

**Freiwillige Zusatzübungsaufgaben zur Vorlesung
“Mathematik I für Studierende der Biologie und der Chemie”**

1. Aufgabe: Das Weihnachtsgeld von 7 Mitarbeitern einer Abteilung wurde nach der von ihnen erbrachten Leistung gezahlt. Alle Mitarbeiter haben ein monatliches Einkommen von 2000 Euro. Das Weihnachtsgeld betrug bei zwei Mitarbeitern 50 %, bei einem 30 %, bei dreien 60% und bei dem letzten 20 % des mtl. Einkommens. Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert und den Median des Weihnachtsgeldes.

2. Aufgabe:

Zur Bestimmung der Blutgerinnungszeit von weiblichen Testpersonen wurden folgende Werte (in Sekunden) gemessen:

21; 23; 25; 27; 29; 31; 33; 35; 64.

- (a) Bestimmen Sie den Median.
- (b) Bestimmen Sie das 15%-Quantil.
- (c) Bestimmen Sie das 25%-Quantil.
- (d) Bestimmen Sie das 75%-Quantil.
- (e) Bestimmen Sie die durchschnittliche Blutgerinnungszeit.
- (f) Zeichnen Sie den zu der oben angegebenen Beobachtungsreihe gehörenden Boxplot.

3. Aufgabe:

Es sei folgende Datenmenge gegeben:

14; 20; 22; 25; 27; 28; 31; 33; 38; 42; 51; 53; 61; 62; 65; 71; 74; 77; 78; 84; 86; 91.

Stellen Sie die Daten mit Hilfe eines Boxplots dar. Bestimmen Sie hierzu:

- (a) das arithmetrische Mittel.
- (b) den Median.
- (c) das 25%-Quantil.
- (d) das 75%-Quantil.

4. Aufgabe:

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die nachfolgende Aussage:

Für $x^2 \neq 1$ und jede natürliche Zahl n ist

$$\sum_{k=0}^n x^{2k} = \frac{1 - x^{2(n+1)}}{1 - x^2}.$$

5. Aufgabe: Beweisen Sie die nachfolgenden Aussagen:

Wenn $a > 0$ und $b > 0$, dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $(a + b)^n \geq a^n + na^{n-1}b$.

6. Aufgabe: Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die nachfolgende Aussage:

Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

7. Aufgabe: In der Enzymkinetik spielt die sogenannte Michaelis-Menten Gleichung eine wichtige Rolle. Hierbei steht die Umwandlungsgeschwindigkeit y mit der Konzentration x des Substrats näherungsweise in dem Zusammenhang

$$y(x) = \frac{ax}{x+b},$$

wobei a und b positive Konstanten sind. Ist die Funktion $y(x)$ monoton? Ist sie konvex oder konkav? Was passiert, wenn $x \rightarrow \infty$? Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf der Funktion für positive x -Werte.

8. Aufgabe:

Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$ in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie (ohne Rechnung) in dieses Koordinatensystem den Verlauf der ersten und der zweiten Ableitung.

9. Aufgabe:

Es sei die Funktion

$$L(t) = \ln(1 + t^4)$$

gegeben.

- (a) Wie viele und welche möglichen relativen Extrema besitzt $L'(t)$? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Bestimmen Sie zur Beantwortung dieser Frage die Funktion $L''(t)$ und fassen Sie alle Terme soweit wie möglich zusammen!
- (b) Wie verhält sich $L'(t)$ für $t \rightarrow \infty$ und wie für $t \rightarrow -\infty$?
- (c) Skizzieren Sie die Funktion $L'(t)$.

10. Aufgabe:

Berechnen Sie zu der Funktion

$$\frac{\sqrt{x} + x^{1+\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

die erste und zweite Ableitung. Beachten Sie hierbei, daß es eventuell hilfreich sein kann, die Funktion "umzuschreiben".

11. Aufgabe: Bestimmen und klassifizieren Sie alle kritischen Punkte der Funktion:

$$u(x) = \frac{(x-1)}{x^2+4}.$$

Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion.

12. Aufgabe:

Bestimmen Sie mit Hilfe der Produkt- bzw. der Quotientenregel die erste und die zweite Ableitung der nachfolgenden Funktionen:

$$a) f(x) = x \cdot \ln(x) - x, \quad b) g(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Geben Sie jeden Ihrer Rechenschritte an.

13. Aufgabe: Konvergieren die nachfolgenden Folgen, und wenn ja, gegen was?

(a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gegeben durch $a_n := \frac{\sqrt{4n^2+1}}{9n+2}$.

(b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gegeben durch $a_n := \frac{4n^3+5n+2}{n^4+9n^2}$.

14. Aufgabe:

Konvergieren die nachfolgenden Folgen, und wenn ja, gegen was?

(a) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gegeben durch $a_n := \frac{25n^2+2}{\sqrt{16n^4+1}}$.

(b) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gegeben durch $a_n := \frac{7n^5+8n^2+2}{n^6+9n^4}$.

15. Aufgabe:

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie den Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$.

(b) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix.

16. Aufgabe:

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

und die dazugehörigen Eigenvektoren.

(b) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix.

17. Aufgabe: Berechnen Sie jeweils die Determinante der nachfolgenden Matrizen:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

18. Aufgabe: Für 7 Kartoffeln findet man in der folgenden Tabelle jeweils das spezifische Gewicht und den Stärkegehalt. Bestimmen Sie aus den in der Tabelle angegebenen Werten die Regressionsgerade,

Kartoffel Nr. i	1	2	3	4	5	6	7
sp. Gew. in mg/cm^3	1060	1065	1070	1070	1075	1080	1084
Stärkegeh. in %	9.6	10.5	11.4	11.4	11.6	12.4	13.6

die es erlaubt von dem spezifischen Gewicht der Kartoffel auf den Stärkegehalt zu schließen. Welchen Wert für den Stärkegehalt erwartet man bei einem spezifischen Gewicht von 1096 mg/cm^3 ?

19. Aufgabe:

Die Puppen einer Schmetterlingsart werden in einen Brutschrank gebracht. Bei einer Temperatur von 20°C dauert das Puppenstadium durchschnittlich 30.0 Tage, bei 22°C sind es 26.4 Tage und bei 25°C nur noch 22.5 Tage im Durchschnitt. Man möchte die Dauer des Puppenstadiums für den Temperaturbereich $20 \leq x \leq 25$ durch ein Polynom 2. Grades annähern. Bestimmen Sie dieses Polynome und Skizzieren Sie seinen Funktionsgraphen. Zur Bestimmung des Polynoms verwenden Sie die Ihnen aus der Vorlesung und den Übungen bekannte Formel:

$$P(t) = \sum_{i=1}^n y_i \left(\prod_{k=1, k \neq i}^n \frac{t - t_k}{t_i - t_k} \right)$$

und fassen Sie die Ausdrücke soweit wie möglich zusammen.

20. Aufgabe: Führen Sie die entsprechenden Polynomdivisionen durch:

- a) $(4x^9 - 7x^3 + x^2 - 1) : (x + 1)$
- b) $(2x^5 - 10x^4 + 7x^3 - 3x) : (x^2 + 1)$
- c) $(3x^7 + 8x^6 + 6x^5 + 3) : (x^3 + 3x^2 + 1)$

21. Aufgabe:

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen des nachfolgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 1 &= 5a + 2b - 2c + 2d \\ 0 &= b - 2c - d \\ 2 &= 5a - c \\ 8 &= 10a + 5c + 5d. \end{aligned}$$

(b) Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrix-Schreibweise $A \cdot x = b$.

(c) Sind die Spaltenvektoren der sogenannten Matrix A linear unabhängig?

(d) Was sagt die lineare Unabhängigkeit bzw. die lineare Abhängigkeit der Spaltenvektoren der Matrix A über die Anzahl an Lösungen des in Teil (a) gegebenen Gleichungssystems aus?

22. Aufgabe:

Die Masse von radioaktivem Jod 131 in Abhängigkeit der Zeit x (in Tagen) verhält sich gemäß

$$M(x) = M_0 \cdot 2^{-\frac{x}{8.06}}$$

(M_0 = Masse zum Zeitpunkt $x = 0$). Warum heißt hier $T = 8.06$ die 'Halbwertszeit' von Jod 131? Wie groß ist die verbliebene Menge Jod nach $2T = 16.12$ Tagen, nach $3T = 24.18$ Tagen und nach $10T = 80.6$ Tagen?

23. Aufgabe:

Die Halbwertszeit von radioaktivem Kohlenstoff ^{14}C beträgt 5730 Jahre. Bezeichne M_0 die Ausgangsmasse.

a) Stellen Sie die Masse M in Abhängigkeit der Zeit x (in Jahren) formelmäßig dar!

b) Wie lange dauert es, bis nur noch 40% der Ausgangsmenge vorhanden sind?

c) Der ^{14}C Gehalt eines 'Grabtuchs' betrug 1988 noch rund 95% des Normalgehalts. Wie alt ist es?