

Partielle Ableitungen

Bsp: $f(x,y) = x^2 + 6x \cdot y$

1. Ableitung: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 6y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x$

Bsp: $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$

1. Ableitung: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}$

2. Ableitung: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{y}\right)^2 e^{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} + \frac{x^2}{4} e^{\frac{x}{y}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} = -\left(\frac{1}{y^2} + \frac{x}{y^3}\right) e^{\frac{x}{y}}$$

Verallgemeinerte Kettenregel

Bsp: $f(x,y) = x^2 + 6x \cdot y$ mit $x(t) = \cos(t)$
und $y(t) = \sin(t)$

„1. Weg“: Setze $x(t)$ & $y(t)$ in die Funktion f ein.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x(t), y(t)) &= (x(t))^2 + 6x(t)y(t) \\ &= (\cos(t))^2 + 6\cos(t)\sin(t) \end{aligned}$$

Dies ist eine Funktion der Variablen t und kann „normal“ abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) &= 2\cos(t) \cdot (-\sin(t)) \\ &\quad + 6\cos(t) \cdot \cos(t) - 6\sin(t)\sin(t) \\ &= -2\cos(t)\sin(t) + 6\cos^2(t) - 6\sin^2(t) \end{aligned}$$

2. Weg: $f(x,y) = x^2 + 6xy$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 6y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \underbrace{(2x(t) + 6y(t))}_{\frac{\partial f}{\partial x}} \frac{dx}{dt} + \underbrace{6x(t)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} \frac{dy}{dt}$$

$$= (2\cos(t) + 6\sin(t)) \cdot (-\sin(t)) + 6\cos(t)\cos(t)$$

$$= -2\cos(t)\sin(t) - 6\sin^2(t) + 6\cos^2(t)$$

2. Übung Aufgabe 5a) mündlich

Sei $z = f(x,y) = \sqrt{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right)$.

Zu zeigen ist, dass

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2} \quad \text{ist.}$$

Beweis: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y \cdot \sqrt{x}}{x^2} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y \cdot \sqrt{x}}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\& y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2} z \end{aligned}$$

Normalenform der Tangentialebene

-3-

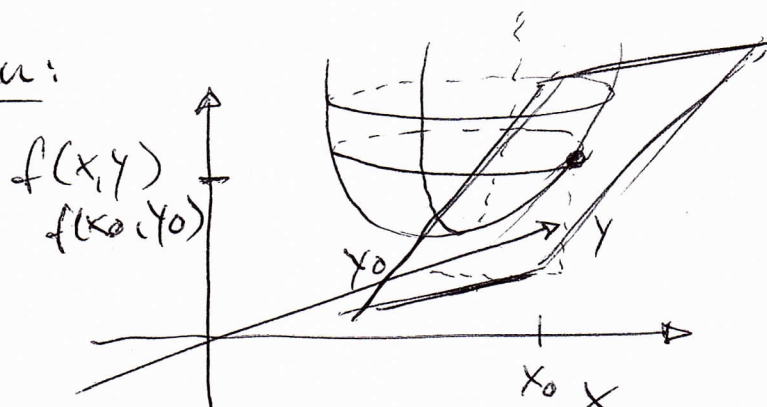
Die Parameterform der Tangentialebene
eine Funktion in einem Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
ist durch

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

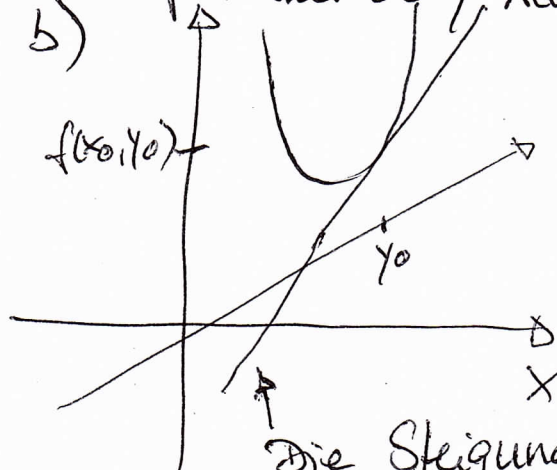
gegeben.

Skizzen:

a)

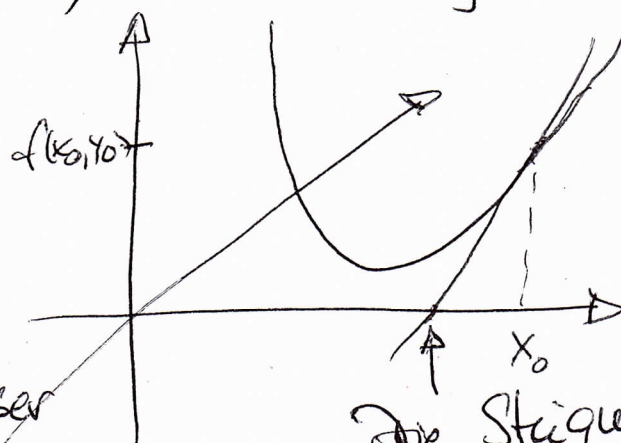


b) Schnitt entlang x_0
parallel zu y -Achse



Die Steigung dieser
Geraden ist die
Funktion in (x_0, y_0) nach
 y abgeleitet.

c)



Schnitt entlang y_0
entlang der x -Achse

Die Steigung
dieser Geraden ist
die Funktion in
 (x_0, y_0) nach x abgeleitet.

Aus der Parameterform kann man nun die Normalen-
form der Tangentialebene wie in der Definition der
Vorlesung herleiten.

Differentialgleichungen

-4-

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'(t) = 3y(t)$$

hat als Lösung die Funktion $y(t) = \text{const.} \cdot e^{3t}$.

Diese Lösung findet man mit der Methode der Trennung der Variablen.

$$y'(t) = 3y(t)$$

$$\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = 3$$

$$\Rightarrow \underset{\text{Integration}}{\ln(y(t)) - C_1} = 3t$$

$\uparrow$ Integrationskonstante

$$\Rightarrow \ln(y(t)) = 3t + C_1$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{3t + C_1} = \text{const} \cdot e^{3t}$$

wobei die Konstante durch e^{C_1} gegeben ist.

Basierend auf den Überlegungen einer einzelnen Differentialgleichung dieser Form sieht man, dass der Ansatz $\vec{y}(t) = (\text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda) \cdot e^{\lambda t}$

$$= \vec{v} e^{\lambda t}$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}'(t) = A \cdot \vec{y}(t) \text{ liefert, da}$$

$\vec{y}'(t) = \lambda \cdot \vec{v} e^{\lambda t}$ ist und $A \vec{y}(t) = \lambda \vec{v} e^{\lambda t}$ gilt, da $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A sein soll.

-5-

Da dies aber für alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A gilt, erhält man die allgemeine Lösung des (homogenen) Differentialsystems $\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t)$, in dem man die Eigenwerte von A und die dazugehörigen Eigenvektoren bestimmt und dann die entsprechenden Lösungen der obigen Form aufaddiert.

Bsp: $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}(t)$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow A \text{ hat die Eigenwerte } \lambda_1 = 1 \text{ \& } \lambda_2 = 2.$$

Die dazugehörigen Eigenvektoren lauten

$$\vec{v}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet somit:

$$\vec{y}(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$