Notizen zum Sondertutorium vom 03.07.2020

1) Unterscheidung: Liegt eine stetige oder eine diskrete Zufallsvariable vor?

<u>Bsp:</u> a) diskrete Zufallsvariable: Augenzahl bei Würfelwurf

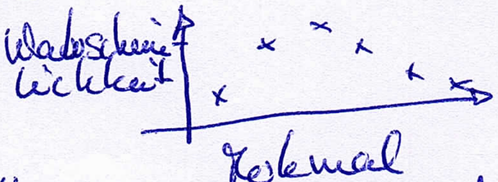
b) stetige Zufallsvariable: z.B. Körpergewicht

Bei einer diskreten Zufallsvariablen hat man eine diskrete Dichte-Funktion, die nur für die diskreten Merkmalsausprägungen definiert ist.

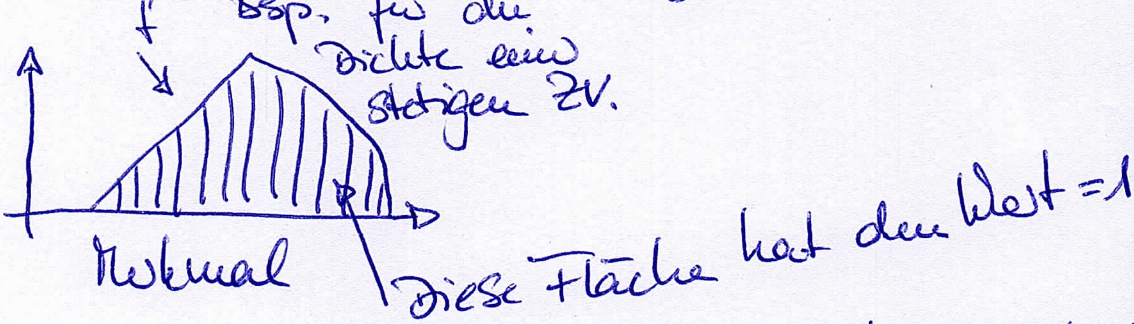
Für diese Dichte muss gelten:

$f(x_i) \geq 0$ für jede Merkmalsausprägung x_i

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = 1$$



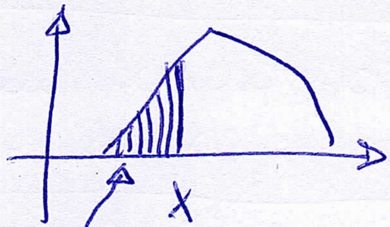
Bei einer stetigen Zufallsvariablen ist die Dichtefunktion f eine stetige Funktion, für die $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ gilt.



Wenn man eine stetige ZV und ihre stetige Dichte f gegeben hat, so ist durch

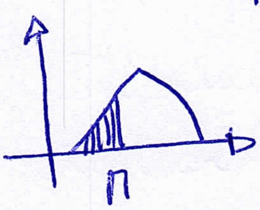
$\int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds = F(x)$ die sogenannte stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$$



Die Wahrscheinlichkeit, das eine Zufallsvariable eine Realisation mit dem Wert π nicht überschreitet, ist

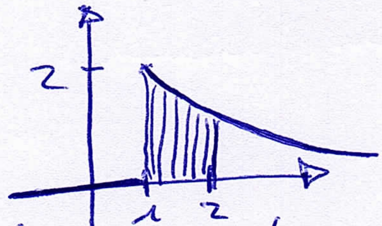
$$P(X \le \pi) = 1 - P(X > \pi) = \int_{-\infty}^{\pi} f(s)\,ds$$



$$= 1 - \int_{\pi}^{\infty} f(s)\,ds$$

2) <u>Aufgabe 1 der 9. Übung:</u>

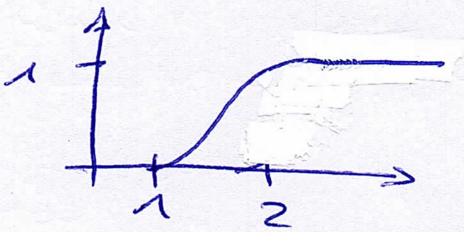
$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 1 \\ \frac{2}{t^3} & , t \ge 1 \end{cases}$$



Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung

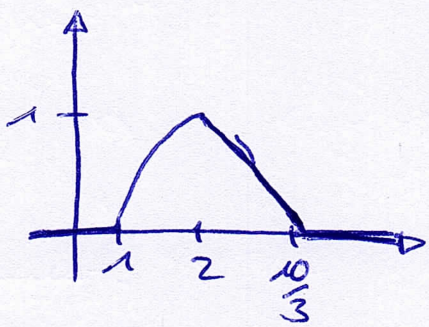
$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds$$

$$F(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0\,ds = 0 & , t < 1 \\ \int_{1}^{t} \frac{2}{s^3}\,ds = -\frac{1}{s^2}\Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t^2} & , t \ge 1 \end{cases}$$



3) <u>Aufgabe 3 der 9. Übung</u>

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 1 \\ (x-1)^2 & , 1 \le x \le 2 \\ -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} & , 2 \le x \le \frac{10}{3} \\ 0 & , x \ge \frac{10}{3} \end{cases}$$



Die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist gegeben durch $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,ds = 0 \,, & x \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{1} 0\,ds + \int_{1}^{x} (s-1)^2\,ds = \frac{1}{3}(x-1)^3 \,, & 1 \leq x \leq 2 \\ \int_{-\infty}^{1} 0\,ds + \int_{1}^{2} (s-1)^2\,ds + \int_{2}^{x} -\frac{3}{4}s + \frac{5}{2}\,ds = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{19}{6} & \\ \int_{-\infty}^{1} 0\,ds + \int_{1}^{2} (s-1)^2\,ds + \int_{2}^{10/3} -\frac{3}{4}s + \frac{5}{2}\,ds + \int_{10/3}^{\infty} 0\,ds = 1 & \end{cases}$$

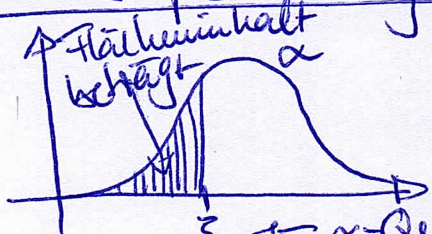
4) <u>Aufgabe 4 der 9. Übung</u>

$$f(r) = \begin{cases} 0 \,, & r < 0 \\ \frac{1}{\mu} e^{-\frac{r}{\mu}} \,, & r > 0 \end{cases}$$

$$F(r) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{r} 0\,ds = 0 \,, & r < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,ds + \int_{0}^{r} \frac{1}{\mu} e^{-s/\mu}\,ds = 1 - e^{-\frac{r}{\mu}} \,, & r > 0 \end{cases}$$

5) <u>Quantile für stetige Zufallsvariable</u>

Dichte



ξ_α ← α-Quantil der ZV, d.h.

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\xi_\alpha} f(s)\,ds = F(\xi_\alpha) = P(X \leq \xi_\alpha)$$

Das α-Quantil der ZV ist also die Realisation der ZV, bis zu der die Dichte eine Fläche mit dem Wert α eingeschlossen hat.

Bsp zur Bestimmung des α-Quantils in Aufgabe 3.

$$0{,}75 = \int_{-\infty}^{\xi_{0,75}} f(s)\,ds = F(\xi_{0,75})$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}75 = -\frac{3}{8}\xi_{0,75}^2 - \frac{5}{2}\xi_{0,75} - \frac{19}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{4} = -\frac{3}{8}\xi_{0,75}^2 - \frac{5}{2}\xi_{0,75} - \frac{19}{6}$$

Diese Gleichung muss nun nach $\xi_{0,75}$ aufgelöst werden.

Bsp. 25%-Quantil in Aufgabe 4

$$0{,}25 = \int_{-\infty}^{\xi_{0,25}} f(s)\,ds$$

$$= 1 - e^{-\frac{\xi_{0,25}}{\mu}}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}75 = e^{-\frac{\xi_{0,25}}{\mu}}$$

$$\Rightarrow -\frac{\xi_{0,25}}{\mu} = \ln(3) - \ln(4)$$

$$\Rightarrow \xi_{0,25} = \mu \ln(4) - \mu \ln(3) = \mu\left(\ln(4) - \ln(3)\right)$$

$$= \mu \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

6) Aufgabe 5 der 9. Übung

W. für Kopf beträgt 70% = 0,7

" " Zahl " 30% = 0,3

Die Münze wird 50-mal geworfen.

Die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung ist eine Bernoulli-Verteilung der Form

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$ bzw. in unserer Aufgabe

$$\binom{50}{k} 0{,}3^k\, 0{,}7^{50-k} \quad (= P(X=k))$$

Weiter gilt: $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{50}{i} 0{,}3^i\, 0{,}7^{50-i}$.

höchstens k-mal.