

1) Partielle Integration

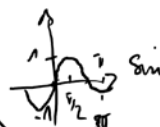
$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

$$\text{Denn: } \underbrace{\int_a^b (u(x) \cdot v(x))' dx}_{u(x) v(x)} = \int_a^b u'(x) v(x) dx + \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

Bsp.: a) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x) dx = ?$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x) dx &= -x^2 \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2x \cos(x) dx \\ &= -x^2 \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} + \left(2x \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \right) \\ &= x^2 \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} + 2x \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \\ &= x^2 \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} + 2x \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} + 2 \cos(x) \Big|_0^{\pi/2} = 0 + \pi + 0 - 2 \\ &= \pi - 2 \end{aligned}$$

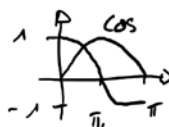
$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' v$$



$$\begin{aligned} (\sin)' &= \cos \\ (\cos)' &= -\sin \end{aligned}$$

Bsp.: b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx = ?$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \cos(x) dx &= \cos(x) \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sin(x)) \sin(x) dx \\ &= \cos(x) \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(x) dx \\ &= \cos(x) \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \cos^2(x) dx \end{aligned}$$



Tipp: $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \cos(x) \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx$$

$$\Rightarrow 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \underbrace{\cos(x) \sin(x) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{=0} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx = x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi/2 + \pi/2 = \pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \pi/2$$

Bsp: c) $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Zu bestimmen ist der Erwartungswert des Zufallsvariablen X mit der Dichte $f(x)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot 2e^{-2x} dx = 2 \int_0^{\infty} x \cdot e^{-2x} dx$$

in diesem Fall von

Es gilt: $2 \int_0^{\infty} x \cdot e^{-2x} dx = x \cdot (-e^{-2x}) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot (-e^{-2x}) dx = x(-e^{-2x}) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-2x} dx$

Aufgabe 6 (bedingte Wahrscheinlichkeit) der AWT-Lösungen.

- a) HIV-Test: Sensitivität von 95% und eine Spezifität von 98%, d.h. 95% der infizierten Personen richtig klassifiziert werden & 98% der nichtinfizierten " " " "

Die W.keit, dass ein zufällig ausgewählte Person infiziert ist, beträgt 0,2%

2) Wie wahrscheinlich ist es, dass der Test eine zufällig ausgewählte Person als infiziert klassifiziert. Gesucht

$P(T+|+) = 0,95$ $P(T-|-) = 0,98$ $P(+) = 0,002$ $P(T+)$

$P(T+|-) = 1 - P(T-|-) = 0,02$ $P(-) = 1 - P(+) = 1 - 0,002 = 0,998$

(iii) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Person mit positivem Testergebnis nicht infiziert ist.

$$P(-|T_+) = 1 - P(+|T_+) = 1 - 0,08692 = 0,91308$$

(iv) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Person mit einem negativen Testergebnis tatsächlich nicht infiziert ist.

$$P(-|T_-) = \frac{P(T_-|-) \cdot P(-)}{P(T_-)} = \frac{0,98 \cdot 0,998}{0,97814} = 0,99970$$

$$P(T_-) = 1 - P(T_+)$$

1.) $\Omega = \{E, \bar{E}\}$, wobei $P(\Omega) = 1$

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) \quad \leftarrow \text{Formel für die Gegenwahrscheinlichkeit}$$

2.) Satz von Bayes für bedingte Wahrscheinlichkeiten

$$P(F|E) = \frac{P(F \text{ und } E)}{P(E)} \Leftrightarrow P(F \text{ und } E) = P(F|E)P(E)$$

3.) Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

Es seien $(E_1, \dots, E_n)$ n-paarweise disjunkte Ereignisse mit der Eigenschaft, dass $\Omega = \bigcup E_i$. Dann ist für $F \in \Omega$ $P(F) = P(F \text{ und } E_1) + P(F \text{ und } E_2) + \dots + P(F \text{ und } E_n)$

Nach dem Satz von der totalen W.-keit ist

$$P(T_+) = P(T_+|+)P(+) + P(T_+|-)P(-) = P(T_+ \text{ und } +) + P(T_+ \text{ und } -)$$

$$= 0,95 \cdot 0,002 + 0,02 \cdot 0,998 = 0,02186$$

(iv) Wie wahrscheinlich ist es, dass eine Person mit positivem Testergebnis infiziert ist?

$$P(+|T_+) = \frac{P(T_+|+) \cdot P(+)}{P(T_+)}$$

$$P(F|E) = \frac{P(E|F) \cdot P(F)}{P(E)}$$

$$= \frac{0,95 \cdot 0,002}{0,02186} = 0,08692$$

- b) Ein Produkt wird in zwei Fabriken produziert, wobei die erste Fabrik 2% und die zweite Fabrik 5% defekte Produkte ausliefert. Ein Kunde besucht ein Geschäft, das zu $\frac{1}{3}$ Waren von Fabrik 1 hat und zu $\frac{2}{3}$ Waren von Fabrik 2.

- i) Mit welcher W.-keit ist ein in diesem Geschäft angekauft es Produkt defekt.

$$P(F_1) = \frac{1}{3}; \quad P(F_2) = \frac{2}{3}; \quad P(D|F_1) = 0,02; \quad P(D|F_2) = 0,05$$

$$P(D) = P(D \text{ und } F_1) + P(D \text{ und } F_2) = P(D|F_1) \cdot P(F_1) + P(D|F_2) \cdot P(F_2) \\ = 0,02 \cdot \frac{1}{3} + 0,05 \cdot \frac{2}{3} = 0,04 \quad \boxed{P(D) = 4\%}$$

- (ii) Wie wahrscheinlich ist es, dass ein defektes Produkt aus der ersten (bzw. zweiten) Fabrik stammt?

$$P(F_1|D) = \frac{P(D|F_1) \cdot P(F_1)}{P(D)} = \frac{0,02 \cdot \frac{1}{3}}{0,04} = \frac{1}{6}$$

$$P(F_2|D) = \frac{P(D|F_2) \cdot P(F_2)}{P(D)} = \frac{0,05 \cdot \frac{2}{3}}{0,04} = \frac{5}{6}$$

- c) In einer Klasse hören 25% der Schüler/-innen Musik während der Mathematikaufgaben. 40% haben mindestens eine 2 in der Klasse, wovon 12,5% Musik bei den Aufgaben hört.

- (i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler/eine Schülerin Musik bei den Aufgaben hört und mindestens eine 2 hat?

$$P(M \text{ und } \geq 2) = P(M|\geq 2) \cdot P(\geq 2) = 0,125 \cdot 0,4 = 0,05$$

$$P(M) = 0,25; \quad P(\geq 2) = 0,4; \quad P(M|\geq 2) = 0,125$$

$$P(\geq 2|M) = \frac{P(M \text{ und } \geq 2)}{P(M)} \\ \Rightarrow P(\geq 2|M) \cdot P(M) = P(M \text{ und } \geq 2)$$

(ii) Wie hoch ist die W.-keit, dass ein Schüler/eine Schülerin, die Musik hört, mindestens ein Exi auf dem Zeugnis hat?

$$P(Z|N) = \frac{P(N \text{ und } Z)}{P(N)} = \frac{0,05}{0,25} = 0,2$$

(iii) Wie hoch ist die W.-keit, dass ein Schüler/eine Schülerin, die keine Musik hört, mindestens ein Exi hat?

$$P(Z|\bar{N}) = \frac{P(\bar{N} \text{ und } Z)}{P(\bar{N})} = \frac{P(Z) - P(N \text{ und } Z)}{1 - P(N)} = \frac{0,4 - 0,05}{1 - 0,25} \approx 0,47$$

Differentialgleichungen

1. Aufgabe der 1. Übung aus dem Sommersemester

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t))$$

a) Schreiben Sie diese DGL in ein System um.

$$(y^{(k)})' = y^{(k+1)}(t) \quad \text{mit } k \in \{0, \dots, n-2\}$$

$$\begin{aligned} \cancel{y^{(n)}(t)} &= (y^{(n-1)}(t))' = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}(t) - \dots - \frac{a_1}{a_n} y'(t) - \frac{a_0}{a_n} y(t) + \frac{f(\dots)}{a_n} \\ Y'(t) &= \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))}{a_n} \end{pmatrix}}_{=: B} \end{aligned}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))}{a_n} \end{pmatrix}}_{=: B}$$

$$b) \quad y'''(t) - 2y''(t) - y'(t) + 2y(t) = 0$$

$$\vec{y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$$

Bestimme nun die Eigenwerte von A und die dazugehörigen Eigenvektoren.

Bestimme zunächst $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= -\lambda(-\lambda(2-\lambda)-1) - 2 \cdot 1 \\ &= \lambda^2(2-\lambda) + \lambda - 2 \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = 2 \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten führt auf die Gleichungssysteme

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{aligned} -1v_1 + v_2 &= 0 \\ -1v_2 + v_3 &= 0 \\ -2v_1 + v_2 + v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_2 = -1 \quad \begin{aligned} 1v_1 + v_2 &= 0 \\ v_2 + v_3 &= 0 \\ -2v_1 + v_2 + 3v_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_3 = 2 \quad \begin{aligned} -2v_1 + v_2 &= 0 \\ -2v_2 + v_3 &= 0 \\ -2v_1 + v_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EV_{\lambda_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & EV_{\lambda_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & EV_{\lambda_3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot EV_{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2 t} \cdot EV_{\lambda_2} + c_3 e^{\lambda_3 t} \cdot EV_{\lambda_3}$$

$$= c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}}$$

Aufgabe 5 der 3 Klausur

a) Bestimmen Sie die Ordnung der DGL

$$\sin(t) y''(t) + 2 y'''(t) - t y(t) - 3t^5 = 0$$

und klassifizieren Sie diese nach den folgenden Kriterien

- explizit bzw. implizit
- linear bzw. nicht linear
- homogen bzw. inhomogen.

Lsg.: DGL 4.ter Ordnung, explizit, linear, inhomogen

b) Gegeben sei die komplexe Zahl $z = 1 + 2i$. Bestimmen Sie Realteil, Imaginärteil und den Betrag von z . $\operatorname{Re}(z) = 1$, $\operatorname{Im}(z) = 2$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(1+2i) \cdot (1-2i)}$$

$$= \sqrt{1 - (2i)^2} = \sqrt{1 - (-4)} = \sqrt{5}$$

c) Berechnen Sie mithilfe der Regeln von l'Hospital den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos(2x)}{3 \cdot \cos(3x)} = \frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} (\sin 2x)' = 2 \cdot \cos(2x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2 \\ (\sin 3x)' = 3 \cdot \cos(3x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2 \cos(2x)}{3 \cos(3x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3}$$