

1) Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 2xy - y \\ 4x^2 - y \end{pmatrix}$

Berechnen Sie das Wegintegral längs der folgenden Kurven

i) $c: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

ii) $d: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad d(t) = \begin{pmatrix} \frac{t+1}{2} \\ \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$

(Wegintegrale wurden z.B. in der 5. & 6. Übung behandelt.)

Wenn man einem durch die Funktion $\gamma(t)$ ($\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$) parametrisierten Weg gegeben hat und das Wegintegral der Funktion $f(x,y)$ über den Weg bestimmen soll, so ist

$$\int_{\gamma} f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \\ f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$\Rightarrow \text{(i)} \quad \int_c f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2t \cdot t^2 - t^2 \\ 4(t)^2 - t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2t^3 - t^2 \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (2t^3 - t^2 + 6t^3) dt$$

$$= \int_0^1 (8t^3 - t^2) dt = 2t^4 - \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad & \int_{-1}^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2 \left(\frac{t+1}{2} \right) \left(\frac{t+1}{2} \right) - \left(\frac{t+1}{2} \right) \\ 4 \left(\frac{t+1}{2} \right)^2 - \left(\frac{t+1}{2} \right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle dt \quad -2- \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \left[\frac{(t+1)^2}{2} - \frac{(t+1)}{2} \right] + \frac{1}{2} \left[(t+1)^2 - \left(\frac{t+1}{2} \right) \right] dt \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{3}{4} (t+1)^2 - \frac{2(t+1)}{4} dt = \int_{-1}^1 \frac{3}{4} t^2 + t + \frac{1}{4} dt \\
 &= \left. \frac{t^3}{4} + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4} t \right|_{-1}^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

2) Aufgabe 105) der 1. Klausur

Was versteht man unter einer Stammfunktion eines Vektorfelds?

Es sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

ein Vektorfeld. Eine Funktion F heißt Stammfunktion des Vektorfelds f , wenn

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

also allgemein $\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j(x_1, \dots, x_n)$ gilt.

Ein Stammfunktion F zum Vektorfeld f existiert genau dann, wenn

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i, j \text{ mit } i \neq j \text{ gilt.}$$

Bsp. Aufgabe 10c) des 1. Klausur:

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \rightarrow (-2y, 2y^2 - 2x)$ gegeben.

Dann muss gelten:

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x} = -2y}_{\Rightarrow F(x, y) = -2yx + g(y)} \quad \& \quad \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y} = 2y^2 - 2x}_{\Rightarrow F(x, y) = \frac{2}{3}y^3 - 2xy + h(x)}$$

$$\Rightarrow -2yx + g(y) \stackrel{!}{=} \frac{2}{3}y^3 - 2xy + h(x)$$

$\Rightarrow F(x, y) = \frac{2}{3}y^3 - 2xy$ ist die
Stammfunktion des Vektorfelds f .

3) 2. Klausur Aufgabe 3b)

-4-

Begründen Sie mithilfe der Substitutionsregel, dass $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx$ gilt.

Hinweis: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Setzt man $t = \sin(x)$, dann wird

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \cos(x)$$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{t=g(a)}^{t=g(b)} f(g(x)) g'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(x)} \cos(x) dx$$

$$\begin{aligned} t &= \sin(x) \\ -1 &= \sin(x) \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \\ 1 &= \sin(x) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx$$

Teil a) sagte aus, dass $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ beschreibt die Fläche eines Halbkreis mit Radius 1

