Notizen zum Zusatztutorium vom 19.06.2020

1) Aufgabe 2 der 7. Übung

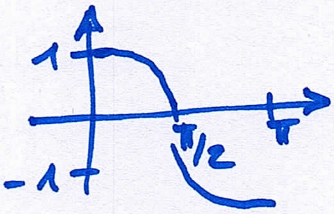
$g: \mathbb{R}_{>0} \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$g(r,\theta,\varphi) = (r\cdot \sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$

a)

i) Warum ist $(0,0,0)$ nicht im Bild von g?

Antwort: Da $r \neq 0$ ist, müsste $\cos\theta = 0$ gelten, wenn $(0,0,0)$ im Bild von g wäre, d.h. aber $\theta = \frac{\pi}{2}$.



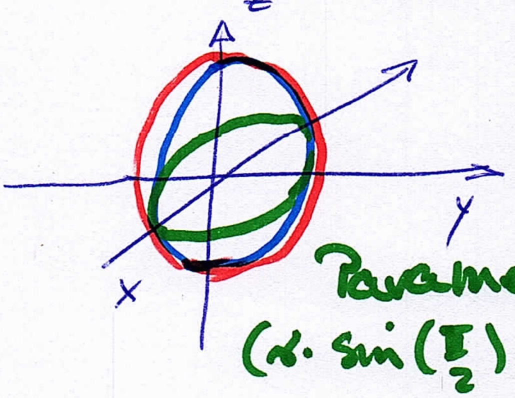
Damit würde aber

$g(r,\frac{\pi}{2},\varphi) \overset{!}{=} (r\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cos\varphi,\ r\cdot\sin\frac{\pi}{2}\sin\varphi, 0)$

gelten. Es gibt in $[0,2\pi]$ (und auch generell) kein φ für das $\cos\varphi = \sin\varphi = 0$ gilt.

Daher kann $(0,0,0)$ nicht im Bild von g liegen.

ii) Parametrisierung der Schnitte des Randes von K_Z (∂K_R) und den Koordinatenebenen.



$g(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$

Der Schnitt mit der x-y-Ebene wird erreicht, wenn $\theta = \frac{\pi}{2}$ ist

Parametrisierung des grünen Kreises

$(r\cdot\sin(\frac{\pi}{2})\cos\varphi,\ r\cdot\sin(\frac{\pi}{2})\sin\varphi,\ 0)$

$= (r\cdot\cos\varphi,\ r\cdot\sin\varphi,\ 0)$ mit $\varphi \in [0,2\pi]$ & $r>0$

Der blaue Kreis ist der Schnitt der x-z-Ebene mit K. In diesem Fall ist $\varphi = 0, \pi$ oder 2π

$\Rightarrow (r \sin\theta, 0, r\cos\theta)$

und $(-r\sin\theta, 0, r\cos\theta)$

Die Parameterisierung ist somit

$(r\cdot\sin\theta, 0, r\cos\theta)$ mit $r>0$ und $\theta\in[0,2\pi]$

Der rote Kreis folgt analog

b) Darum gilt:

$$\iiint_{K_R} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(g(r,\theta,\varphi))\,r^2\cdot\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

Die Transformationsformel aus der Vorlesung besagt:

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(g_1(u,v),g_2(u,v))\,|\det J_g|\,du\,dv$$

Determinante der Jacobimatrix von g

In unserem Fall ist $g_1(r,\theta,\varphi) = r\cdot\sin\theta\cos\varphi$

$g_2(r,\theta,\varphi) = r\cdot\sin\theta\sin\varphi$, $g_3(r,\theta,\varphi) = r\cdot\cos\varphi$

$$\Rightarrow J_g(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

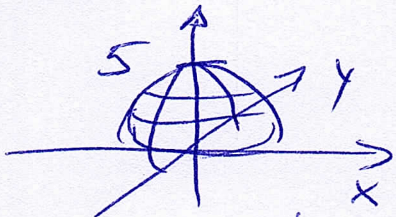
$$\det(J_g) = r^2 \sin(\theta)\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) + r^2\sin^3(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\sin(\theta)\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\sin^3(\theta)\cos^2(\varphi)$$

$$= r^2\sin(\theta)\left(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)\right) = r^2\sin(\theta)$$

2) Aufgabe 4 der 7. Übung

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = 5 - 3x^2 - 3y^2$



Berechne das Volumen des zwischen der x-y-Ebene und dem Graphen begrenzten Bereichs.

Die x-Achse wird für den Werte $\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ geschnitten und die y-Achse ebenfalls für diese Werte.

Der Schnitt mit der x-y-Ebene ist ein Kreis mit Radius $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Geht man zu Polarkoordinaten über, d.h. setzt man $x = r\cdot\cos\varphi$ und $y = r\cdot\sin\varphi$, so wird

$$f(x,y) = f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi) = 5 - 3(r^2\cos^2\varphi) - 3(r^2\sin^2\varphi)$$

$$= 5 - 3r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 5 - 3r^2$$

Mit dem Transformationssatz wird

$$\iint_B f(x,y)\,dxy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} r(5-3r^2)\,dr\,d\varphi$$

$$= 2\pi\left(\frac{5r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} = 2\pi\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3} - \frac{5}{3}\cdot\frac{5}{3}\right)$$

$$= \frac{25}{6}\pi$$