i)}$.

Lösung 5.13

Es gilt:

1. $(2+3i)(12-5i) = 39+26i$,
2. $(14+5i)+(11-14i) = 25-9i$,
3. $|2+3i| = \sqrt{13}$,
4. $|11-14i| = \sqrt{317}$,
5. $(4-3i)^2 = 7-24i$,
6. $\overline{(14+5i)} \cdot \overline{(11-14i)} = 224+141i$.

6 Was ist eine Funktion?

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 6.1

Bringen Sie die folgenden rationalen Funktionen durch Polynomdivision auf die Form Polynom plus rationale Funktion:

$$a)\ \frac{x^5-1}{x-1} \quad b)\ \frac{x^7+3x^4-19x}{x^2-1} \quad c)\ \frac{x^4+x^3-3x+2}{x^3+2}.$$

Lösung 6.1

$$\begin{aligned}
a)\quad & \frac{x^5-1}{x-1} = x^4+(x^2+1)(x+1) = x^4+x^3+x^2+x+1,\\
b)\quad & \frac{x^7+3x^4-19x}{x^2-1} = x^5+x^3+3x^2+x+3+\frac{18x+3}{x^2-1},\\
c)\quad & \frac{x^4+x^3-3x+2}{x^3+2} = x+1-\frac{5x}{x^3+2}.
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 6.2

Bestimmen Sie zu den unten in der Tabelle gegebenen Daten der jährlichen Legehennenbestände in Deutschland y (in 100.000 Tieren) die dazugehörige Regressionsgerade.

Tab. 6.1: Jährliche Legehennenbestände in Deutschland (in 100.000 Tieren) entsprechend der Daten des Statistischen Amtes der Europäischen Gemeinschaften (vgl. [Eurostat 2007]).

x = Jahr	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
y in 10^5Tieren	584	544	507	517	507	506	505	502

x = Jahr	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
y in 10^5Tieren	501	503	497	484	455	443	454

Lösung 6.2

Zur Bestimmung der Regressionsgeraden müssen wir die Varianz s_x^2, die Kovarianz s_{xy}, sowie die arithmetischen Mittel y_M und x_M berechnen. Es gilt:

$$x_M = 1998, \; y_M = 500.6.$$

Hiermit berechnen wir die Varianz von x und die Kovarianz. Es gilt:

$$s_x^2 = 20 \text{ und } s_{xy} = -139.143$$

Somit ergibt sich die Regressionsgerade:

$$\hat{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - x_M) + y_M = -6.957x + 1440.971.$$

Übungsaufgabe 6.3

Bestimmen Sie zu den unten in der Tabelle gegebenen Daten der jährlichen Kuhmilchaufnahme in Deutschland y (in 1.000 Tonnen) die dazugehörige Regressionsgerade.

Tab. 6.2: Jährliche Kuhmilchaufnahme in Deutschland (in 1.000 Tonnen) entsprechend der Daten des Statistischen Amtes der Europäischen Gemeinschaften (vgl. [Eurostat 2007]).

x = Jahr	1997	1998	1999	2000	2001
y in 10^3t	26.99	26.75	26.78	26.98	26.88

x = Jahr	2002	2003	2004	2005
y in 10^3t	26.62	27.32	27.11	27.31

Lösung 6.3

Zur Bestimmung der Regressionsgeraden müssen wir auch hier die Varianz s_x^2, die Kovarianz s_{xy}, sowie die arithmetischen Mittel y_M und x_M berechnen. Es gilt:

$$x_M = 2001, \; y_M = \frac{24274}{900}.$$

Hiermit berechnen wir die Varianz von x und die Kovarianz. Es gilt:

$$s_x^2 = 7.5 \text{ und } s_{xy} = \frac{385}{1000}$$

Somit ergibt sich die Regressionsgerade:

$$\hat{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}(x - x_M) + y_M = \frac{77}{1500}x - \frac{340861}{4500}.$$

Übungsaufgabe 6.4

Gegeben sind die Punkte $(5,2)$, $(0,-2)$ *im* $\mathbb{R}^2$. *Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die senkrecht/parallel zur Geraden durch diese Punkte ist und durch den Punkt* $(1,3)$ *verläuft.*

Lösung 6.4

Die Gerade durch die Punkte $(5,2)$, $(0,-2)$ im $\mathbb{R}^2$ ist durch die Geradengleichung

$$f(x) = \frac{4}{5}x - 2$$

gegeben. Die hierzu senkrechte Gerade durch den Punkt $(1,3)$ hat die Geradengleichung:

$$f(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{17}{4}.$$

Die Geradengleichung der Geraden, die parallel zu der oben angegebenen Geraden ist und durch $(1,3)$ verläuft, lautet:

$$f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{11}{5}.$$

Übungsaufgabe 6.5

Wie sieht die Menge aller Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ aus, die die Bedingungen $y \geq 2x - 1$ und $\frac{1}{2}x + y \leq 3$ erfüllen (Skizze!)?

Lösung 6.5

Die Lösungsmenge ist durch

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq \frac{8}{5},\ 2x - 1 \leq y \leq 3 - \frac{1}{2}x\right\}$$

gegeben:

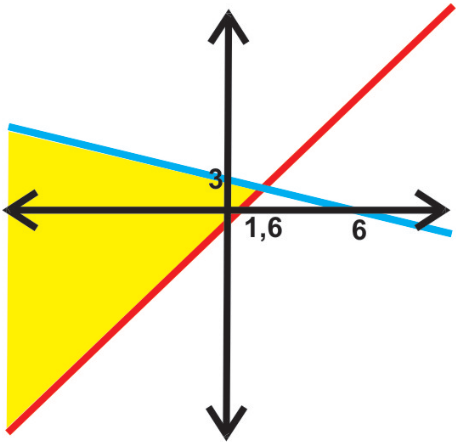

Abb. 6.1: Skizze der Lösungsmenge.

Übungsaufgabe 6.6

T. Carlson hat sich 1913 mit der Entwicklung einer Population von Hefezellen beschäftigt. Das (gerundete) Ergebnis seiner Untersuchungen bzw. Berechnungen kann man der nachfolgenden Tabelle entnehmen:

Die Zeit t hat dabei die Einheit Stunden, und der Umfang $p(t)$ der Population der Hefezellen ist in μl Zellvolumen pro 100 ml Medium gegeben.

Tab. 6.3: Näherungswerte für die Entwicklung einer Population von Hefezellen. Werte gerundet nach [Bohl 2001], Tabelle 1.2, Seite 3.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p(t)	18	29	47	71	119	174	257	351	441	513

Ermitteln Sie aus den Daten der Tabelle zu den Zeitpunkten ein Polynom $P(t)$ vom Grad kleiner gleich 9, das im Zeitintervall $[1,10]$ als kontinuierliche Näherungsfunktion für die diskreten Messungen angesehen werden kann.

Lösung 6.6

Das gesuchte Polynom lautet:

$$\begin{aligned} P(t) \quad = \quad & -\frac{107}{40320}x^9 + \frac{1339}{10080}x^8 - \frac{19129}{6720}x^7 + \frac{12281}{360}x^6 - \frac{481079}{1920}x^5 \\ & + \frac{1672823}{1440}x^4 - \frac{33968959}{10080}x^3 + \frac{7353449}{1260}x^2 - \frac{1130987}{210}x + 1995. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 6.7 (Nichtlineare Regression)

Die rationalen, bzw. um in diesem Fall ganz genau zu sein, die gebrochen linearen *Funktionsgleichungen*

$$y = \frac{ax}{x+b}$$

und

$$y = \frac{a}{x+b}$$

können durch geeignete Transformationen in lineare Funktionen umgewandelt werden. So geht die erste Gleichung durch die Transformation $y' = 1/y$ und $x' = 1/x$ in die Funktionsgleichung

$$y' = \frac{b}{a}x' + \frac{1}{a}$$

über und die zweite Gleichung durch die Transformation $y' = 1/y$ und $x' = x$ in die Funktionsgleichung

$$y' = \frac{1}{a}x' + \frac{b}{a}$$

über.

Die Gleichung

$$W = \frac{W_0}{1-c\cdot t}$$

wurde als ein Modell zur Beschreibung des Wachstumverlaufs der Weltbevölkerung vorgeschlagen. Hierbei ist t die Zeit in Jahren, und W steht für die Bevölkerungsgröße in Millionen. W_0 ist die Größe der Weltbevölkerung im Jahr 1650 und c eine Konstante. Diese wird mit 510 Millionen angegeben. Von 1650 an soll das Modell gelten, wobei demnach für 1650 $t = 0$ ist. Entsprechend der offiziellen Angaben der Vereinten Nationen (UN) hat sich die Weltbevölkerung von 1950 bis 2004 wie folgt entwickelt.

1. *Berechnen Sie zunächst die entsprechenden Werte für die Zeit t.*

Tab. 6.4: Größe der Weltbevölkerung in Millionen entsprechend der offiziellen Angaben der Vereinten Nationen (vgl. [UN 2007]).

Jahr	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2004
W $\cdot 10^6$	2520	3024	3697	4442	5280	6086	6389

2. *Linearisieren Sie die Gleichung mithilfe einer geeigneten* Reziproktransformation.
3. *Bestimmen Sie für die Parameter W_0 und c Näherungswerte mithilfe der Regressionsgeraden.*
4. *Welche Prognosen ergeben sich, wenn man mit der Regressionsfunktion die Weltbevölkerung im Jahre 2025 schätzt?*

Lösung 6.7

Durch die Transformation $t' = t$ und $W' = 1/W$ erhält man die "neue" Datentabelle:

Zeit t'	0	300	310	320	330	340	350	354
W'=1/W $\cdot 10^{-9}$	1.96	0.397	0.331	0.27	0.225	0.189	0.164	0.157

Hieraus ermitteln wir für die neuen Variablen die Regressionsgerade:

$$W' = -\frac{71.998 \cdot 7}{97264}(t' - 288) + 0.462 \approx -0.0052t' + 1.954.$$

Für W_0 und c erhalten wir somit die Näherungswerte:

$$W_0 \approx \frac{1000}{1954} \approx 0.51178 \text{ und } c \approx 0.0052 \cdot 0.51178 \approx 0.00266.$$

Für das Jahr 2025 erhalten wir eine Weltbevölkerung von der Größe

$$W(375) = 204.712 \cdot 10^7.$$

7 Die Exponentialfunktion und ihre Anwendung in der Biologie

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 7.1

Für welche x gilt die Ungleichung $e^{-(x+4)^2} \leq \frac{3}{4}$? Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = e^{-(x+4)^2}$ und illustrieren Sie Ihr Ergebnis aus der vorangegangenen Frage.

Lösung 7.1

Die Ungleichung $e^{-(x+4)^2} \leq \frac{3}{4}$ ist für die nachfolgende Menge erfüllt:

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-\infty, -4 - \sqrt{\ln(4/3)}) \cup (-4 + \sqrt{\ln(4/3)}, \infty)\right\}$$

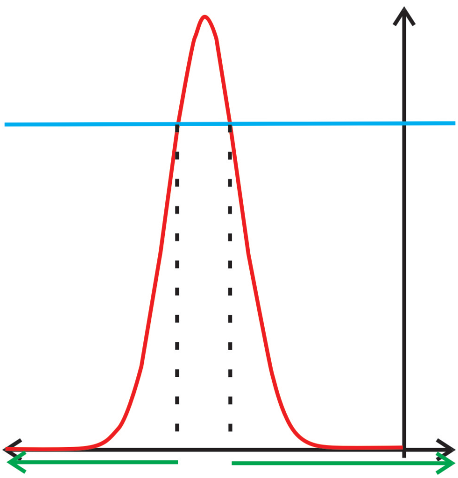

Abb. 7.1: Skizze der Lösungsmenge.

Übungsaufgabe 7.2

Die Population von wilden Murmeltieren in einem Nationalpark in den kanadischen Rocky Mountains erhöht sich in sieben Jahren von 2300 auf 3245.

1. *Geben Sie die Population zum Zeitpunkt t als eine Funktion $N(t)$ an, wobei $N(t)$ die Gestalt*
$$N(t) = N_0 \cdot \exp(\lambda \cdot t)$$
habe.
2. *Wie groß war die Population am Ende des ersten Jahres?*
3. *Wie lange dauert es, bis die Population sich verdoppelt hat?*

Lösung 7.2

1. Die Population zum Zeitpunkt t ist durch die Funktion
$$N(t) = 2300 \cdot \exp(0.049 \cdot t)$$
gegeben.
2. Die Population umfasst am Ende des ersten Jahres 2.415 Murmeltiere.
3. Es dauert ca. 14 Jahre und zwei Monate, bis die Population sich verdoppelt hat.

Übungsaufgabe 7.3

Wir nehmen an, dass in Deutschland jährlich x Tonnen CO_2 ausgestoßen werden. Wenn eine jährliche Reduktion des CO_2-Ausstoßes um 5 % verwirklicht werden könnte, wann hat man dann den ursprünglichen Wert halbiert?

Lösung 7.3

Unter der Annahme, dass der jährliche CO_2-Ausstoß um 5% verringert wird, erhalten wir für die jährlich ausgestoßene CO_2-Menge als Funktion von der Zeit t die Gleichung:

$$x(t) = x(0) \cdot \left(\frac{95}{100}\right)^t.$$

Somit müssen wir die Gleichung

$$\frac{1}{2}x(0) = x(0)\left(\frac{95}{100}\right)^t$$

nach t auflösen. Dies führt uns auf den Wert $t = \frac{-\ln(2)}{\ln 95 - \ln(100)} \approx 13.51$. Es würde somit ungefähr 13.5 Jahre dauern, bis die Menge des CO_2-Ausstoßes halbiert wäre.

Übungsaufgabe 7.4

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$L(t) = \frac{1}{a + be^{-\lambda t}}, \text{ mit } a, b, \lambda > 0$$

monoton wachsend ist und dass $L(t) \to \frac{1}{a}$ für $t \to \infty$ und $L(t) = \frac{1}{a+b}$ für $t \to 0$ gilt.

Lösung 7.4

Da die Funktion $e^{-\lambda t}$ monoton fallend ist, wird der Nenner in der Definition der Funktion $L(t)$ für größer werdendes t immer kleiner. Hieraus folgt direkt, dass für $t_1 \leq t_2$ auch $L(t_1) \leq L(t_2)$ gelten muss. Außerdem gilt, dass $e^{-\lambda t} \to 0$ für $t \to \infty$ und $e^{-\lambda t} \to 1$ für $t \to 0$ gilt. Aus diesen beiden Aussagen folgen direkt die Behauptungen, dass $L(t) \to \frac{1}{a}$ für $t \to \infty$ und $L(t) = \frac{1}{a+b}$ für $t \to 0$ gilt.

Übungsaufgabe 7.5

Lösen Sie die Gleichung $\log_2(-2x) + 4\log_4(x+3) = 3$.

Lösung 7.5

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \log_2(-2x) + 4\log_4(x+3) = 3 \\
\Leftrightarrow \quad & 2^{\log_2(-2x)+4\log_4(x+3)} = 2^3 \\
\Leftrightarrow \quad & 2^{\log_2(-2x)} \cdot 2^{4\log_4(x+3)} = 8 \\
\Leftrightarrow \quad & (-2x) \cdot (2^2)^{2\log_4(x+3)} = 8 \\
\Leftrightarrow \quad & (-2x) \cdot 4^{\log_4(x+3)^2} = 8 \\
\Leftrightarrow \quad & (-2x) \cdot (x+3)^2 = 8 \\
\Leftrightarrow \quad & -2x^3 - 12x^2 - 18x = 8.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung hat die beiden Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = -4$. Da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist, ergibt sich somit als Lösung unseres usprünglichen Problems nur die Lösung $x = -1$.

Übungsaufgabe 7.6

Es bezeichne $y(t)$ die Menge einer Substanz, die radioaktiv zerfällt. Es gilt das nachfolgende Gesetz des radioaktiven Zerfalls:

$$y(t) = y(0)2^{-\frac{t}{T}}.$$

Hierbei ist T die Halbwertzeit der Substanz, d. h. die Zeit, in der die Hälfte der Substanz zerfallen ist, und t bedeutet die Zeit.

Bei der Ausgrabung einer Steinzeitsiedlung werden einige Holzkohlestückchen sichergestellt. Es stellt sich heraus, dass der ^{14}C-Anteil in dieser Holzkohle nur 40 % des üblichen Anteils beträgt. Wie alt ist die Siedlung, wenn man bei der Rechnung berücksichtigt, dass die Halbwertzeit von ^{14}C mit 5730 Jahren gegeben ist?

Lösung 7.6

Zur Lösung dieser Aufgabe müssen wir die Gleichung

$$0.4y(0) = y(0)2^{-\frac{t}{5730}}.$$

nach t auflösen. Es ergibt sich somit für t ungefähr der Wert $t = 7574.65$. Die Siedlung ist also ungefähr 7.575 Jahre alt.

8 Die trigonometrischen Funktionen

In diesem Kapitel gibt es keine separaten Übungsaufgaben.

9 Differentialrechnung

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 9.1

Bestimmen Sie mithilfe der im vorangegangenen Kapitel angegebenen Ableitungsregeln die Ableitungen der nachfolgenden Funktionen:

$$\begin{array}{ll} a)\ f(x) = \sin(x)\cos(x) & b)\ g(x) = \tan(x) \\ c)\ h(x) = (\sin(x))^n & d)\ p(x) = \ln(\cos(x)) \\ e)\ r(x) = e^{-x^2} & f)\ w(x) = xe^{-x} \\ g)\ v(x) = \frac{x-1}{x} & h)\ u(x) = \frac{(x^2-1)(x+3)}{x^2+4} \end{array}$$

Lösung 9.1

Entsprechend der in dem Kapitel eingeführten Differentiationsregeln erhält man:

$$\begin{array}{ll} a)\ f'(x) = cos^2(x) - sin^2(x) & b)\ g'(x) = 1 + \tan^2(x) \\ c)\ h'(x) = n\sin^{n-1}(x)\cos(x) & d)\ p'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ e)\ r'(x) = -2xe^{-x^2} & f)\ w'(x) = e^{-x} - xe^{-x} \\ g)\ v'(x) = \frac{1}{x^2} & h)\ u'(x) = \frac{x^4+13x^2+30x-4}{(x^2+4)^2} \end{array}$$

Übungsaufgabe 9.2

Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{5}(x^2-1)^3 - x^2$ in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie (ohne Rechnung) den Verlauf der ersten, zweiten und dritten Ableitung dieser Funktion in dasselbe Koordinatensystem.

Lösung 9.2

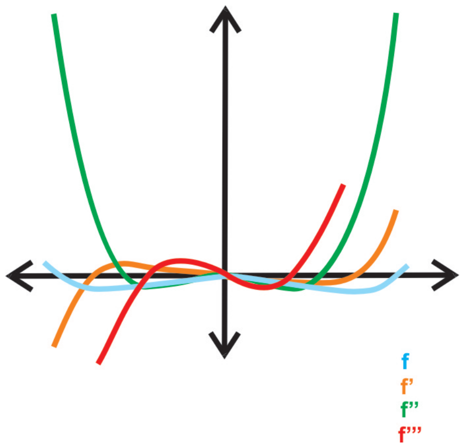

Abb. 9.1: Skizze der Funktion selbst, sowie der ersten, zweiten und dritten Ableitung der Funktion.

Übungsaufgabe 9.3

Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = (x^2 - 1)(x+2)$ in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie (ohne Rechnung) in dieses Koordinatensystem den Verlauf der ersten, zweiten und der dritten Ableitung.

Lösung 9.3

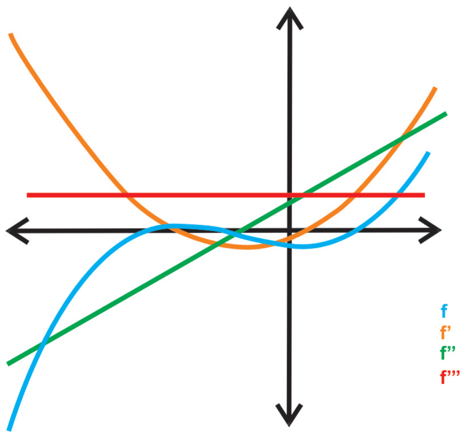

Abb. 9.2: Skizze der Funktion selbst, sowie der ersten, zweiten und dritten Ableitung der Funktion.

Übungsaufgabe 9.4

Bestimmen und klassifizieren Sie alle kritischen Punkte der Funktionen:

$$(a)\ f(x) = -x^3 + 2x^2 - 7x + 4,\ (b)\ g(x) = xe^{-x},\ (c)\ u(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x^2+4}.$$

Skizzieren Sie den Verlauf der Funktionen.

Lösung 9.4

Die Funktion $f(x)$ hat keinen kritischen Punkt. Die Funktion $g(x)$ hat in $(1, e^{-1})$ ein Maximum und die Funktion $u(x)$ hat an der Stelle

$$x_1 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{65}$$

ein Minimum und an der Stelle

$$x = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{65}$$

ein Maximum.

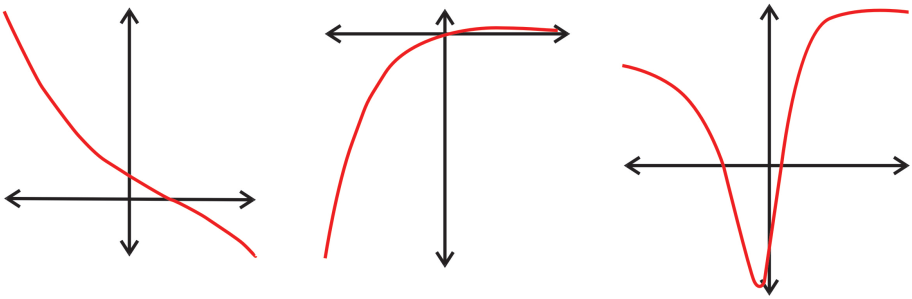

Abb. 9.3: Skizze der Funktion $f(x)$ (links), $g(x)$ (Mitte) und $u(x)$ (rechts).

Übungsaufgabe 9.5

Für $t \geq 0$ sei die Funktion

$$L(t) = \frac{1}{1 + 3\exp(-2t)}$$

gegeben. Skizzieren Sie die Funktion $L'(t)$ und beantworten Sie die nachfolgenden Fragen:

1. *Wie viele mögliche relative Extrema besitzt $L'(t)$? Begründen Sie Ihre Antwort! Hinweis: Bestimmen Sie zur Beantwortung dieser Frage die Funktion $L''(t)$ mithilfe der Quotientenregel!*
2. *Wie verhält sich $L'(t)$ für $t \to \infty$?*

Lösung 9.5

Aus der Funktion $L(t)$ berechenen wir:

$$L'(t) = \frac{6\exp(-2t)}{(1 + 3\exp(-2t))^2}$$

und

$$L''(t) = \frac{12\exp(-2t)(3\exp(-2t)-1)}{(1+3\exp(-2t))^3}.$$

wir sehen somit, dass $L'(t)$ nur einen kritischen Punkt besitzt, der ein Mximum ist und durch $(\frac{1}{2}\ln(3), \frac{1}{2})$. Für $t \to \infty$ gilt $L'(t) \to 0$.

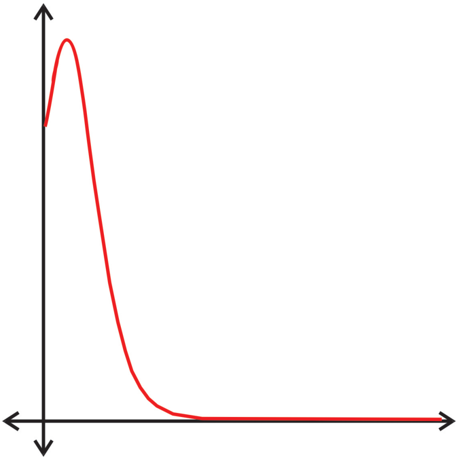

Abb. 9.4: Skizze der Funktion $L'(t)$.

Übungsaufgabe 9.6

Mithilfe eines geschätzten Startwertes x_0 und der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

lässt sich näherungsweise die Lösung x^* der Gleichung $f(x) = 0$ bestimmen, falls $f'(x^*) \neq 0$ ist. Die Stelle x^* bezeichnet man als Nullstelle der Funktion f. Dieses nach Isaac Newton benannte Newton-Verfahren *liefert schnell gute Näherungswerte, wenn der Startwert hinreichend nahe bei x^* liegt. Als* Abbruchskriterium *nimmt man in der Regel den (relativen) Fehler*

$$F_r := \left|\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}\right| = \left|\frac{f(x_n)}{x_n f'(x_n)}\right|$$

des n-ten Iterationsschritts. Ist dieser z. B. kleiner oder gleich einer vorgegebenen, gewünschten Genauigkeit $\varepsilon > 0$ also ($F_r \leq \varepsilon$), so würde man das Verfahren abbrechen.

Bestimmen Sie für $f(x) = x^2 - 0.5$ die im Intervall $(0, \infty)$ liegende Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ mit einer Genauigkeit von sechs Nachkommastellen.

Lösung 9.6

Das Newtonverfahren liefert hier als Näherung den Wert: $x = 0.7071068$

Übungsaufgabe 9.7

Mithilfe ihrer Ableitungen kann man für differenzierbare Funktionen auch Polynome zur Approximation der Funktion bestimmen. So kann man die differenzierbare Funktion f für die Entwicklungsstelle x_0 mit dem nachfolgenden Taylorpolynom

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0)(x - x_0)^k$$

vom Grad n approximieren. Der Fehler, der durch diese Approximation entsteht, ist durch

$$f(x) - p_n(x) = R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

gegeben, wobei ξ eine im Allgemeinen unbekannte Stelle zwischen x_0 und x bezeichnet. Bestimmen Sie für

$$\text{(a) } f(x) = \sin(x) \text{ und } x_0 = 0, \quad \text{(b) } f(x) = \left(\frac{6}{6+x}\right)^3 \text{ und } x_0 = 0$$

das Taylorpolynom vom Grad 6.

Lösung 9.7

Das Taylorpolynom vom Grad 6 der Funktion $f(x) = \sin(x)$ ist durch

$$p_6(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

gegeben. Für $f(x) = \left(\frac{6}{6+x}\right)^3$ lautet das Taylorploynom vom Grad 6:

$$p_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{108}x^3 + \frac{5}{432}x^4 - \frac{7}{2592}x^5 + \frac{7}{11664}x^6.$$

Übungsaufgabe 9.8

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = x^{1/x}$$

für $x > 0$ auf Extrema und skizzieren Sie ihren Verlauf. Was passiert für $x \to \infty$?

Lösung 9.8

Zunächst bemerken wir, dass

$$f(x) = x^{1/x} = \exp(\ln(x))^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right).$$

Somit gilt:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right).$$

Hieraus folgt, dass im Punkt $(e, e^{1/e})$ das einzige Extremum der Funktion f ist. Da $f''(e) < 0$ ist, handelt es sich somit um ein Maximum. Für $x \to \infty$ gilt:

$$f(x) \to 1.$$

Übungsaufgabe 9.9

Weisen Sie mithilfe des Prinzips der vollständigen Induktion nach, dass sich die n-te Ableitung der Funktion des Produkts zweier beliebig oft differenzierbarer Funktionen f und g für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}$$

darstellen lässt.

Lösung 9.9

Die n-te Ableitung der Funktion des Produkts zweier beliebig oft differenzierbarer Funktionen f und g fässt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}$$

darstellen.

1. Induktionsanfang: Es sei $n_0 = 1$, dann gilt:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \sum_{k=0}^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{1-k} g}{dx^{1-k}} = \frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx}.$$

2. Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \geq n_0$ gilt:

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}$$

3. Induktionsbehauptung: Für ein $n+1$ gilt:

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(fg) = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n+1-k} g}{dx^{n+1-k}}$$

4. Induktionsschritt: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(fg) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}(fg)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^k f}{dx^k}\right) \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}} + \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f\frac{d^{n+1}g}{dx^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{d^k f}{dx^k}\frac{d^{n+1-k}g}{dx^{n+1-k}} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array}\right)\frac{d^k f}{dx^k}\frac{d}{dx}\frac{d^{n+1-k}g}{dx^{n+1-k}} + \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}g \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\left(\begin{array}{c} n+1 \\ k \end{array}\right)\frac{d^k f}{dx^k}\frac{d^{n+1-k}g}{dx^{n+1-k}}
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 9.10
Es seien

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{für } x \geq 2 \\ 2x, & \textit{für } x < 2 \end{cases} \quad \textit{und } g(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{für } x \geq 2 \\ 4(x-1), & \textit{für } x < 2 \end{cases} .$$

Sind diese Funktionen an der Stelle $x_0 = 2$ stetig? Sind sie an dieser Stelle differenzierbar?

Lösung 9.10
Beide Funktionen sind in $x_0 = 2$ stetig. Die Funktion $f(x)$ ist im Gegensatz zur Funktion $g(x)$ in $x_0 = 2$ jedoch nicht differenzierbar.

Übungsaufgabe 9.11
Eine Population der Größe y wachse in Abhängigkeit von der Zeit t exponentiell nach der Formel

$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

an. Bestimmen Sie die Wachstumsrate der Population, d. h. die Änderung der Populationsgröße bezogen auf die Zeitdauer, in der die Veränderung erfolgt.

Lösung 9.11
Die Wachstumsrate der Population ist gegeben durch:

$$y'(t) = r \cdot y_0 \cdot e^{rt}.$$

Übungsaufgabe 9.12
In der Enzymkinetik spielt die sogenannte Michaelis-Menten-Gleichung eine wichtige Rolle. Hierbei steht die Umwandlungsgeschwindigkeit y mit der Konzentration x des Substrats näherungsweise in dem Zusammenhang

$$y(x) = \frac{ax}{x+b},$$

wobei a und b positive Konstanten sind. Ist die Funktion $y(x)$ monoton? Ist sie konvex oder konkav? Was passiert, wenn $x \to \infty$? An welcher Stelle ist die Funktion maximal, wo minimal? Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion.

Lösung 9.12

Da x die Konzentration des Substrates beschreibt, betrachten wir nur positive x. Für $x = 0$ hat die Funktion den Funktionswert $y(0) = 0$. Wenn $x \neq 0$ ist, kann man die Funktion schreiben als:

$$y(x) = \frac{a}{1+\frac{b}{x}}.$$

Da für die Funktion $b/x \to 0$ für $x \to \infty$ gilt und diese Funktion monoton fallend ist, nimmt der Nenner also für wachsendes x ab. Somit ist die Funktion $y(x)$ monoton wachsend und es gilt: $y(x) \to a$ für $x \to \infty$. Des Weiteren gilt:

$$y''(x) = -\frac{2ab}{(x+b)^3}.$$

Somit ist die Funktion für positive x konkav. Die Funktion ist minimal an der Stelle $x = 0$ und nähert sich für $x \to \infty$ gegen den "maximalen Wert" a an.

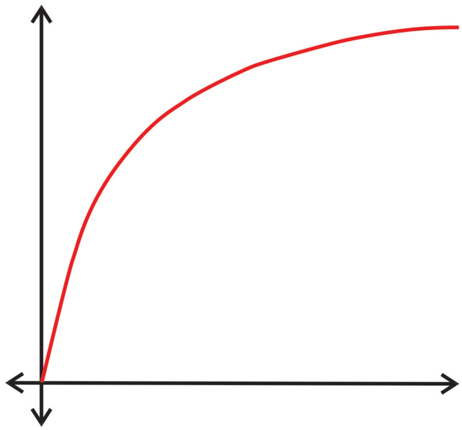

Abb. 9.5: Skizze der Funktion $y(x)$.

Übungsaufgabe 9.13

Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Ableitung der nachfolgenden Funktionen

a) $f(x) = (3x^5 - 2x^2)(1-2x^4)$ b) $g(x) = \frac{(3x^2-2\exp(x))}{x^2+1}$

c) $h(x) = \ln\left(\sqrt{3x^2+5}\right)$ d) $p(x) = \frac{1}{1-|x|}$

e) $r(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ f) $w(x) = x(1-x^2)^{1/4}$

g) $w(x) = e^{2+3\ln(1+x)}$ h) $u(x) = \frac{1+x}{1-(1-\frac{x}{1+x})}$

i) $v(x) = \frac{e^{3\ln(\sqrt{x^2-1})}}{x-1}$.

Lösung 9.13

a) Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und ihre Ableitung lautet:

$$f'(x) = 15x^4 - 54x^8 - 4x + 24x^5.$$

b) Die Funktion ist auf $\mathbb{R}$ definiert und ihre Ableitung lautet:

$$g'(x) = -\frac{-6x + 2x^2 \exp(x) + 2\exp(x) - 4x\exp(x))}{(x^2+1)^2}.$$

c) Die Funktion ist auf $\mathbb{R}$ definiert und ihre Ableitung lautet:

$$h'(x) = \frac{3x}{3x^2+5}.$$

d) Die Funktion ist auf $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ definiert und ihre Ableitung lautet:

$$p'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(1-|x|)^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{(1-|x|)^2}, & x > 0. \end{cases}$$

e) Die Funktion ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und ihre Ableitung lautet:

$$r'(x) = -\frac{\cos(1/x)}{x^2}.$$

f) Die Funktion ist auf $(-1, 1)$ definiert und ihre Ableitung lautet:

$$w'(x) = -\frac{-2+3x^2}{2(1-x^2)^{3/4}}.$$

g) Die Funktion ist auf $\mathbb{R}$ definiert und ihre Ableitung lautet:

$$w'(x) = 3(1+x)^2 \exp(2).$$

h) Die Funktion ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert und ihre Ableitung lautet:

$$u'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}.$$

i) Die Funktion ist auf $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ definiert und ihre Ableitung lautet:

$$v'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}(2x-1)}{x-1}.$$

10 Integralrechnung

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 10.1
Berechnen Sie die nachfolgenden Integrale:

$$a)\ \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx, \qquad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \qquad c)\ \int_0^2 \left(x^2+6x+9\right)dx,$$
$$d)\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x^{1+\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx, \qquad e)\ \int_0^2 x2^x dx, \qquad f)\ \int_0^1 x\sqrt{1+x}dx.$$

Lösung 10.1

$$\text{a)}\ \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln(2), \qquad \text{b)}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$\text{c)}\ \int_0^2 \left(x^2+6x+9\right)dx = \frac{98}{3}, \qquad \text{d)}\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x^{1+\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \frac{108}{77},$$
$$\text{e)}\ \int_0^2 x2^x dx = \frac{8\ln(2)-3}{(\ln(2))^2}, \qquad \text{f)}\ \int_0^1 x\sqrt{1+x}dx = \frac{4}{15}+\frac{4\sqrt{2}}{15}.$$

Übungsaufgabe 10.2
Bestimmen Sie mithilfe partieller Integration eine Stammfunktion zu:

$$a)\ \int xe^x dx, \qquad b)\ \int \sin^2(x)dx$$
$$c)\ \int \cos^2(x)dx, \qquad d)\ \int x^3\sin(x)dx,$$

$$e) \int x^{\alpha} \ln(x) dx, \qquad f) \int x^2 \cos(2x) dx.$$

Lösung 10.2

$$\begin{aligned}
&\text{a)} && \int x e^x dx = (x-1)e^x,\\
&\text{b)} && \int \sin^2(x) dx = -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x,\\
&\text{c)} && \int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x,\\
&\text{d)} && \int x^3 \sin(x) dx = -x^3\cos(x) + 3x^2\sin(x) - 6\sin(x) + 6x\cos(x),\\
&\text{e)} && \int x^{\alpha} \ln(x) dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ln(x) - \frac{1}{(\alpha+1)^2}x^{\alpha+1},\\
&\text{f)} && \int x^2 \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x^2\sin(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x).
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 10.3

Bestimmen Sie mithilfe der angegebenen Substitutionen die nachfolgenden Integrale:

$$\begin{aligned}
&a) && \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx \text{ (Substituieren Sie } x = \sin(t)),\\
&b) && \int \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx \text{ (Substituieren Sie } t = e^{-x}).
\end{aligned}$$

Lösung 10.3

$$\begin{aligned}
&\text{a)} && \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}\\
&\text{b)} && \int \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx = \frac{1}{1+e^{-x}}.
\end{aligned}$$

11 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 11.1

Am 01.11.1986 kam es am Rhein zu einem Giftdesaster. Die Verseuchung des Wassers durch Chemikalien war durch den Brand einer Lagerhalle einer Baseler Chemiefirma ausgelöst worden. Wir wollen nun eine derartige Verschmutzung eines Fließgewässers vereinfacht modellieren.

Wir nehmen an, dass ein Fluss geradlinig in x-Richtung strömt. Die Geschwindigkeit der Strömung wird hierbei als konstant vorausgesetzt. An der Stelle $x = 0$ *gelangt nun kontinuierlich eine Fremdflüssigkeit in der Fluss. Die Fremdflüssigkeit vermischt sich sofort und vollständig mit dem Wasser. Hierbei entsteht eine (zeitunabhängige) Konzentration* c_0.

Allerdings wird die Fremdflüssigkeit mit der konstanten Rate k bestandsproportional abgebaut. Wenn eine hinreichend lange Zeit nach der Einleitung verstrichen ist, stellt sich ein stationärer (also zeitlich unabhängiger) Verlauf der Konzentration der Fremdflüssigkeit ein. Die Konzentration wird hier über den Flussquerschnitt als konstant angenommen. Wie lässt sich die Konzentration als eine Funktion der Ortsvariablen x ausdrücken?

Lösung 11.1

Es wird also angenommen, dass die Fließgeschwindigkeit v des Flusses konstant ist. Mit $c(x)$ sei die Konzentration des Giftstoffes an der Stelle x bezeichnet. Der Fremdstoff wird mit der konstanten Rate k abgebaut. Betrachtet man den Flussabschnitt zwischen x und $x + \Delta x$, so stellen wir das Nachfolgende fest:

1. $k \cdot c(\bar{x}) \cdot A \cdot \Delta x$ des Fremdstoffes wird in dem Abschnitt der Breite A zwischen $x \leq \bar{x} \leq \Delta x$ abgebaut.

2. $c(x+\Delta x)\cdot A\cdot v$ des Fremdstoffes fließt ab.
3. $c(x)\cdot A\cdot v$ des Fremdstoffs fließt in den Abschnitt dazu.

Stellt man nun die entsprechende Bilanzgleichung auf, so erhält man nach dem Grenzübergang $\Delta x \to 0$ die Differentialgleichung

$$c'(x) = -\frac{k}{v}c(x)$$

für die Giftstoffkonzentration an der Stelle x. Die Lösung dieser DGL ist durch

$$c(x) = c_0 \cdot e^{-\frac{k}{v}x}$$

gegeben.

Übungsaufgabe 11.2
E.-coli-*Bakterien leben unter anderem auch im menschlichen Darm. Wenn ein Mensch geschwächt ist, können die Bakterien, aufgrund der körperlicher Verfassung, in die Nieren des Menschen aufsteigen. Dies führt dann unter Umständen zu einer sehr schmerzhaften Nierenbeckenentzündung. Eine derartige Infektion durch* E.-coli-*Bakterien wird durch etwa* 10^8 *sich dann in der Niere befindlichen Colibakterien ausgelöst. Im menschlichen Körper vemehren sich die Colibakterien schneller als in diesem Buch bereits schon einmal beschrieben. Wir gehen hier davon aus, dass die Colibakterien im menschlichen Körper ihre Anzahl etwa alle 20 Minuten verdoppeln.*
Wir nehmen nun an, dass 50.000 Colibakterien in die linke Niere eines Menschen gelangt seien. Wie lange (in Stunden gemessen) dauert es, bis die kritische Größe (10^8) *an Colibakterien erreicht ist? Zur Lösung der Aufgabe nehmen wir an, dass in dem betrachteten Zeitraum keine Bakterien absterben oder ausgeschieden werden.*

Lösung 11.2
Die Differentialgleichung, die die Vermehrung der Colibakterienpopulation $p(t)$ zum Zeitpunkt t beschreibt, ist durch

$$p'(t) = k \cdot p(t)$$

gegeben, wobei hier $p(0) = 50.000$ ist und k die Proportionalitätskonstante bezeichnet, die die Vermehrung beschreibt. Die Lösung der DGL ist gegeben durch

$$p(t) = 50.000 \exp\left(\frac{\ln(2)}{20}t\right).$$

Demnach ist nach

$$t = \frac{20\ln(2000)}{\ln(2)} \approx 219.32$$

Minuten die kritische Größe von 10^8 erreicht.

Übungsaufgabe 11.3
Ein radioaktives Material zerfalle mit einer Rate, die zu der momentan vorhandenen Menge zu einer beliebigen Zeit proportional sei. Die Halbwertzeit des Materials betrage T Jahre. Bestimmen Sie die Menge, die nach t Jahren noch vorhanden ist.

Lösung 11.3

Mit $x(t)$ bezeichnen wir die Menge des radioaktiven Materials, das nach t Jahren noch vorhanden ist. Des Weiteren sei α die Proportionalitätskonstante, die den Zerfall beschreibt. Somit ergibt sich in einer kleinen Zeitintervall $(t, t+\Delta t)$ die Gleichung:

$$x(t+\Delta t) - x(t) = -\alpha x(\tilde{t})(t + \Delta t - t),$$

wobei $t \leq \tilde{t} \leq t + \Delta t$ gelte. Hieraus erhalten wir die DGL

$$x'(t) = -\alpha x(t).$$

Die Lösung der DGL führt mithilfe der Trennung der Variablen auf

$$x(t) = x(0) \cdot \exp\left(\frac{1}{T} \ln\left(\frac{1}{2}\right) t\right),$$

wobei $x(0)$ die ursprünglich vorhandene Menge des radioaktiven Materials bezeichnet.

Übungsaufgabe 11.4 (Die Methode der Trennung der Variablen)

1. *Bestimmen Sie die Lösung(en) zu folgenden Differentialgleichungen*

$$\begin{array}{ll} i) & y'(t) = 2ty(t) \\ ii) & y'(t) + 4ty(t) - 8t = 0. \end{array}$$

2. *Finden Sie die Lösung(en) der nachfolgenden Anfangswertaufgaben*

$$\begin{array}{ll} i) & u'(x) = 2xu^2(x),\ u(0) = 1 \\ ii) & u'(x) - a_1 u(x)(a_2 - u(x)) = 0,\ u(0) = u_0\ (a_1, a_2 > 0). \end{array}$$

Hinweis: *In Aufgabe ii) der Teilaufgabe b) wird eine Partialbruchzerlegung der Form*

$$\frac{1}{a_1 s(a_2 - s)} = \frac{A}{a_1 s} + \frac{B}{a_2 - s}$$

benötigt werden. Die in dieser Aufgabe angegebene Differentialgleichung nennt man auch die logistische Gleichung.

Lösung 11.4

1. Die Lösungen der Differentialgleichungen lauten:

i) $y(t) = c \cdot e^{t^2}$, wobei $c \neq 0$ eine Konstante bezeichnet.

ii) $y(t) = 2 + c \cdot e^{-2t^2}$, wobei $c \neq 0$ eine Konstante bezeichnet.

2. Die Lösungen der Anfangswertaufgaben lauten:

i) $u(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, wobei die Lösung auf dem Intervall $(-1, 1)$ definiert ist.

ii) $u(x) = \dfrac{a_2 u_0}{u_0 + (a_2 - u_0)\, e^{-a_1 a_2 x}}$.

Übungsaufgabe 11.5 (Ansatz vom Typ der rechten Seite)
Bestimmen Sie mithilfe des Ansatzes vom Typ der rechten Seite alle Lösungen der Differentialgleichungen

a) $u''(x) - 2u(x) = e^x \sin(x)$ *b)* $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = t^3 e^{2t} + te^{2t}$
c) $y''(x) + 4y(x) = x^2 \sin(2x)$ *d)* $u''(t) + 4u(t) = 2\cos(t)\cos(3t)$

Tipp zu d): *Denken Sie an die Rechenregeln für die Sinus- und die Cosinusfunktion!*

Lösung 11.5

a) $u(x) = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{4} e^x(\sin(x) + \cos(x)),$
wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten sind.

b) $y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{60} t^3 e^{2t}(10 + 3t^2),$
wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten sind.

c) $y(x) = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x) + \frac{1}{96}(-8x^3 + 3x)\cos(2x) + \frac{1}{16} x^2 \sin(2x),$
wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten sind.

d) $u(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) - \frac{1}{6}\cos^2(2t) + \frac{1}{12} + \frac{1}{16}\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t)t,$
wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten sind.

Übungsaufgabe 11.6
Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$Y'(x) = AY(x),$$

wobei die Matrix zunächst a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ *und dann b)* $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *sei.*

Lösung 11.6
Die gesuchten Lösungen sind durch die nachfolgenden Ausdrücke gegeben, wobei C_1, C_2 und C_3 jeweils beliebige Konstanten bezeichnen:

a) $$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = C_1 e^{(3+2\sqrt{3})x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} + C_2 e^{(3-2\sqrt{3})x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

b) $$Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = C_1 e^{x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{3x} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe 11.7

Bestimmen Sie die Lösung der nachfolgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungssysteme:

$$a) \qquad Y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \qquad Y'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 2x+1 \end{pmatrix}$$

Lösung 11.7

Die gesuchten Lösungen sind durch die nachfolgenden Ausdrücke gegeben, wobei C_1 und C_2 jeweils beliebige Konstanten bezeichnen:

$$\text{a)} \qquad Y'(x) = C_1 e^{-5x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/15 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \qquad Y'(x) = C_1 e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{9}{5}x^2 - \frac{142}{25}x + \frac{558}{125} \\ -\frac{6}{5}x^2 + \frac{58}{25}x - \frac{317}{125} \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe 11.8

1. *Ein großer Behälter B_1 mit einem Fassungsvermögen von $200\ \ell$ wird mit Wasser gefüllt. Anschließend werden 7 kg Zucker in dem Behälter aufgelöst. Einen anderen Behälter B_2 mit einem Fassungsvermögen von $300\ \ell$ füllt man ebenfalls mit Wasser und löst hierin 5 kg Zucker auf. Hiernach wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ damit begonnen, pro Minute ständig $15\ \ell$ Zuckerwasser von B_1 nach B_2 und $15\ \ell$ von B_2 nach B_1 zu pumpen, die dann auch sofort verrührt werden. Wie groß ist der Zuckergehalt $z_i(t)$ in B_i ($i \in \{1,2\}$) zur Zeit $t > 0$? Stabilisiert sich der Zuckergehalt in den beiden Behältern auf einem einheitlichen Niveau?*
2. *Wir nehmen nun an, dass beide Behälter B_1 und B_2 ein Fassungsvermögen von jeweils $200\ \ell$ besitzen. Beide Behälter seien vollständig mit Wasser gefüllt, in dem 7 kg (in B_1) bzw. 4 kg Zucker (in B_2) aufgelöst seien. Nun leitet man zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ pro Minute 2 Liter einer Zuckerlösung der Konzentration 0.3 kg / ℓ in B_1 ein. Gleichzeitig werden $3\ \ell$ / Minute von B_1 nach B_2, $1\ \ell$ / Minute von B_2 nach B_1 herübergepumpt und $2\ \ell$ / Minute aus B_2 in einen Abfluss gelenkt. Wie groß ist der Zuckergehalt $z_i(t)$ in B_i ($i \in \{1,2\}$) zur Zeit $t > 0$? Konvergiert die Zuckerkonzentration in B_i gegen eine einheitliche Konzentration? Wenn ja, dann geben Sie diese Konzentration explizit an.*

Lösung 11.8

Den Zuckergehalt in kg pro Liter zum Zeitpunkt t im Behälter B_i wollen wir in dieser Aufgabe mit $m_i(t)$ bezeichnen.

1. Wir halten die zeitliche Änderung des Zuckergehalts fest. Es gilt:

$$m_1'(t) \quad = -\tfrac{15}{200} m_1(t) + \tfrac{15}{300} m_2(t)$$

$$m_2'(t) \quad = \tfrac{15}{200} m_1(t) - \tfrac{15}{300} m_2(t),$$

wobei wir die Anfangsbedingungen $m_1(0) = 7/200$ und $m_2(0) = 5/300$ haben.

Als Lösungen dieses Differentialgleichungssystems erhalten wir:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \frac{31}{1500} + \frac{43}{3000} e^{\left(-\frac{1}{8}t\right)} \\ m_2(t) &= \frac{31}{1000} - \frac{43}{3000} e^{\left(-\frac{1}{8}t\right)}. \end{aligned}$$

Somit stabilisieren sich m_1 und m_2 für $t \to \infty$ bei

$$\lim_{t\to\infty} m_1(t) = \frac{31}{1500} \text{ und } \lim_{t\to\infty} m_2(t) = \frac{31}{1000}.$$

2. Wir halten auch in diesem Aufgabenteil die zeitliche Änderung des Zuckergehalts fest. Es gilt:

$$\begin{aligned} m_1'(t) &= -\tfrac{3}{200} m_1(t) + \tfrac{1}{200} m_2(t) + \tfrac{6}{10} \\ m_2'(t) &= \tfrac{3}{200} m_1(t) - \tfrac{1}{200} m_2(t) - \tfrac{2}{200}, \end{aligned}$$

wobei wir die Anfangsbedingungen $m_1(0) = 7/200$ und $m_2(0) = 4/200$ haben.

Als Lösungen dieses Differentialgleichungssystems erhalten wir:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= -\frac{18083}{800} e^{\left(-\frac{1}{50}t\right)} + \frac{59}{400} t + \frac{18111}{800} \\ m_2(t) &= \frac{18083}{800} e^{\left(-\frac{1}{50}t\right)} + \frac{177}{400} t - \frac{18067}{800}. \end{aligned}$$

In diesem Fall konvergieren die Zuckerkonzentrationen nicht gegen eine einheitliche Konzentration

12 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 12.1
Wir wollen die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass wenigstens zwei von den fünf Kindern einer Familie Mädchen sind! Gehen Sie bei Ihren Berechnungen von den Annahmen aus, dass Jungen- und Mädchengeburten gleichwahrscheinlich sind und der Ausgang einer Geburt das Ergebnis der nächsten nicht beeinflusst.

Lösung 12.1
Insgesamt gibt es bei diesem Zufallsexperiment 2^5 mögliche Ausgaänge. Die allesamt gleichwahrscheinlichen Ereignisse sind durch

$$mmmmm, mmmmj, mmmjm, mmjmm, mjmmm, jmmmm, mmmjj, mmjjm, mjjmm,$$

$$mmjmj, mjmmj, jmmmj, mjmjm, jmmjm, jjmmm, mmjjj, mjjjm, jjjmm, mjmjj, mjjmj,$$

$$jmjjm, jjmjm, jjmmj, jjjmm, mjjjm, mmjjj, jjjjm, jjjmj, jjmjj, jmjjj, mjjjj, jjjjj$$

gegeben. Somit gilt für das Ereignis E= $\{$ wenigstens zwei von den fünf Kindern einer Familie sind Mädchen$\}$:

$$P(E) = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}.$$

Übungsaufgabe 12.2
Wir betrachten eine Population mit 1000 Individuen, von denen 47 % der Individuen erkrankt sind. 34 % *der Population sind untergewichtig, und von diesen sind* $7/9$ *erkrankt. Wie groß ist somit die Wahrscheinlichkeit, dass ein untergewichtiges Individuum erkrankt ist?*

Lösung 12.2
Es gilt:

$$\begin{aligned} P(\text{ Ind. erkrankt} \mid \text{Ind. untergew. }) &= \frac{P(\text{ Ind. erkrankt } \textit{und} \text{ Ind. untergew. })}{P(\text{ Ind. untergew. })} \\ &= \frac{340 \cdot (7/9)}{340} = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein untergewichtiges Individuum erkrankt ist, liegt somit bei ca. 77.78 %.

Bemerkung: Die Antwort kann man durch genaues Lesen auch schon direkt aus der Aufgabenstellung erkennen.

Übungsaufgabe 12.3
In einer Population, die zu 46.9 % aus Frauen und zu 53.1 % aus Männern besteht, seien 8 % männliche Populationsmitglieder „rot-grün"-blind. Zusätzlich sind 0.38 % *der Population weibliche Individuen, die ebenfalls unter „rot-grün"-Blindheit leiden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein „rot-grün"-blindes Individuum männlich ist.*

Lösung 12.3
Es gilt:

$$\begin{aligned} P(\text{ Ind. männl.} \mid \text{Ind. rot-grün-blind }) &= \frac{P(\text{ Ind. männl. und Ind. rot-grün-blind })}{P(\text{ Ind. untergew. rot-grün-blind })} \\ &= \frac{8}{8.38} \\ &\approx 0.9547. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein „rot-grün"-blindes Individuum männlich ist, liegt somit bei 95.47 %.

Übungsaufgabe 12.4
Es werden drei faire Würfel geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Augensumme von 9 *zu würfeln, wenn man weiß, dass mindestens ein Würfel eine* 3 *zeigt?*

Lösung 12.4
Offenbar sollen die zwei Ereignisse E_1 =„die Augensumme der drei fairen Würfel ergibt neuen“ und E_2 =„einer der Würfel zeigt eine drei“ gleichzeitig eintreten. Es gilt:

$$\begin{aligned} E_1 \text{ und } E_2 \quad = \quad & \{(1,3,5),(1,5,3),(5,3,1),(5,1,3),(3,1,5),(3,5,1),(2,3,4), \\ & (2,4,3),(3,2,4),(3,4,2),(4,2,3),(4,3,2),(3,3,3)\} \end{aligned}$$

und $|\Omega| = 216$. Somit ist

$$P(E_1 \text{ und } E_2) = \frac{13}{216}.$$

Tab. 12.1: Verkürzte Sterbetafel für Männer 2003/2005 für das Land NRW (vgl. [Landesamt für Datenverarbeitung und Statistik NRW 2007]).

Alter	0	10	20	30	40
Anzahl	100.000	99.293	99.035	98.394	97.384
Alter	50	60	70	80	90
Anzahl	94.683	87.952	73.515	45.501	12.187

Übungsaufgabe 12.5

Aus der verkürzten Sterbetafel für Männer 2003/2005 für das Land NRW des **(author?)** *Landesamt für Datenverarbeitung und Statistik NRW 2007 entnehmen wir die nachfolgenden Werte:*
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein 20-Jähriger (ein 40-Jähriger) 50, 60, 70 bzw. 80 Jahre alt wird?

Lösung 12.5

Wenn es in der Tabelle 99.035 der 20-Jährigen gibt, aber nur 87.952 der 60-Jährigen, dann gilt:

$$P(\text{ein 20-Jähriger wird 60}) = \frac{87.952}{99.035} \approx 0.88809.$$

Analog erhält man:

$$\begin{aligned}
P(\text{ein 20-Jähriger wird 50}) &= \frac{94.683}{99.035} \approx 0.956056\\
P(\text{ein 20-Jähriger wird 70}) &= \frac{73.515}{99.035} \approx 0.742313\\
P(\text{ein 20-Jähriger wird 80}) &= \frac{45.501}{99.035} \approx 0.45944\\
P(\text{ein 40-Jähriger wird 50}) &= \frac{94.683}{97.384} \approx 0.972264\\
P(\text{ein 40-Jähriger wird 60}) &= \frac{87.952}{97.384} \approx 0.903146\\
P(\text{ein 40-Jähriger wird 70}) &= \frac{73.515}{97.384} \approx 0.754898\\
P(\text{ein 40-Jähriger wird 80}) &= \frac{45.501}{97.384} \approx 0.467233.
\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 12.6

Es seien die unabhängigen Ereignisse „Blutgruppe 0“ und „Rhesus-positiv“ mit den Wahrscheinlichkeiten $P(0) = 0.41$ und $P(R) = 0.85$ gegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person Blutgruppe 0 hat und Rhesus-positiv ist.

Lösung 12.6

Da die Ereignisse voneinander unabhängig sind, erhält man:

$$\begin{aligned}
P((\text{Blutgruppe 0 und Rhesus-positiv})) &= P(\text{Blutgruppe 0}) \cdot P(\text{Rhesus-positiv})\\
&= 0.41 \cdot 0.85\\
&= 0.3485
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person „Blutgruppe 0“ hat und „Rhesus-positiv“ ist, liegt somit bei 34.85 %.

Übungsaufgabe 12.7

Ein Varizellen-Test (Windpocken-Test) habe eine Sensitivität von 96 % *und eine Spezifikation von* 95.5 %*. Dann werden* 96 % *der Personen mit Antikörpern gegen Varizellen und* 95.5 % *der Personen ohne Antikörper gegen Varizellenviren richtig klassifiziert. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit Antikörpern gegen Varizellen fälschlicherweise ein negatives Ergebnis erhält, ist* 4 %*. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei einer Person ohne Antikörper gegen Varizellen ein falsch-positives Ergebnis ergibt, beträgt* 4.5 %*. Dieser Test wird nun bei einer Population von 100.000 Personen mit 1000 Personen, die Antikörper gegen Varizellenviren besitzen, angewendet.*

1. *Wie groß ist die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit einem positiven Testergebnis auch tatsächlich Antikörper gegen Varizellenviren besitzt?*
2. *Wie groß ist die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit einem negativen Testergebnis auch tatsächlich keine Antikörper gegen Varizellenviren besitzt?*

Lösung 12.7

1. Die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit einem positiven Testergebnis auch tatsächlich Antikörper gegen Varizellenviren besitzt, beträgt:

$$\begin{aligned} P(\text{ Ind. besitzt Antikörp. } \mid \text{ Test positiv }) &= \\ \frac{P(\text{ Test positiv } \mid \text{ Ind. hat Antikörp. }) \cdot P(\text{ Ind. besitzt Antikörp. })}{P(\text{ Test positiv })} &= \\ \frac{0.96 \cdot 0.01}{0.0542} &\approx 0.1771. \end{aligned}$$

2. Die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit einem negativen Testergebnis auch tatsächlich keine Antikörper gegen Varizellenviren besitzt, beträgt:

$$\begin{aligned} P(\text{ Ind. besitzt keine Antikörp. } \mid \text{ Test negativ }) &= \\ \frac{P(\text{ Test negativ } \mid \text{ Keine Antikörp. }) \cdot P(\text{ Keine Antikörp. })}{P(\text{ Test negativ })} &= \\ \frac{0.955 \cdot 0.99}{0.9458} &\approx 0.9996. \end{aligned}$$

13 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 13.1

Berechnen und skizzieren Sie zu den folgenden Dichtefunktionen die dazugehörigen Verteilungsfunktionen.

$$
\begin{aligned}
a)\ f(x) &= \begin{cases} be^{-bx}, & \text{für } x \geq 0, \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases} \\
b)\ f(x) &= \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1, \\ \frac{7}{x^8}, & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \\
c)\ f(x) &= \begin{cases} xe^{-x}, & \text{für } x \geq 0, \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Lösung 13.1

Die Berechnung der Verteilungsfunktionen ergibt:

$$
\begin{aligned}
a)\ F(x) &= \begin{cases} 1 - e^{-bx}, & \text{für } x \geq 0, \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases} \\
b)\ F(x) &= \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x^7}, & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \\
c)\ F(x) &= \begin{cases} 1 - (1+x)e^{-x}, & \text{für } x \geq 0, \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Der skizzierte Verlauf der Verteilungsfunktionen entspricht jeweils den nachfolgenden Abbildungen:

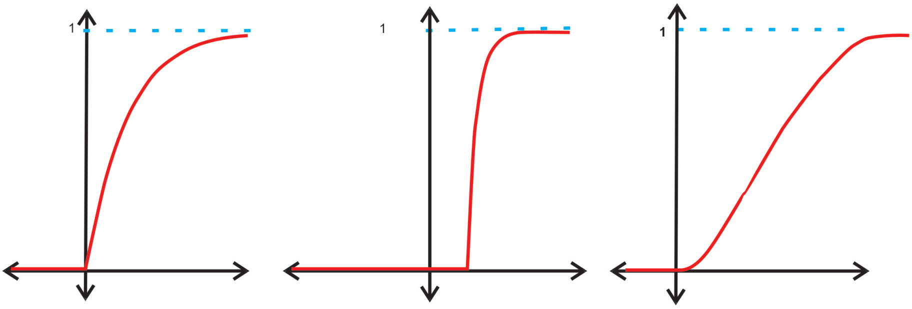

Abb. 13.1: Skizze der Verteilungsfunktionen. a) links, b) in der Mitte und c) rechts.

Übungsaufgabe 13.2

1. *Skizzieren Sie die nachfolgende Dichtefunktion. Berechnen und skizzieren Sie außerdem die dazugehörige Verteilungsfunktion.*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x, & \textit{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \textit{für } 2 < x \end{cases}$$

2. *Berechnen Sie für die Wahrscheinlichkeitsdichte*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{für } x < 0, \\ e^{-x}, & \textit{für } x \geq 0 \end{cases}$$

den Mittelwert und das 75%*-Quantil.*

Lösung 13.2

1. Die Verteilungsfunktion lautet:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & \text{für } 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{für } 2 < x \end{cases}$$

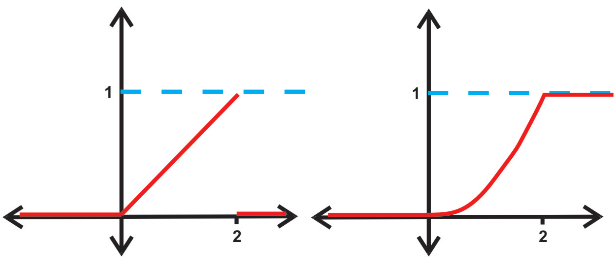

Abb. 13.2: Skizze der Dichte (links) und der Verteilungsfunktion (rechts).

2. Der zu der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0, \\ e^{-x}, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

gehörende Mittelwert lautet

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x e^{-x} dx = 1.$$

und das 75%-Quantil ist durch

$$0.75 = \int_{-\infty}^{\xi_{0.75}} f(x) dx = \int_{0}^{\xi_{0.75}} e^{-x} dx = 1 - e^{-\xi_{0.75}}$$

gegeben, woraus $\xi_{0.75} = \ln(4)$ folgt.

Übungsaufgabe 13.3

Bestimmen Sie zu der nachfolgenden Wahrscheinlichkeitsdichte den Mittelwert und die Varianz:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \textit{für } x \leq 5 \\ \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}, & \textit{für } 5 \leq x \leq 7 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}, & \textit{für } 7 \leq x \leq 8 \\ 0, & \textit{für } x \geq 8 \end{cases}$$

Lösung 13.3

Der Mittelwert ist definiert als

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Somit ist also:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{5}^{7} \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x dx + \int_{7}^{8} \frac{-2}{3}x^2 - \frac{16}{3}x dx \\ &= \left. \frac{1}{9}x^3 - \frac{5}{6}x^2 \right|_5^7 + \left. \left[-\frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{3}x^2 \right] \right|_7^8 \\ &= \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Die Definition der Varianz lautet:

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx.$$

Hiermit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \int\limits_5^7 (x-\frac{20}{3})^2(\frac{1}{3}x-\frac{5}{3})dx + \int\limits_7^8 (x-\frac{20}{3})^2(\frac{-2}{3}x-\frac{16}{3})dx \\ &= \frac{7}{18}.\end{aligned}$$

Übungsaufgabe 13.4

Bestimmen Sie zu der Wahrscheinlichkeitsdichte aus der vorangegangenen Aufgabe die folgenden Quantile:

1. *das 75%-Quantil,*
2. *den Median,*
3. *das 25%-Quantil,*
4. *das 30%-Quantil.*

Hinweis: Eine Skizze der Verteilungsfunktion kann hierbei helfen!

Lösung 13.4

1. Das 75%-Quantil ist gegeben durch:

$$\xi_{0.75} = 8 - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

2. Der Median ist gegeben durch:

$$\xi_{0.5} = 5 + \sqrt{3}.$$

3. Das 25%-Quantil ist gegeben durch:

$$\xi_{0.25} = 5 + \sqrt{1.5}.$$

4. Das 30%-Quantil ist gegeben durch:

$$\xi_{0.3} = 5 + \sqrt{1.8}.$$

Übungsaufgabe 13.5

Bestimmen Sie zu der zur Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für } x \leq 1, \\ (x-1)^2 & \textit{für } 1 \leq x \leq 2, \\ -\frac{3}{4}\cdot x + \frac{5}{2} & \textit{für } 2 \leq x \leq \frac{10}{3}, \\ 0 & \textit{für } x \geq \frac{10}{3} \end{cases}$$

die folgenden Quantile:

1. *das 75%-Quantil,*
2. *den Median,*

3. *das 25%-Quantil,*
4. *das 30%-Quantil.*

Hinweis: Eine Skizze der Verteilungsfunktion kann hierbei helfen!

Lösung 13.5
Die Verteilungsfunktion der gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte lautet:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1, \\ \frac{1}{3}(x-1)^3 & \text{für } 1 \leq x \leq 2, \\ -\frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{19}{6} & \text{für } 2 \leq x \leq \frac{10}{3}, \\ 1 & \text{für } x \geq \frac{10}{3} \end{cases}$$

1. Das 75%-Quantil ist gegeben durch:

$$\xi_{0.75} = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{6}.$$

2. Der Median ist gegeben durch:

$$\xi_{0.5} = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

3. Das 25%-Quantil ist gegeben durch:

$$\xi_{0.25} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{6}.$$

4. Das 30%-Quantil ist gegeben durch:

$$\xi_{0.3} = 1 + \sqrt[3]{\frac{9}{10}}.$$

14 Parameterschätzungen

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 14.1
*Das europäische Eichhörnchen (*Sciurus vulgaris*), auch Eichkätzchen oder Eichkater genannt, ist in Wäldern und Parks häufig anzutreffen. Laut Literaturangaben ist es sehr leicht und wiegt zwischen 300 und 500 g. Bei einer Untersuchung des Gewichts von vorübergehend eingefangenen Eichhörnchen wurden die Tiere gewogen. Hierbei erhielt man die nachfolgenden Werte (in Gramm):*

$$367.8;\ 242.6;\ 365;\ 416.2;\ 337;\ 520;\ 444.4.$$

Bestimmen Sie ein 90%*iges Konfidenzintervall für das durchschnittliche Gewicht der untersuchten Eichhörnchen.*

Lösung 14.1
Da die Varianz durch die Stichprobenvarianz geschätzt werden muss, verwenden wir zur Bestimmung des Konfidenzintervalls die Student-t-Verteilung. Das Konfidenzintervall ist gegeben durch:

$$\left[x_M - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, x_M + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Nun ist $x_M \approx 384.714$,

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95,$$

$$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{6;0.95} = 1.943,$$

und $s \approx 87.56$, womit wir für das Konfidenzintervall somit

$$[320.411; 449.017]$$

erhalten.

Übungsaufgabe 14.2
*Die Länge eines ausgewachsenen ostafrikanischen Riesenschnurfüßers (*archispirostreptus gigas*), die in Kenia oft auch „Mombasa Express" genannt werden, liegt zwischen 15 bis 20 cm. Allerdings gibt es mitunter auch daumenstarke „Prachtexemplare" von bis zu 30 cm Länge. Ein Zoologe hat nun bei elf dieser ostafrikanischen Riesenschnurfüßer die folgenden Längen (in cm) beobachtet:*

$$12.3;\ 23.4;\ 21.7;\ 22.8;\ 22.0;\ 13.5;\ 30.9;\ 21.7;\ 22.5;\ 22.4;\ 23.1.$$

Geben Sie ein 99%iges Konfidenzintervall für die durchschnittliche Länge eines ausgewachsenen ostafrikanischen Riesenschnurfüßers an.

Lösung 14.2
Da die Varianz durch die Stichprobenvarianz geschätzt werden muss, verwenden wir zur Bestimmung des Konfidenzintervalls die Student-t-Verteilung. Das Konfidenzintervall ist gegeben durch:

$$\left[x_M - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}, x_M + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Nun ist $x_M \approx 21.482$,

$$1-\frac{\alpha}{2} = 0.995,$$

$$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{10;0.995} = 3.169,$$

und $s = 4.97$, womit wir für das Konfidenzintervall somit

$$[16.733; 26.231]$$

erhalten.

Übungsaufgabe 14.3
Bei einem Versuch wird die Reaktionszeit von 63 zufällig ausgewählten Probanden auf ein bestimmtes visuelles Signal gemessen. Die hierbei ermittelte durchschnittliche Reaktionszeit der Testpersonen lag bei 0.78 Sekunden. Geben Sie unter der Annahme, dass die Zufallsvariable, die die Reaktionszeit beschreibt, ungefähr normalverteilt mit einer Varianz von 0.04 ist, ein 99%iges (95%iges) Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Zufallsvariablen an.

Lösung 14.3
Die Formel für das Konfidenzintervall ist gegeben durch:

$$\left[x_M - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, x_M + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Der Stichpropbenumfang ist in unserem Fall durch $n = 63$ gegeben. Für das 99%ige Konfindenzintervall erhalten wir somit

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0.995} = 2.575.$$

Damit haben wir nun das 99%ige Konfidenzintervall:

$$\left[0.78-2.575\frac{0.04}{\sqrt{63}};0.78+2.575\frac{0.04}{\sqrt{63}}\right]\approx[0.767;0.79298].$$

Für das 95%ige Konfindenzintervall erhalten wir somit

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}}=z_{0.975}=1.96.$$

Damit haben wir nun das 95%ige Konfidenzintervall:

$$\left[0.78-1.96\frac{0.04}{\sqrt{63}};0.78+1.96\frac{0.04}{\sqrt{63}}\right]\approx[0.77;0.78988].$$

15 Testen von Hypothesen/Ein-Stichproben-Tests

Übersicht

Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 15.1
Für die Samen einer in Gartencentern erhältlichen Radieschensorte garantiert der Produzent der Samentütchen eine Keimfähigkeit von mindestens 85 %. Bei einer Stichprobe keimen von $n = 45$ *Radieschensamen* 38*. Liegt eine signifikante Abweichung zu der garantierten Keimfähigkeit vor? Überprüfen Sie die Frage auf dem Signifikanzniveau* $\alpha = 5$ *%.*

Lösung 15.1
Die Nullhypothese H_0 und die Gegenhypothese H_1 lauten in diesem Fall:

$$H_0\colon p \geq 0.85 = p_0 \text{ und } H_1\colon p < 0.85.$$

Als Schätzwert für p haben wir $x_M = \frac{38}{45}$. Der Stichprobenumfang ist gegeben durch $n = 45$. Für diesen einseitigen Test benötigen wir den Wert $z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.65$. Die Nullhypothese wird angenommen, wenn:

$$x_M \geq p_0 - z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

erfüllt ist. Da

$$\frac{38}{45} \geq 0.85 - 1.65 \cdot \sqrt{\frac{0.85 \cdot 0.15}{45}}$$

gilt, können wir somit die Nullhypothese annehmen.

Übungsaufgabe 15.2
Die Verpackung einer hier nicht näher spezifizierten Zigarettensorte weist einen mittleren Nikotingehalt von 0.9 *mg pro Zigarette aus. In einem Test wird nun eine Stichprobe von 200 Zigaretten getestet. Bei diesem Test ergibt sich ein mittlerer Nikotingehalt von* 0.7 *mg*

und eine Standardabweichung von 0.1 *mg. Ist nun bei einem 1%igem Signifikanzniveau der Schluss zulässig, dass der tatsächliche Nikotingehalt im Mittel unter* 0.9 *mg liegt?*

Lösung 15.2

Die Nullhypothese H_0 und die Gegenhypothese H_1 für den hier durchzuführenden Test lauten:

$$H_0\colon \mu \leq 0.9 = \mu_0 \text{ und } H_1\colon \mu > 0.9.$$

Der Stichprobenumfang beträgt in dieser Aufgabe $n = 200$. Des Weiteren kennen wir das Stichprobenmittel $x_M = 0.7$ und die Standardabweichung $\sigma = 0.1$. Für diesen Test und bei einem Signifikanzniveau von einem Prozent benötigen wir den Wert $z_{1-\alpha} = z_{0.99} = 2.325$. Die Nullhypothese wird angenommen, wenn:

$$x_M \leq \mu_0 + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

erfüllt ist. Da nun

$$0.7 \leq 0.9 + 2.325 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{200}}$$

gilt, können wir somit die Nullhypothese annehmen.

Übungsaufgabe 15.3

Bei einem Experiment soll genau eins der drei möglichen disjunkten Ergebnisse E_1, E_2 und E_3 eintreten. Nach 600-maliger Durchführung des Experiments trat das Ereignis E_1 insgesamt 83-mal, das Ereignis E_2 insgesamt 192-mal und das Ereignis E_3 insgesamt 325-mal ein. Die Behauptung, dass die Ereignisse mit einer Wahrscheinlichkeit von $1:2:3$ *eintreten, soll mithilfe eines χ^2-Tests und einer Signifikanz von $\alpha = 1$ % überprüft werden. Führen Sie den gewünschten χ^2-Test durch.*

Lösung 15.3

Die Testgrösse ist diesem Fall gegeben durch

$$\begin{aligned} T_{\chi^2} &= \frac{(83 - 600 \cdot \frac{1}{6})^2}{600 \cdot \frac{1}{6}} + \frac{(192 - 600 \cdot \frac{2}{6})^2}{600 \cdot \frac{2}{6}} + \frac{(325 - 600 \cdot \frac{3}{6})^2}{600 \cdot \frac{3}{6}} \\ &= \frac{397}{75}. \end{aligned}$$

Die Vergleichsgrösse ist mit $\chi^2_{2;0.99} = 9.21$ gegeben. Da

$$T_{\chi^2} < \chi^2_{2;0.99}$$

gilt, kann die Nullhypothese, dass die Ereignisse mit einer Wahrscheinlichkeit von $1:2:3$ eintreten, angenommen werden.

Übungsaufgabe 15.4

Schwanken die nachstehenden Geburtenzahlen für die Stadt Köln in den 12 Monaten des Jahres 2006 nur zufallsbedingt oder signifikant?

Monat	Jan.	Feb.	Mär.	Apr.	Mai	Jun.
Anzahl	510	578	911	616	931	774
Monat	Jul.	Aug.	Sep.	Okt.	Nov.	Dez.
Anzahl	841	799	870	848	749	1107

Lösung 15.4

Die Nullhypothese in dieser Aufgabe lautet:

Die Schwankungen sind nicht signifikant.

Das Signifikanzniveau ist somit, wie im Buch erwähnt, durch

$$\alpha = 0.05 = 5\%$$

gegeben. Die Nullhypothese besagt, dass die Geburten in den 12 Monaten eines Jahres gleichverteilt sind, also theoretisch pro Monat 794.5 Geburten vorkommen. Somit ergibt sich als Testgrösse der Wert:

$$\begin{aligned}
T_{\chi^2} &= \frac{(510-794.5)^2}{794.5} + \frac{(578-794.5)^2}{794.5} + \frac{(911-794.5)^2}{794.5} + \frac{(616-794.5)^2}{794.5} \\
&\quad + \frac{(931-794.5)^2}{794.5} + \frac{(774-794.5)^2}{794.5} + \frac{(841-794.5)^2}{794.5} + \frac{(799-794.5)^2}{794.5} \\
&\quad + \frac{(870-794.5)^2}{794.5} + \frac{(848-794.5)^2}{794.5} + \frac{(749-794.5)^2}{794.5} + \frac{(1107-794.5)^2}{794.5} \\
&= 381.0837003
\end{aligned}$$

Die Vergleichsgrösse $\chi^2_{11;0.95} = 19.67$ ist offenbar (sehr viel) kleiner als die Testgrösse, weshalb wir die Nullhypothese verwerfen müssen. Die Schwankungen sind also zufallsbedingt.

Übungsaufgabe 15.5

Wir wollen die Hypothese, dass bei einem Münzwurf „Kopf” und „Zahl“ die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen, unter Benutzung einer Stichprobe von 80 Würfen, unter denen 37-mal „Kopf“ geworfen wurde, überprüfen. Kann die Hypothese auf einem Signifikanzniveau von 5 % angenommen werden?

Lösung 15.5

Die Nullhypothese „$H_0 : p = 0.5 (= p_0)$“, muss in diesem Fall mithilfe einer zweiseitigen Alternative überprüft werden, d.h. die Gegenhypothese lautet in diesem Fall „$H_1 : p \neq 0.5$“. Die Grundgesamtheit ist Bernoulli-verteilt, mit dem Parameter p, und der Stichprobenumfang ist mit 80 Würfen hinreichend groß, denn

$$n \cdot p(1-p) = 80 \cdot 0.5^2 = 20 > 9.$$

Die Nullhypothese wird angenommen, wenn

$$p_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}} \leq x_M \leq p_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}}$$

gilt. Wir ermitteln nun wieder die fehlenden Werte und erhalten:

$$x_M = \frac{37}{80},\ p_0 = 0.5,\ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975,\ z_{0.975} = 1.96.$$

Somit ist also zu überprüfen, ob die Ungleichung:

$$0.3904 \approx 0.5 - 0.049\sqrt{5} \leq \frac{37}{80} \leq 0.5 + 0.049\sqrt{5} \approx 0.6095$$

erfüllt ist oder nicht. Da diese Ungleichung offensichtlich gilt, können wir die Nullhypothese somit annehmen.

Literaturverzeichnis

[Bohl 2001] E. Bohl: *Mathematik in der Biologie*. 2. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2001).

[Eurostat 2007] Statistisches Amt der Europäischen Gemeinschaften (Erostat) `http://epp.eurostat.ec.europa.eu/`.

[Landesamt für Datenverarbeitung und Statistik NRW 2007] Landesamt für Datenverarbeitung und Statistik Nordrhein-Westfalen `http://www.lds.nrw.de`

[Statistisches Bundesamt 1996] Statistisches Bundesamt: *Statistisches Jahrbuch 1996*. `http://www.statistik-bund.de`

[UN 2007] Vereinte Nationen (UN) `http://unstats.un.org/unsd/demographic/`