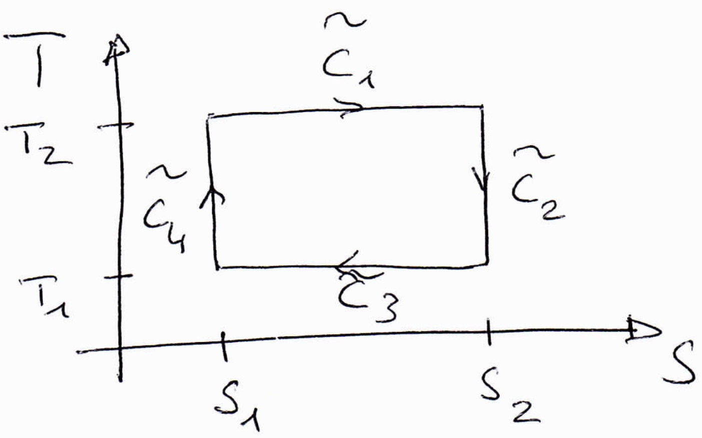
Notizen zum Zusatztutorium vom 29.05.2020

1.) Aufgabe 2 der 5. Übung



a) $\tilde{c}_1$ = Der Weg auf der Höhe T_2 von (S_1, T_2) nach (S_2, T_2)

$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$ = „Startpunkt" $\begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix}$ = „Endpunkt."

Die Gerade, die diese beiden Punkte enthält ist durch

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} S_2 - S_1 \\ T_2 - T_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Da $\tilde{C}_1$ nur von (S_1, T_2) bis (S_2, T_2) führen soll muss $t \in [0,1]$ sein, d.h. $0 \leq t \leq 1$

$$\Rightarrow \tilde{c}_1 = \begin{pmatrix} S_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} S_2 - S_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit}$$

$0 \leq t \leq 1$

Analog ist $\tilde{C}_2$ = Der Weg von (S_2, T_2) nach (S_2, T_1).

Die Gerade, die $\tilde{C}_2$ enthält ist somit durch

$$\begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} S_2 - S_2 \\ T_1 - T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2 \\ T_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ T_1 - T_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit nur $\tilde{C}_2$ beschrieben wird, muss $0 \leq t \leq 1$ gelten.

b) Berechnen Sie $\oint dQ$ als Summe der einzelnen Wegintegrale.

In der Aufgabenstellung steht:

$$\oint dQ = \oint (T\,dS + 0\,dT) = \oint \left\langle \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dS \\ dT \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \oint T\,dS = \sum_{j=1}^{4} \int_{\tilde{C}_j} T\,dS$$

$$= \int_{\tilde{C}_1} T\,dS + \int_{\tilde{C}_2} T\,dS + \int_{\tilde{C}_3} T\,dS + \int_{\tilde{C}_4} T\,dS$$

$$= \underbrace{\int_0^1 T_2 (S_2 - S_1)\,dt}_{= \int_{\tilde{C}_1} T\,dS} + \underbrace{\int_0^1 T_1 (S_1 - S_2)\,dt}_{= \int_{\tilde{C}_3} T\,dS}$$

c) $\eta := \dfrac{-\oint dW}{\int_{c_1} dQ} = \dfrac{\oint dQ}{\int_{c_1} dQ}$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nach Teil b)}}}{=} \dfrac{\int_0^1 T_2(S_2-S_1)\,dt + \int_0^1 T_1(S_1-S_2)\,dt}{\int_0^1 T_2(S_2-S_1)\,dt}$

$= 1 + \dfrac{\int_0^1 T_1(S_1-S_2)\,dt}{\int_0^1 T_2(S_2-S_1)\,dt}$

2.) Bsp. zu Wegintegrale für Differentialformen

Gegeben: Diff-Form $\omega = (x^2-y)\,dx + (y^2+x)\,dy$ auf $\mathbb{R}^2$ und der Weg $c: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto c(t) = (t, t+1)$

$\int_c \omega = ?$

Das zu ω gehörende Vektorfeld ist durch $f(x,y) = (x^2-y;\ y^2+x)$ gegeben. Für $r=(x,y)$ ist $\omega = \langle f(r), dr\rangle$

$\Rightarrow \int_c \omega = \int_c \langle f(r); dr\rangle \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 \langle f(c(t)), c'(t)\rangle\,dt$

Folgt aus den Überlegungen zur allgemeinen Kettenregel

$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2-(t+1) \\ (t+1)^2+t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, da $c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ & $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y \\ x+y^2 \end{pmatrix}$

Somit ist

$$\int_C \omega = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2-(t+1) \\ (t+1)^2+t \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \int_0^1 (t^2-(t+1)) + ((t+1)^2+t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t^2-(t+1)+t^2+2t+1+t\,dt$$

$$= \int_0^1 t^2-t-1+t^2+2t+1+t\,dt$$

$$= \int_0^1 2t^2+2t\,dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}+\frac{2}{2} = \frac{2}{3}+1 = \frac{5}{3}$$