Notizen zum Sondertutorium vom 22.07.2020

3. Klausur Aufgabe 4

Bestimme die Lösung der DGL

$$y'(x) = (y(x)+4)\cdot\cos(x) = \boxed{\cos(x)}\,y(x) + \boxed{4\cos(x)}$$

Differentialgleichungen dieser Form müssen mit der Trennung der Variablen gelöst werden.

$$\boxed{y'(x) = f(y(x))\,g(x)}$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{y'(x)}{f(y(x))} = g(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)\cdot dx$$

Hier ist $f(y) = y+4$
$\Rightarrow y \neq -4$

$$\int \frac{dy}{y+4} = \int \cos(x)\,dx$$

$|\sin(x)| \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}$

$-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$\Rightarrow e^{-1} \leq e^{\sin(x)} \leq e^{1}$

$$\Rightarrow \ln|y+4| = \sin(x) + \text{const}$$

$$\Rightarrow |y+4| = e^{\sin(x)+\text{const}} = k\,e^{\sin(x)} \quad \text{mit } k > 0$$

$$\Rightarrow y+4 = k\,e^{\sin(x)} \Rightarrow y = \underbrace{k\cdot e^{\sin(x)} - 4}_{\text{Dieser Ausdruck ist für alle } x\in\mathbb{R} \; > -4} \quad \boxed{k \neq 0}$$

hatten wir schon

$$\Rightarrow y(x) = k\cdot e^{\sin(x)} - 4$$

ist Kandidat für eine Lsg.

Probe zum Beweis, dass $y(x) = k\cdot e^{\sin(x)} - 4$ tatsächlich eine Lsg der DGL

$$y'(x) = (y(x)+4)\cdot\cos(x) \quad \text{ist.}$$

Sei $y(x) = k\cdot e^{\sin(x)-4}$

$$\Rightarrow y'(x) = k\cdot e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{(k\cdot e^{\sin(x)} - 4)}_{y(x)}\cdot\cos(x) + 4\cdot\cos(x)$$

$$k\cdot e^{\sin(x)}\cdot\cos(x) - \cancel{4\cos(x)} + \cancel{4\cdot\cos(x)}$$

$$= (y(x)+4)\cdot\cos(x) \checkmark$$

1. Klausur Aufgabe 8

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - y \\ 4x^2 - y \end{pmatrix}$

a) (i) $c: [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad c(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

(ii) $d: [-1,1] \to \mathbb{R}^2, \quad d(t) = \begin{pmatrix} \frac{t+1}{2} \\ \frac{t+1}{2} \end{pmatrix}$

(i) $$\int_c f(r)\,dr = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2 \cdot t \cdot t^2 - t^2 \\ 4(t)^2 - t^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 f(c(t)) \cdot c'(t)\,dt$$

$$\int_0^1 (2t^3 - t^2) \cdot 1 + (4t^2 - t^2) \cdot 2t \, dt$$

$$= \int_0^1 2t^3 + 6t^3 - t^2 \, dt = \int_0^1 8t^3 - t^2 \, dt$$

$$= 2t^4 - \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

(b) Ist das Kurvenintegral von f wegunabhängig?

$f = \begin{pmatrix} 2xy - y \\ 4x^2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ f ist genau dann wegunabhängig, wenn $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy - y) = 2x - 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(4x^2 - y) = 8x$$

$\Rightarrow f$ ist nicht wegunabhängig.

Alternative Lösung von Teil b):
In Teil a) haben wir gezeigt, dass $\int_c f(r)\,dr = \frac{5}{3}$
$\int_d f(r)\,dr = 1$ wobei sind c und d zwei verschiedene Wege von $(0,0)$ nach $(1,1)$. Somit ist f nicht wegunabhängig

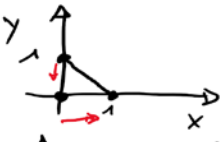
1. Klausur Aufgabe 9

D sei das Dreieck (0,0), (0,1) und (1,0).

a) Skizzieren Sie das Dreieck in einem kartesischen Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie das Integral $\iint_D \sin(x+2y)\,dx\,dy$.

a)



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1-x\}$$

$$\iint_D \sin(x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} \sin(x+2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{\cos(x+2y)}{2} \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right] dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}\cos(-x+2) + \frac{1}{2}\cos(x)\,dx$$

$$-\int_0^1 \frac{1}{2}\cos(-x+2)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(x)\,dx$$

$$= \frac{\sin(x+2)}{2}\Big|_0^1 + \frac{\sin(x)}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{\sin(1)}{2} - \frac{\sin(2)}{2} + \frac{\sin(1)}{2} = \sin(1) - \frac{\sin(2)}{2}$$

2. Klausur Aufgabe 8

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} ay \\ 2y^2 - 2x \end{pmatrix}$$

a) $c : [1,4] \to \mathbb{R}^2;\ c(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t \\ t^{1/2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow c'(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} \end{pmatrix}$$

$$\int_c f(v)\,dv = \int_1^4 \left\langle \begin{pmatrix} a \cdot t^{1/2} \\ 2(t^{1/2})^2 - 2\cdot(6t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_1^4 6a \cdot t^{1/2} + (2t - 12t)\cdot\frac{1}{2}t^{-1/2}\,dt$$

$$\int_1^4 6a\sqrt{t} - 5\sqrt{t}\,dt = \int_1^4 (6a-5)\sqrt{t}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}(6a-5)t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(6a-5)8 - \frac{2}{3}(6a-5)$$

$$= (6a-5)\frac{14}{3}$$

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Differentialform $f_1\,dx + f_2\,dy$ exakt? $f_1(x,y) = a\cdot y$ $\quad f_2(x,y) = 2y^2 - 2x$

$\frac{\partial f_1}{\partial y} \overset{!}{=} \frac{\partial f_2}{\partial x}$ $\quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = a$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -2$ $\Rightarrow$ Für $a = -2$ ist f exakt.

c) Bestimmen Sie für den Fall $a = -2$ eine Stammfunktion von f

$\frac{\partial F}{\partial x} = -2y$ $\qquad$ $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y^2 - 2x$

$\Rightarrow F = -2y \cdot x + h(y)$ $\qquad$ $\Rightarrow F = \frac{2}{3}y^3 - 2xy + g(x)$

$-2yx + h(y) \overset{!}{=} \frac{2}{3}y^3 - 2xy + g(x)$

$\Rightarrow g(x) = 0 \qquad h(y) = \frac{2}{3}y^3$

$\Rightarrow F(x,y) = \frac{2}{3}y^3 - 2xy$ ist eine Stammfunktion für $f(x,y)$

Für ein gegebenes Vektorfeld

$$\omega = f_1(x_1, \dots, x_n)dx_1 + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n)dx_n$$

heißt $F(x_1, \dots, x_n)$ Stammfunktion zu dem Vektorfeld, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = f_1(x_1, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_n} = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

Eine solche Stammfunktion existiert genau dann, wenn das Vektorfeld exakt ist.

2. Klausur Aufgabe 2a

Zeit	1	2	4	8	9	12
Menge Chlorrest	2	1,8	1,5	0,9	1	1

$x_{25\%}$

0,9 | 1 | 1 | 1,5 | 1,8 | 2

$x_{75\%}$

a) Zeichnen Sie einen Boxplot, der die Menge des freien Chlorrests darstellt.
Benötigt werden hierfür das 25% - und das 75% - Quantil der Median sowie maximale und minimale Ausprägung.

$x_{min} = 0{,}9 \qquad x_{max} = 2$ 6 Messwerte

Formel N · α

x_α = α - Quantil; $\frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2} = 1{,}5 \rightsquigarrow 2$

$x_{25\%}$ der zweite Wert der geordneten Messreihe

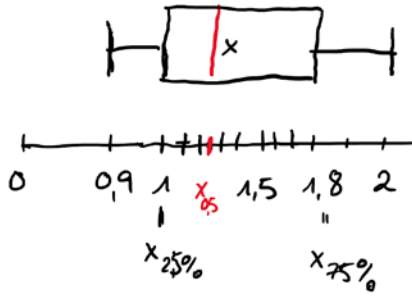
$\frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{9}{2} = 4{,}5 \rightsquigarrow 5$

$x_{75\%} = 1{,}8$

$6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ — In diesem Fall bildet man das arithmetische Mittel des Wertes an der 3. und an der 4. Position

0,9; 1; 1; 1,5; 1.8; 2 $\qquad \frac{1+1{,}5}{2} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$

$x_{0{,}5} = 1{,}25$ (obwohl der Median nicht in den Messwerten enthalten ist.)



$\bar{x} = \frac{0{,}9+1+1+1{,}5+1{,}8+2}{6}$

$= \frac{4{,}9+1{,}5+1{,}8}{6}$

$= \frac{8{,}2}{6} = 1{,}3\ldots$

2b) der 2. Klausur

Lagrange-Polynom $\qquad (x_i, y_i) \quad i \in \{1, \ldots, n\}$

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

$(1,2)\ (4;1{,}5)\ (9,1)$

$y_3 = 1 \quad x_3 = 9$

$y_1 = 2 \quad x_1 = 1$

$y_2 = 1{,}5 \quad x_2 = 4$

$$P(x) = 2 \cdot \frac{(x-4)(x-9)}{(1-4)(1-9)} + 1{,}5 \frac{(x-1)(x-9)}{(4-1)(4-9)} + 1 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(9-1)(9-4)}$$

Übung 8 Aufgabe 15)

Zwei faire Würfel werden geworfen.

Wie wahrscheinlich ist es, dass die Augensumme 5 ergibt.

Insgesamt gibt es 36 mögliche Ergebnisse

(1,1) (1,2) .... (1,6)

⋮ ⋮

(6,1) (6,2) ..... (6,6)

$6 \times 6 = 36$

Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme mindestens 5 ergibt ist gleich (1 − Wahrscheinlichkeit, dass Augensumme weniger als 5 ergibt)

Ausgänge mit Augenzahl weniger als 5

$\{(1,1); (1,2); (1,3); (2,1); (2,2); (3,1)\}$

Dies sind 6 Ausgänge

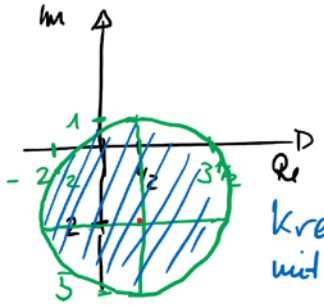
$$P(\text{mindestens } 5) = 1 - \frac{6}{36} = 1 - \frac{P(\text{weniger } 5)}{|\Omega|}$$
$$= \frac{5}{6}$$

8. Übung WS Aufgabe 15

Skizzieren Sie die nachfolgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene

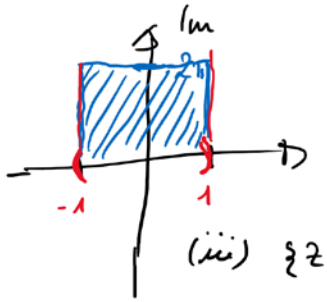
(i) $\{z \in \mathbb{C} \mid |2z - (1-4i)| \leq 6\}$

$= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{1}{2}(1-4i)| \leq 3\}$



Kreis um den Punkt $(\frac{1}{2}, 2)$ mit Radius 3.

ii) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2\pi, |\mathrm{Re}(z)| < 1\}$



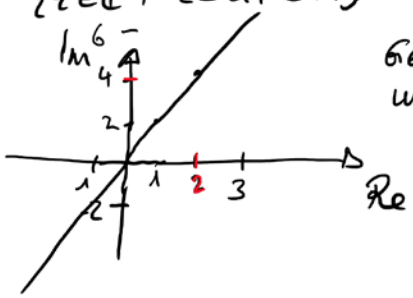
Rechteck ohne die linke und rechte Seite!

(iii) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}((2+i) \cdot z) = 0\}$

$(2+i)z = (2+i)(a+ib) = 2a + i \cdot a + 2ib - b$

$\mathrm{Re}((2+i) \cdot z) = 2a - b \stackrel{!}{=} 0 \quad 2a = b \Rightarrow z = a + 2a \cdot i$

$\{z \in \mathbb{C} \mid z = a + 2a \cdot i\}$



Gerade durch Ursprung mit der Steigung 2.

Aufgabe 2 do 11. Übung im WS

a) Bestimmen Sie die Ableitungen von

i) $f(x) = -2\sin(x)\cdot\cos(x) \Rightarrow f'(x) = -2\cos^2(x) + 2\sin^2(x)$

ii) $g(x) = 5^{3x} + 2\ln(x^4) \Rightarrow g'(x) = 3\cdot\ln(5)\cdot 5^{3x} + \frac{4x^3 \cdot 2}{x^4}$

Bedenken Sie $= 3\cdot\ln(5)\cdot 5^{3x} + \frac{8}{x}$

$5^x = \exp(\ln(5)\cdot x)$

$\Rightarrow (5^x)' = \ln(5)\cdot\exp(\ln(5)\cdot x)$

$= \ln(5)\cdot 5^x$

(iii) $h(x) = 3(\cos(x))^n + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow h'(x) = -3n\sin(x)(\cos(x))^{n-1} - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

(iv) $u(x) = x\cdot e^{-x^2} \Rightarrow u'(x) = e^{-x^2} - 2x\cdot x\cdot e^{-x^2}$

$= (1-2x^2)e^{-x^2}$

(v) $v(x) = \frac{(x^2+2)(x-1)}{x^2-3} = \frac{(x^3-x^2+2x-2)}{x^2-3}$

$\Rightarrow v'(x) = \frac{(3x^2-2x+2)(x^2-3) - 2x(x^3-x^2+2x-2)}{(x^2-3)^2}$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

b) Wie lautet die Grenzwert von

$u(x) = \sin(x) - x\cdot\cos(x)$

$k(x) = x\cdot\sin(x)$

für $x \to 0$.

$u'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) \longrightarrow 0$

$k'(x) = \sin(x) + x\cdot\cos(x) \longrightarrow 0$

$$h''(x) = (x \cdot \sin(x))' = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

$$k''(x) = (\sin(x) + x \cdot \cos(x))' = \cos(x) + \cos(x) - x \cdot \sin(x)$$

$$= 2 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x) \to 2$$

$$\Rightarrow \frac{h''(x)}{k''(x)} \to 2 \quad \text{für } x \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{k(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{h'(x)}{k'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{h''(x)}{k''(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

Übergangsmatrizen

Bei Übergangsmatrizen sind die Summen der Spalten zusammen immer 1. Und jeder einzelne Eintrag ist ebenfalls ≤ 1. Für eine Übergangsmatrix A heißt ein Vektor x eine stabile Verteilung wenn $A \cdot x = x$ ist. x ist somit nichts anderes als der Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert 1.

Grenzmatrizen von Übergangsmatrizen haben die Eigenschaft, dass jede Verteilung auf eine konstante Verteilung abgebildet wird. Insbesondere wird durch die Grenzmatrix einer Übergangsmatrix jede stabile Verteilung auf sich abgebildet. Das heißt es muss für die Grenzmatrix und jede Startverteilung die Gleichung $G \cdot x_0 =$ Eigenvektor der Übergangsmatrix zum Eigenwert 1 gelten.

3. Klausur Aufgabe 9

Sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$

Berechne die $\iint_D e^{2x+3y}\,dx\,dy$

$$\int_0^2 \frac{1}{3}e^{5x} - \frac{1}{3}e^{2x}\,dx = \frac{1}{15}e^{5x} - \frac{1}{6}e^{2x}\Big|_0^2 = \frac{1}{15}e^{10} - \frac{1}{6}e^{4} - \frac{1}{15} + \frac{1}{6}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\}$$

$$\int_0^2\int_0^x e^{2x+3y}\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{1}{3}\left(e^{2x+3y}\right)\Big|_0^x dx = \int_0^2 \frac{1}{3}e^{5x} - \frac{1}{3}e^{2x}\,dx$$

Aufgabe 3, 1. Klausur

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{2 \cdot e^{-2x}}_{v'}\,dx$$

$$= -x \cdot e^{-2x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-2x})\,dx$$

$$= -x \cdot e^{-2x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = -x \cdot e^{-2x}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Aufgabe 1 der 10. Übung im Sommersemester

a) 101 zufällig entnommene Tabletten mit durchschnittlichem Wirkstoffgehalt 15,35 mg

Varianz liegt bei 4 mg.

Bestimmen Sie ein 95%-iges Konfidenzintervall für den Erwartungswert des Wirkstoffgehalts.

d.h. finde ein Intervall, sodass $z_{0,975} = 1{,}96$

$$0{,}95 = P\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le X \le \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$\bar{x} = 15{,}35$; $\sigma = \sqrt{4} = 2$; $n = 101$; $\alpha = 0{,}05$ $\quad 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$

Die hier zu testende Hypothese lautet in diesem Fall $H_0: \mu = 15$ und $H_1 \neq 15$.
Die Behauptung der Aufgabenstellung entspricht H_0 und kann somit nicht verworfen werden.

ii) Bei dieser Aufgabe ist $H_0: \mu \leq 15$ $H_1: \mu > 15$
Wenn $\bar{x} \leq \mu + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ist kann H_0 angenommen werden

Aufgabe 4 der 1. Klausur

$$y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} y(t) + \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ & $\lambda_2 = 2$

Die Eigenvektoren bestimmt man nun wie folgt:

zu $\lambda_1 = 1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{(A - \lambda_1 I)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet somit

$$y_h(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Für die Bestimmung einer partikulären Lösung soll der Ansatz

$$y_p(t) = \begin{pmatrix} a\cdot t + b \\ c\cdot t + d \end{pmatrix}$$ gemacht werden

$$\Rightarrow y_p'(t) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} at+b \\ -at-b+2ct+2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t \\ 2 \end{pmatrix}$$

$a = -3$

$a = a\cdot t + b + 3t$

$c = -at - b + 2ct + 2d + 2$ $\Rightarrow$ $0 = at + 3t \Rightarrow b = -3$

$a = b$

$0 = -at + 2ct \Rightarrow -\frac{3}{2}$

$c = -\frac{b}{2} + 2d + 1$

$d = -13/4$

$$y_p = \begin{pmatrix} -3t - 3 \\ -\frac{3}{2}t - \frac{13}{4} \end{pmatrix}$$

$$y_{allgemein} = \begin{pmatrix} -3t-3 \\ -\frac{3}{2}t - \frac{13}{4} \end{pmatrix} + c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2. Klausur Aufgabe 5b

Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$ der Funktion

$f(x) = e^x$ in $x_0 = 0$.

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$f'''(x) = e^x$

$$T_3(x) = \frac{1}{1}\cdot 1 + \frac{1}{1}(x-0) + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$T_3(x) = \frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$