Notizen zum Zusatztutorium vom 22.05.2020

1. Extremwerte unter Nebenbedingungen

4. Übung Aufgabe 2a:

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4$

Gesucht sind die Maxima und Minima der Funktion auf dem Gebiet $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

Die Lagrange-Multiplikatoren-Methode sieht vor, dass man die Hilfsfunktion $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y)$ auf kritische Stellen untersucht, d.h. man sucht die x, y und λ für die

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

und $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -\varphi(x,y) = 0$ gilt.

Somit suchen wir die Lösungen des Gleichungssystems

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 2 - 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\lambda y = 0 \quad (2) \Rightarrow \lambda = 1 \text{ oder } y = 0$$

$\lambda = 1$ führt mit (1) aber zu einem Widerspruch, d.h. $\lambda \neq 1$ & $y = 0$!

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad (3)$$

Einsetzen von $y = 0$ in (3) führt auf $x_1 = -2$ & $x_2 = 2$.

Einsetzen dieser Werte in (1) liefert $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ & $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

Alternativ kann man die Gleichung

$$\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4=0$$

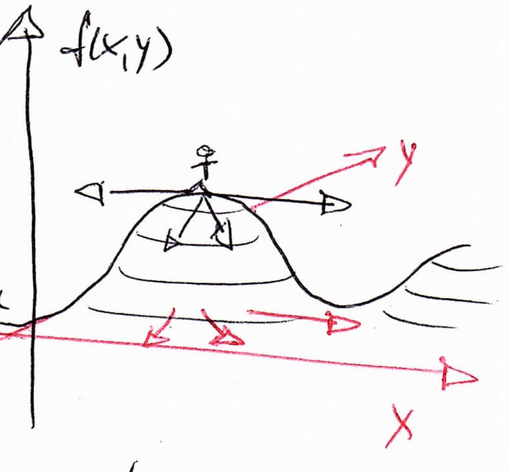
nach y oder x auflösen und dies in die Funktion f einsetzen.

So führt $y^2 = 4-x^2$ auf $f(x, \sqrt{4-x^2}) = -2x+8$

Da f auf K betrachtet wird und $f(x, \sqrt{4-x^2})$ als Gerade das Maximum und das Minimum auf dem Rand annehmen, folgt $x=-2$ oder $x=2$

$\Rightarrow f(2,0)=4 \leftarrow$ Minimum & $f(-2,0)=12$ Maximum.

2. Richtungsableitungen anhand der Aufgabe 1(ii) & (iii) der 3. Übung



Die „x-Komponente" der „Steigung" der Funktion f ist durch $\frac{\partial f}{\partial x}$ gegeben und analog die „y-Komponente" durch $\frac{\partial f}{\partial y}$. Der Gradient der Funktion f ist durch $\nabla f(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ gegeben.

Um die Steigung in der „richtigen" Richtung zu finden, bildet man das Skalarprodukt des Gradienten mit dem die Richtung beschreibenden Vektor.

D.h. $\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(p) ; \vec{v} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2$

„Blickrichtung"

Der Punkt, in dem man sich befindet

$\boxed{\text{Dies ist die Ableitung der Funktion in Richtung } \vec{v}!}$

1(i): $\frac{\partial f}{\partial x} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} ; \vec{v}_1 \right\rangle$ Wie sieht in diesem Fall $\vec{v}_1$ aus?

z.B. Lösung ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2 \Rightarrow v_1 = 1 \,\&\, v_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analog folgt $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} w_1 + \frac{\partial f}{\partial y} w_2 \Rightarrow \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1(iii): $f(x,y) = y \cdot e^{x^2}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $p = (0,2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot y \cdot e^{x^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}(p) ; \vec{v} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) = -1$$

3. Offene Fragen

Aufgabe 4 der 4. Übung

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla g(x)$ der Funktion

$$g(x) = x_1^2 + 4x_2 \cos(x_3)$$

Lsg: $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1$; $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 4\cos(x_3)$; $\frac{\partial g}{\partial x_3} = 4x_2(-\sin(x_3))$
$= -4x_2 \sin(x_3)$

$\rightarrow \nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 4\cos(x_3) \\ -4x_2 \sin(x_3) \end{pmatrix}$ im Punkt $(0,0,0)$ ist der Gradient somit $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) v sei ein Einheitsvektor (d.h. $\|v\| = 1$).

Der Anstieg von f in Richtung v im Punkt x wird mit $D_v f(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+tv)$ gegeben.

z.z.: $D_v f(x) = \langle \nabla f(x); v \rangle$

Bew: (analog zu Aufgabe 1(iii) der 3. Übung)

$$f(x+t\cdot v) = f(x_1 + t v_1; \dots, x_n + t v_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x+tv) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n\right](x+t\cdot v)$$

$$\langle \nabla f; v \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n$$

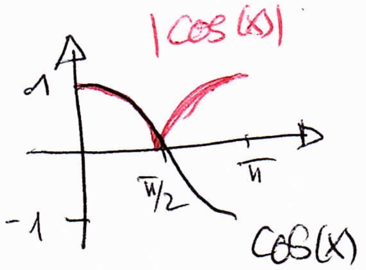
für $t = 0$ sind diese Ausdrücke gleich.

c) Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt laut Vorlesung

$$\cos \measuredangle (v,w) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|}, \quad \text{mit } \measuredangle(v,w) \in [0, \pi]$$

z.z.: $\langle v, w \rangle \le \|v\| \, \|w\|$

Bew: Es gilt: $\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \measuredangle (v,w)$



$$\underset{\measuredangle(v,w) \in [0,\pi]}{\Rightarrow} \quad \langle v, w \rangle \le \|v\| \, \|w\| \cdot \underbrace{|\cos \measuredangle (v,w)|}_{\le 1}$$

$$\le \|v\| \cdot \|w\|$$

d) Sei $\nabla f(x) \neq 0$ und $w = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$; d.h. $\|w\| = 1$.

z.z.: Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs, wobei $D_v f(x) \le D_w f(x)$ gilt.

Bew:

$$D_v f(x) = \langle \nabla f; v \rangle = \|\nabla f\| \cdot \underbrace{\|v\|}_{=1} \cdot \cos \measuredangle (\nabla f, v) \overset{4c)}{\le} \|\nabla f\| \, \|v\| = \|\nabla f\|$$

$$= \left\langle \nabla f, \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right\rangle = D_w f(x) \quad \square$$

4e) Was ist die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion g aus (a) im Punkt (0,0,0)?

$$g(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_2\cos(x_3)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 2x_1 \; ; \; \frac{\partial g}{\partial x_2} = 4\cos(x_3) \; ; \; \frac{\partial g}{\partial x_3} = -4x_2\sin(x_3)$$

$$\Rightarrow \nabla g(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \; \& \; \|\nabla g\| = \sqrt{16} = 4$$

$$w = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Richtung mit dem steilsten Anstieg}$$