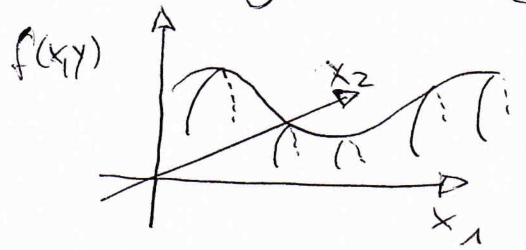
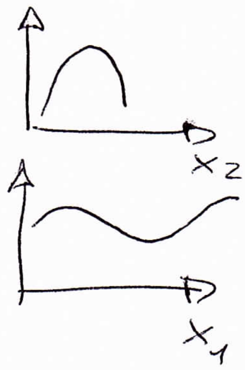
Notizen aus dem Zusatztutorium vom 15.05.2020

1.) Richtungsableitungen



x_2-Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

x_1-Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



Die Richtungsableitung der Funktion f in Richtung $\vec{v}$ ist als Skalarprodukt des Gradienten von f mit $\vec{v}$ definiert.

Der Gradient von f ist gegeben als

$$Df(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle Df(x_1,x_2) ; \vec{v} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v_2$$

Somit ist die partielle Ableitung nach x_1 die Richtungsableitung der Funktion f in $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$-Richtung:

$$\langle Df(x_1,x_2) ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

Analog ist die Richtungsableitung in $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$-Richtung die partielle Ableitung der Funktion f bzgl. x_2.

Wenn man nun diese Ableitungen in einem konkreten Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ bestimmen will, so ist dieser Punkt in die im Gradienten gegebenen Ableitungen zu setzen und das Skalarprodukt zu berechnen.

Bsp.: $f(x,y) = y \cdot e^{x^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot y \cdot e^{x^2} \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2}$$

Die Richtungsableitung in Richtung $\vec{v}$ ist somit

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot v_2 = 2x \cdot y\, e^{x^2} \cdot v_1 + e^{x^2} \cdot v_2$$

Ist $\vec{v}$ z.B. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und soll die Richtungsableitung im Punkt $(2,5)$ bestimmt werden, so erhalten wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(2,5) \cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(2,5) \cdot 4$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot e^{2^2} \cdot 3 + e^{2^2} \cdot 4$$
$$= 20 \cdot e^4 \cdot 3 + e^4 \cdot 4 = 64 \cdot e^4$$

2.) Tangentialebene zur ~~f.~~ Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y^3 + 6x^2 - 12xy - 8$ im Punkt $(-1,1)$

<u>Definition aus der Vorlesung</u>: Die Tangentialebene in p ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - f(p) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ -\frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

Es gilt: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 12x - 12y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = 12 \cdot (-1) - 12 \cdot 1 = -24$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3y^2 - 12x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot (-1) = 15$

und $f(p) = 1^3 + 6(-1)^2 - 12 \cdot 1 \cdot (-1) - 8 = 11$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x_1 - (-1) \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 11 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 24 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 24(x_1 + 1) + 15(x_2 - 1) + x_3 - 11$$
$$= 24x_1 + 15x_2 + x_3 - 2 = 0$$

3.) Aufgabe 1c) der 2. Übung

Z.z.: Für $z = f(x,y) = e^{x/y}$ gilt: $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$

Bew.: Es gilt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x/y}\right) = \frac{1}{y} e^{x/y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x/y}\right) = -\frac{x}{y^2} e^{x/y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2} e^{x/y}\right)$$

$$= -\frac{1}{y^2} e^{x/y} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{y} e^{x/y}$$

$$= \left(-\frac{1}{y^2} - \frac{x}{y^3}\right) e^{x/y}$$

$$\Rightarrow y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y \cdot \left(-\frac{1}{y^2} - \frac{x}{y^3}\right) e^{x/y}$$

$$= \left(-\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) e^{x/y} = -\frac{1}{y} e^{x/y} - \frac{x}{y^2} e^{x/y}$$

$$= -\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$$

4.) Aufgabe 3) der 2. Übung

Z.z.: Für $p = R \cdot T / V$ ist

$$S = S_0 + C_p \cdot \ln(T) - R \cdot \ln(p) \quad (1)$$

gleich $S_0 + (C_p - R) \cdot \ln(T) + R \ln(V/R)$.

Bew.: Wir setzen $p = R \cdot T / V$ in (1) ein.

$$\Rightarrow \quad S_0 + C_p \ln(T) - R \ln(R \cdot T / V) = S$$

Die Logarithmengesetze führen nun auf:

$$S_0 + C_p \ln(T) - R \cdot \ln(R \cdot T/V)$$
$$= S_0 + C_p \ln(T) - R \cdot (\ln(R) + \ln(T) + \ln(1/V))$$
$$= S_0 + (C_p - R) \ln(T) - R(\ln(R) + \ln(1/V))$$
$$= S_0 + (C_p - R) \ln(T) - R(\ln(R) - \ln(V))$$
$$= S_0 + (C_p - R) \ln(T) - R \ln(R) + R \ln(V)$$
$$= S_0 + (C_p - R) \ln(T) + R \ln(1/R) + R \ln(V)$$
$$= S_0 + (C_p - R) \ln(T) + R(\ln(V/R))$$
$$= S_0 + (C_p - R) \ln(T) + R \ln(V/R)$$

Daher gilt auch:

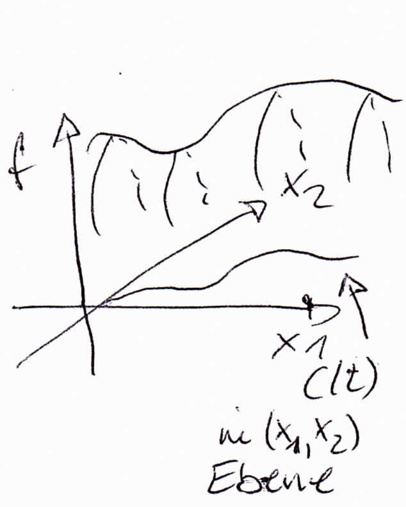
$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial}{\partial T}\left(S_0 + C_p \ln(T) - R \ln(p)\right) = \frac{C_p}{T}$$

und

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{\partial}{\partial T}\left(S_0 + (C_p - R) \ln(T) + R \ln(V/R)\right) = \frac{(C_p - R)}{T}$$

5.) Aufgabe 1 iii) der 3. Übung

z.z.: $\frac{d}{dt} f(c(t)) = (D_{c'(t)} f)\, c(t) = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(c(t)) \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle$



d.h. die Richtungsableitung der Funktion f in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix}$ ist durch die verallgemeinerte Kettenregel gegeben.

Wobei in der Aufgabe $f(x,y) = y \cdot e^{x^2}$ und $c(t) = (\sin(t); 3t+2)$ seien.

Bew:

a) $f(c(t)) = (3t+2)\, e^{(\sin(t))^2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(c(t)) = 3 \cdot e^{(\sin(t))^2} + (3t+2) \cdot 2 \sin(t) \cos(t) e^{(\sin(t))^2}$$

$$= (3 + 2 \cdot (3t+2) \sin(t) \cos(t)) \cdot e^{(\sin(t))^2}$$

Weiter ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t)) = 2 \cdot \sin(t) \cdot (3t+2)\, e^{(\sin(t))^2}$$

& $$\frac{\partial f}{\partial x_2}(c(t)) = e^{(\sin(t))^2}$$

sowie $$c'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t)) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(c(t)) \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= 2 \cdot \sin(t) \cos(t) (3t+2) e^{(\sin(t))^2} + 3 e^{(\sin(t))^2}$$

An der Stelle $t = 0$ gilt:

$$\frac{df}{dt}(c(t))\Big|_{t=0} = 3 \quad \text{und}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(c(t))\big|_{t=0} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(c(t))\big|_{t=0} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \cos(0) \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = \underline{\underline{3}}$$

6.) Aufgabe 4a) der 3. Übung

$\Delta x = \bar{x} - x$ absoluter Fehler

$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\bar{x}}{x} - 1$ relativer Fehler

Für Funktionen $y = f(x)$ gilt:

$$\Delta y \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x) \cdot \Delta x$$

Für Funktionen mehrerer Variablen gilt, dass der maximale absolute Fehler die Summe der Beträge der absoluten Fehler bzgl. der einzelnen Variablen ist, d.h. z.B. für $z = f(x,y)$

$$\Delta z_{max} \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|$$

In der Aufgabe ist $A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin(\theta)$ mit $a = 10\,m$; $b = 12{,}2\,m$; $\bar{a} = 10{,}2\,m$; $\bar{b} = 12{,}35\,m$ und $\theta = 65{,}1°$

$\Rightarrow \Delta a = 0{,}2$; $\Delta b = 0{,}15$ & $\bar{\theta} = \theta \cdot 1{,}013 = 65{,}9574°$