Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} (1-\lambda) & 2 & 0 \\ 0 & (1-\lambda) & 3 \\ 1 & 0 & (1-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \left[(1-\lambda)^2 - 3 \cdot 0\right] - 0 \left[2 \cdot (1-\lambda) - 0 \cdot 0\right]$$
$$+ 1 \cdot \left[3 \cdot 2 - (1-\lambda) \cdot 0\right]$$

$$= (1-\lambda)^3 + 3 \cdot 2 \quad = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 + 6$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 7 \overset{!}{=} 0$$

z.B. mit der Hilfe eines Taschenrechners findet man

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt[3]{6}$$

$$\lambda_2 = \frac{2 - \sqrt[3]{6}}{2} + \frac{\sqrt[3]{6}\sqrt{3}}{2} i$$

$$\lambda_3 = \frac{2 - \sqrt[3]{6}}{2} - \frac{\sqrt[3]{6}\sqrt{3}}{2} i$$

Also ist $\det(A - \lambda I) = \left(\lambda - (1 + \sqrt[3]{6})\right)\left(\lambda - \left(\frac{2 - \sqrt[3]{6}}{2} + \frac{\sqrt[3]{6}\sqrt{3}}{2} i\right)\right)$
$\left(\lambda - \left(\frac{2 - \sqrt[3]{6}}{2} - \frac{\sqrt[3]{6}\sqrt{3}}{2} i\right)\right)$

Die Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = 1 + \sqrt[3]{6}$ führt auf das Gleichungssystem:

$$(1-(1+\sqrt[3]{6}))x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$
$$0 \cdot x_1 + 1-(1+\sqrt[3]{6})x_2 + 3 \cdot x_3 = 0$$
$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + (1-(1+\sqrt[3]{6}))x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\sqrt[3]{6}\,x_1 + 2x_2 = 0$$
$$-\sqrt[3]{6}\,x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 + 0 \cdot x_2 - \sqrt[3]{6}\,x_3 = 0$$

Da sich die zweite Gleichung mit der ersten und der dritten Herleiten lässt haben wir zwei Gleichungen für drei Unbekannte vorliegen. Wir betrachten

$$-\sqrt[3]{6}\,x_1 + 2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}x_1$$
$$x_1 - \sqrt[3]{6}\,x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}x_1$$

Setze $x_1 = s$ für ein $s \in \mathbb{C}$ mit $s \neq 0$.

$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \frac{\sqrt[3]{6}}{2}s \\ \frac{1}{\sqrt[3]{6}}s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt[3]{6}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt[3]{6}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \end{pmatrix}$$ ist <u>ein</u> Eigenvektor

zum Eigenwert $\lambda_1 = 1 + \sqrt[3]{6}$.