Notizen zum Zusatztutorium vom 12.06.2020

1.) 6. Übung Aufgabe 1

$\omega(x,y) = p(x,y)dx + q(x,y)dy$

ω ist ein totales Differential, wenn

$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ gilt, d.h., dass es eine Funktion $f(x,y)$ mit $\frac{\partial f}{\partial x} = p$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = q$ sowie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ gibt.

In diesem Fall nennt man ω auch exakt.

a) $\omega(x,y) = dx + dy = \underbrace{1}_{p} \cdot dx + \underbrace{1}_{q} \cdot dy$

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0 = \frac{\partial q}{\partial x} \Rightarrow \omega$ ist exakt

b) $\omega(x,y) = x\,dx + y\,dy$, d.h. $p = x$ & $q = y$

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0 = \frac{\partial q}{\partial x} \Rightarrow \omega$ ist exakt

c) $\omega(x,y) = y\,dx + x\,dy$, d.h. $p = y$ & $q = x$

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 1 = \frac{\partial q}{\partial x} \Rightarrow \omega$ ist exakt

d) $\omega(x,y) = x\,dx - y\,dy$, d.h. $p = x$ & $q = -y$

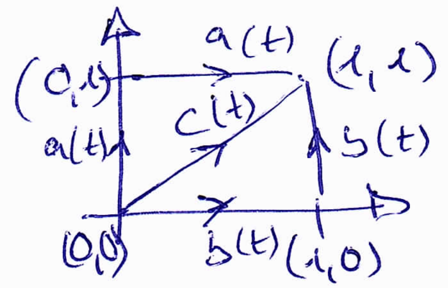
$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 0 = \frac{\partial q}{\partial x} \Rightarrow \omega$ ist exakt.

e) $\omega(x,y) = y\,dx - x\,dy$, d.h. $p = y$ & $q = -x$

$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = 1$ & $\frac{\partial q}{\partial x} = -1 \Rightarrow \omega$ ist <u>nicht</u> exakt.

Totale Differentiale sind wegunabhängig, d.h. Wegintegrale dieser Differentiale haben für Wege mit dem gleichen Start- und dem gleichen Endpunkt immer den selben Wert.

b)



$$a(t) = \begin{cases} (0,t), & t \in [0,1] \\ (t-1,1), & t \in [1,2] \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} (t,0), & t \in [0,1] \\ (1,t-1), & t \in [1,2] \end{cases}$$

$$c(t) = (t,t) \text{ mit } t \in [0,1]$$

Dies sind mögliche Parametrisierungen der Wege a, b & c.

Für ~~totale~~ totale Differentiale ω gilt somit

$$\int_a \omega = \int_b \omega = \int_c \omega .$$

Da $\omega = 1dx + 1dy$ exakt war und ω somit ein totales Differential ist, gilt:

$$\int_a \omega \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. aus} \\ \text{Vorlesung}}}{=} \int_0^1 \left\langle \binom{1}{1}, \binom{0}{1} \right\rangle dt + \int_1^2 \left\langle \binom{1}{1}, \binom{1}{0} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 1\,dt + \int_1^2 1\,dt = 2 = \int_b \omega = \int_c \omega .$$

Für $\omega = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy$ und einem Weg $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ mit $t \in [a,b]$ ist das Wegintegral von ω über den Weg γ definiert als:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} p(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ q(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_a^b p(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\,\gamma_1'(t)\,dt + \int_a^b q(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\,\gamma_2'(t)\,dt$$

2.) 6. Übung Aufgabe 4

a) $\iint_R \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dx\,dy = ?$ mit $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$

$$\Rightarrow \iint_R \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^2 \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{1+x+y} \Big|_0^2 \right] dy$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{3+y} + \frac{1}{1+y}\,dy$$

$$= ?$$

b)

$$\iint_B xy \, dx\,dy = ? \text{ mit } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, \; 0 \le x^2 + y \le 1\}$$

Da $0 \le x^2 + y \le 1$ sich auch schreiben lässt als $-x^2 \le y \le 1 - x^2$ gilt:

$$\iint_B xy \, dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-x}^{1-x^2} xy \, dy \right) dx = ?$$

c)

$$\iiint_K 4x^2 yz \, dx\,dy\,dz = ? \text{ mit } K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, \; 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

$$\Rightarrow \iiint_K 4x^2 yz \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 4x^2 yz \, dz \right] dy \right) dx$$

$$= ?$$