5. Iterationstheorie

Sei $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Eine Abbildung $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$ ist holomorph (= analytisch), wenn sie stetig ist und entweder identisch ∞ oder f ist meromorph in G, d.h. bis auf isolierte Polstellen $S = f^{-1}(\infty)$ ist $f : G \setminus S \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Holomorphe Abbildungen $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ sind surjektiv oder konstant.

Definition. Eine Familie $\mathcal{F}$ von Abbildungen $G \to \widehat{\mathbb{C}}$ heißt *normal* in G, wenn jede Folge (f_n), $f_n \in \mathcal{F}$, eine Teilfolge besitzt, die lokal gleichmäßig konvergiert.

Satz 5.1 (Montel)**.** *Seien $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ paarweise verschiedene Punkte der Sphäre. Eine Familie holomorpher Abbildungen $G \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ ist normal.*

Man kann $a = 0$, $b = 1$, $c = \infty$ annehmen. Wenn also eine Familie holomorpher Abbildungen die Punkte $0, 1, \infty$ ausläßt, ist sie normal.

Eine surjektive Abbildung $f : U \to V$ heißt *konform*, wenn sie holomorph und injektiv ist.

Definition. Zwei Abbildungen $f : U \to U$ und $g : V \to V$ sind *konjugiert*, wenn es eine konforme Abbildung $\varphi : U \to V$ gibt mit $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

Die holomorphen Abbildungen $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ sind genau die rationalen Abbildungen $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ mit teilerfremden Polynomen p und q. Ist f konstant, so ist der Grad $\deg(f) = 0$, ansonsten $\deg(f) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}$. Eine nicht–konstante rationale Abbildungen $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ ist surjektiv, und mit Vielfachheit gezählt ist dann $d = \deg(f)$ gleich der Anzahl Urbilder unter f eines jeden Punktes.

Die konformen Abbildungen $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ sind die Möbius-Transformationen, d.h. die rationalen Abbildungen vom Grad 1,

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \ : \quad \varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad ad - bc \neq 0 \ .$$

Konjugation definiert Äquivalenzrelation $f \sim g$. Dann gilt $\deg(f) = \deg(g)$.

Ein *kritischer* Punkt von f ist ein Punkt, für den es keine Umgebung gibt, in der f injektiv ist. Dies ist dort der Fall, wo f' eine Nullstelle oder f eine mehrfache Polstelle hat. Das Bild eines kritischen Punktes heißt kritischer Wert. Ist w kein kritischer Wert, dann hat $f^{-1}(w)$ genau d disjunkte Urbilder, die disjunkte Umgebungen besitzen, in denen f jeweils injektiv ist.
Sei $\nu_f(a) = \mathrm{ord}_a(f - f(a))$ die Vielfachheit, mit der a auf $f(a)$ abgebildet wird. Ein kritischer Punkt c von f ist ein k–facher kritischer Punkt, wenn $\nu_f(c) = k+1$. Ist $f'(c) = 0$, dann ist $k = \mathrm{ord}_c f'$ (Vielfachheit der Nullstelle von f').
Eine rationale Abbildung $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\deg(f) = d > 0$ hat mit Vielfachheit $2d - 2$ kritische Punkte. Ein Polynom hat $d - 1$ endliche kritische Punkte, und ∞ ist ein $(d - 1)$–facher kritischer Punkt.

§ Juliamenge einer rationalen Abbildung

Die Iterierten einer Abbildung f werden bezeichnet mit $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ mal}}$.

Für zwei konjugierte Abbildungen f und g sind auch die Iterierten konjugiert:

$$g^n = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})^n = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1} \ .$$

Eine Familie $\mathcal{F}$ ist normal *in* z, falls es eine Umgebung von z gibt, in der $\mathcal{F}$ normal ist. Für $G \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen ist $\mathcal{F}$ genau dann normal in jedem Punkt $z \in G$, wenn $\mathcal{F}$ normal in G ist.

Definition. Sei $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine nicht–konstante rationale Abbildung.
Die *Fatoumenge* $F(f)$ ist die Menge der $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, für die die Familie der Iterierten $\{f, f^2, f^3, \ldots\}$ normal in (einer Umgebung von) z ist.
Das Komplement $J(f) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ ist die *Juliamenge.*

Die Fatoumenge ist offen und die Juliamenge kompakt.

Folgerung. *Sind $f \sim g$ konjugiert durch $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, dann $J(g) = \varphi(J(f))$.*

Lemma 5.2. *Es gilt $F(f^p) = F(f)$ und $J(f^p) = J(f)$ für $p \geq 1$.*

Ab jetzt sei $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ rational mit $\deg(f) \geq 2$.

Satz 5.3. *$J(f) \neq \emptyset$.*

Beweis. Angenommen $J(f) = \emptyset$, also $F(f) = \widehat{\mathbb{C}}$. Dann ist $\{f^n\}$ in ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ normal und eine Teilfolge (f^{n_j}) konvergiert gegen $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Nun ist $\deg(f^{n_j}) \geq 2^{n_j}$. Jedoch $\deg(f^{n_j}) = \deg(g)$ für $n_j \geq n_0$. $\lightning$ $\square$

Eine Menge E ist *vollständig invariant* unter f, wenn $f(E) = E = f^{-1}(E)$.
Ist f surjektiv, dann folgt aus $f^{-1}(E) = E$ auch $E = f(f^{-1}(E)) = f(E)$.

Satz 5.4. *Fatou- und Juliamenge sind vollständig invariant, d.h. $f^{-1}(J) = J$.*

Satz 5.5. *Eine endliche vollständig invariante Menge E hat höchstens zwei Elemente, $\sharp E \leq 2$, und $E \subset F(f)$.*

Beweis. Sei $k = \sharp E$. Da $f : E \to E$ eine Permutation der endlichen Menge E ist, gibt es ein p, so daß für $g := f^p$ gilt $g|_E = \mathrm{id}_E$. Sei $d = \deg(g)$. Mit Vielfachheit hat jeder Punkt d Urbilder. Da $g^{-1}(z) = \{z\}$ für $z \in E$, ist jedes Element in E ein $(d-1)$–facher kritischer Punkt. g hat $2d - 2$ kritische Punkte, also $k(d-1) \leq 2(d-1) \ \rightsquigarrow \ k \leq 2$ (denn $d \geq 2$).
Besteht E aus genau einem Punkt, so kann man $E = \{\infty\}$ annehmen und f ist (konjugiert zu einem) Polynom. Besteht E aus zwei Punkten, o.E. $E(f) = \{0, \infty\}$, so ist f (konjugiert zu) z^d $(0 \mapsto 0,\ \infty \mapsto \infty)$ oder z^{-d} $(0 \mapsto \infty \mapsto 0)$.
Somit ist $E \subset F(f)$. $\square$

Ist U offen mit $U \cap J \neq \emptyset$, dann lassen die Iterierten $f(U) \cup f^2(U) \cup \ldots$ höchstens zwei Elemente aus (Montel).

Satz 5.6. *Es gibt eine endliche vollständig invariante Menge $E(f)$, so daß für jede offene Menge U mit $U \cap E(f) = \emptyset$ gilt:*

$$U \cap J \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E(f) \; .$$

Beweis. Sei $V = \bigcup_{n \geq 0} f^n(U)$ und $W = \widehat{\mathbb{C}} \setminus V$. Da $f(V) = \bigcup f^{n+1}(U) \subset V$, kann $w \in W$ kein Urbild in V haben, also $f^{-1}(W) \subset W$.
Da $U \cap J \neq \emptyset$, ist $\sharp W \leq 2$ endlich. Da f surjektiv ist, muß $\sharp W \leq \sharp f^{-1}(W)$. Somit $f^{-1}(W) = W$, d.h. W ist vollständig invariant.
Für U offen mit $U \cap J \neq \emptyset$ sei $W(U)$ wie oben. Dann ist $E(f) = \bigcup_{U \cap J \neq \emptyset} W(U)$ ebenfalls endlich und vollständig invariant, also $\sharp E(f) \leq 2$. Denn hätte $E(f)$ mind. drei Elemente, gäbe es U_1, U_2, U_3 mit $\sharp(W(U_1) \cup W(U_2) \cup W(U_3)) \geq 3$. Allerdings wäre $W(U_1) \cup W(U_2) \cup W(U_3)$ endlich und vollständig invariant und hätte somit höchstens zwei Elemente.
Da $W \subset E(f)$, ist $\bigcup f^n(U) = V = \widehat{\mathbb{C}} \setminus W \supset \widehat{\mathbb{C}} \setminus E(f)$. Falls $U \cap E(f) = \emptyset$, ist auch $f^n(U) \cap E(f) = \emptyset$ und $V \cap E(f) = \emptyset$, somit $W = E(f)$. □

Die Menge $E(f)$ heißt *Ausnahmemenge* von f und liegt in der Fatoumenge.
Es galt $\sharp E(f) \leq 2$. $E(f)$ kann auch leer sein.

Satz 5.7.

(i) Ist E eine endliche vollständig invariante Menge, so gilt $E \subset E(f) \subset F(f)$.

(ii) Ist E abgeschlossen und vollständig invariant mit $\sharp E \geq 3$, dann $J(f) \subset E$.

Beweis (ii). $W = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ ist vollständig invariant, und da $f^n : W \to W$ die Menge E ausläßt, ist $W \subset F(f)$ und $J(f) \subset E$. □

Folgerung. *(i) $J(f)$ ist unendlich. (ii) $J(f)$ ist die kleinste abgeschlossene vollständig invariante Menge mit mindestens drei Elementen.*

Folgerung. *Ist das Innere von J nichtleer, so ist $J = \widehat{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Ist $U \neq \emptyset$ offen und $U \subset J$, so folgt $J \supset \bigcup f^n(U) \supset \widehat{\mathbb{C}} \setminus E(f)$.
Da J abgeschlossen ist, muß $J = \widehat{\mathbb{C}}$. □

Beispiel. Die Abbildungen $\dfrac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$ und $\dfrac{(z-2)^2}{z^2}$ haben leere Fatoumenge.

Ist U eine Umgebung von $z \in J$, so gilt $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U \cap J) = J$. Da J kompakt ist, gibt es endlich viele mit $f^{n_1}(U) \cup \ldots \cup f^{n_k}(U) \supset J$. Später wird folgen, daß es ein N gibt, so daß $J \subset f^N(U)$ bzw. $J = f^N(U \cap J)$.

Für $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ bezeichnet $\mathcal{O}^-(z) = \bigcup\limits_{n \geq 0} f^{-n}(z)$ den *Rückwärtsorbit* von z.

Satz 5.8. *(i) Ist $z \notin E(f)$, so gilt $J \subset \overline{\mathcal{O}^-(z)}$. (ii) Ist $z \in J$, so gilt $J = \overline{\mathcal{O}^-(z)}$.*

Beweis. Sei $w \in J$ und U eine Umgebung von w, somit $U \cap J \neq \emptyset$. Da $z \notin E(f)$, gibt es ein n mit $z \in f^n(U)$. Ist zudem $z \in J$, dann auch $\mathcal{O}^-(z) \subset J$. □

Lemma. *Sei $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ holomorph und nicht konstant. Ist A vollständig invariant, so auch $A^c = \widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ und $A_0 = \{\text{Häufungspunkte von } A\}$.*

Beweis. Da f surjektiv ist, ist A vollständig invariant $\iff$ $f^{-1}(A) = A$.
Nun ist $f^{-1}(A^c) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus f^{-1}(A) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus A = A^c$.
Sei $A \ni a_n \to a \in A_0$. Da f stetig ist, gilt $A \ni f(a_n) \to f(a)$. Wäre $f(a_n) = f(a)$ für unendlich viele a_n, so wäre f konstant. Also ist $f(a) \in A_0$, d.h. $f(A_0) \subset A_0$. Damit folgt $A_0 \subset f^{-1}f(A_0) \subset f^{-1}(A_0)$. Angenommen es gibt $z \in A \setminus A_0$ mit $f(z) = w \in A_0$. Dann gibt es eine Umgebung U von z mit $U \cap A = \{z\}$. Somit ist $U \setminus \{z\} \subset A^c$ wie auch $f(U \setminus \{z\}) \subset A^c$. Nun ist $f(U) = V$ offen mit $w \in V$. Somit ist $w \in A_0 \cap A$ umgeben von $f(U \setminus \{z\}) \subset A^c$. ↯ □

Satz 5.9. *Die Juliamenge $J(f)$ hat keine isolierten Punkte.*

Beweis. Da J unendlich ist, hat es einen Häufungspunkt. Sei $J_0 \neq \emptyset$ die Menge der Häufungspunkte von J. Da J abgeschlossen ist, gilt $J_0 \subset J$. Da J_0 vollständig invariant ist, muß J_0 unendlich sein. Somit ist $J_0 \supset J$. □

Beweis 2. Sei $z_0 \in J$ und U Umgebung von z_0. Suche $z \in J \cap U$ mit $z \neq z_0$.

1. Fall: $f^m(z_0) \neq z_0 \ \forall m$. Sei $f(w) = z_0$. Dann ist $f^m(z_0) \neq w \ \forall m$.

2. Fall: $f^p(z_0) = z_0$ für ein $p \geq 1$. Es gibt $w \neq z_0$ mit $f^p(w) = z_0$, denn sonst $z_0 \in E(f^p)$. Dann ist $f^m(z_0) \neq w \ \forall m$, denn wäre $f^q(z_0) = w$, folgte $z_0 = f^p(w) = f^p f^q(z_0) = f^q f^p(z_0) = f^q(z_0) = w$, jedoch $z_0 \neq w$.

In beiden Fällen folgt für $z \in \mathcal{O}^-(w) \cap U \neq \emptyset$, d.h. $f^n(z) = w$ für ein n, daß $z \neq z_0$, denn $f^m(z_0) \neq w \ \forall m$. □

Beweis 3. J ist unendlich und kompakt, deshalb gibt es einen Häfungspunkt $w_0 \in J$. Der Rückwärstorbit $\mathcal{O}^-(w_0)$ ist dicht in J. Ist $z \in f^{-1}(w_0)$, so gibt es nach dem Argumentprinzip beliebig kleine Umgebungen D von z, so daß jeder Wert in der Zusammenhangskomponente W von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus f(\partial D)$, die w_0 enthält, mindestens ein Urbild in D hat, also auch Urbilder der Punkte aus J, die sich bei w_0 häufen. Somit ist jedes $z \in f^{-1}(w_0)$ wieder Häufungspunkt. □

Lemma 5.10. $z \in E(f) \iff \mathcal{O}^-(z)$ *ist endlich.*

Beweis. Ist $z \in E(f)$, so ist $\mathcal{O}^-(z)$ endlich. Sei nun $\mathcal{O}^-(z)$ endlich. Definiere $B_n = \bigcup_{k \geq n} f^{-k}(z)$. Dann ist $\mathcal{O}^-(z) = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$. Da B_0 endlich ist, gibt es ein m, so daß $B_m = B_{m+1}$. So ist $B_m = B_{m+1} = f^{-1}(B_m)$ vollständig invariant. Für $w \in B_m$ gilt dann $\mathcal{O}^-(w) \subset B_m$. Nun ist $w \in \mathcal{O}^-(z)$, also $B_m \ni f^n(w) = z$. □

Für eine vollständig invariante Menge A bilden $\mathcal{O}^-(z)$, $z \in A$, Äquivalenzklassen.

§ Periodische Punkte

Sei z_0 ein Fixpunkt, d.h. $f(z_0) = z_0$. Ist $|f'(z_0)| < 1$, so gibt es $\rho < 1$, so daß

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \leq \rho < 1$$

in einer Kreisscheibe D um z_0. Somit $|f(z) - z_0| = |f(z) - f(z_0)| \leq \rho|z - z_0|$, d.h. $z \in D \Rightarrow f(z) \in D$ und $|f^n(z) - z_0| \leq \rho^n|z - z_0| \to 0$. Es folgt $z_0 \in F(f)$.

Ist $|f'(z_0)| > 1$ für einen Fixpunkt z_0, so entfernen sich Punkte in der Nähe von z_0 vom Fixpunkt. Wäre $\{f^n\}$ normal in einer Umgebung von z_0, so würde dort eine Teilfolge gegen eine holomorphe Funktion g konvergieren mit $|g'(z_0)| < \infty$, jedoch $(f^n)'(z_0) \to \infty$. Daher folgt $z_0 \in J(f)$.

Ein Fixpunkt heißt anziehend, falls $|f'(z_0)| < 1$, und abstoßend, falls $|f'(z_0)| > 1$. Im Fall $|f'(z_0)| = 1$ nennt man ihn indifferent.

Eine holomorphe Funktion $f : U \to V$ ist *linearisierbar* in einer Umgebung eines Fixpunktes z_0, wenn es eine schlichte Funktion φ von $U \cup V$ auf eine Umgebung von 0 gibt, so daß $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = \lambda z$ in der Nähe von 0, wobei $\lambda = f'(z_0)$.

Ist $0 < |f'(z_0)| < 1$, so ist f in der Nähe von z_0 linearisierbar. Da $f(U) \subset U$ nahe z_0, ist f auch lokal konjugiert zu $z \mapsto \lambda z$. Die Konjugation existiert auf der gesamten Fatoukomponente F_0, die z_0 enthält.
Ist $f'(z_0) = 0$, so ist f lokal konjugiert zu $z \mapsto z^k$ für ein $k \geq 2$.
Ist $|f'(z_0)| > 1$, so ist f zwar linearisierbar um z_0, jedoch ist $U \subset f(U)$ nahe z_0 eine echte Teilmenge.

Definition. z_0 heißt *periodischer* Punkt der Periode n, wenn $f^n(z_0) = z_0$ und $f^k(z_0) \neq z_0$ für $0 < k < n$. Die Menge $Z = \{z_0, z_1 = f(z_0), \dots, z_{n-1} = f^{n-1}(z_0)\}$ heißt *Zyklus* der Länge n, und

$$\lambda = (f^n)'(z_0) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(z_0)) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(z_k)$$

heißt *Multiplikator.*

Der Multiplikator ist an jeder Stelle eines Zyklus gleich. Ein *Fixpunkt* ist ein periodischer Punkt mit Periode 1. Sind f und $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ konjugiert und $f^n(z_0) = z_0$, so ist $\varphi(z_0) = w_0$ Fixpunkt von g^n mit gleichem Multiplikator: $g^n(w_0) = (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})^n(\varphi(z_0)) = \varphi(z_0) = w_0$ und $(g^n)'(w_0) = (f^n)'(z_0)$.
Ist ∞ periodischer Punkt, so betrachte die Konjugation $\varphi(z) = 1/z$.

Definition. Sei $Z = \{z_0, \ldots, z_{n-1}\}$ ein Zyklus mit Multiplikator $\lambda = (f^n)'(z_0)$. Der Zyklus bzw. periodische Punkt heißt

$$\begin{aligned} \textit{super-anziehend}, &\quad \text{wenn} \quad \lambda = 0 \\ \textit{anziehend}, &\quad \text{wenn} \quad |\lambda| < 1 \\ \textit{abstoßend}, &\quad \text{wenn} \quad |\lambda| > 1 \\ \textit{rational indifferent}, &\quad \text{wenn} \quad |\lambda| = 1\,,\ \lambda^q = 1 \\ \textit{irrational indifferent}, &\quad \text{wenn} \quad |\lambda| = 1\,,\ \lambda^m \neq 1\ \forall m\ . \end{aligned}$$

Ist ein periodischer Punkt/Zyklus indifferent, d.h. $|\lambda| = 1$, so ist $\lambda = e^{2\pi i t}$, und er ist rational indifferent $\iff t = p/q \in \mathbb{Q}$.
Rational indifferente periodische Punkte heißen *parabolisch*, falls $\lambda^q = 1$, jedoch $f^q \neq \mathrm{id}$. Da hier $\deg(f) \geq 2$, sind rational indifferente Punkte auch parabolisch.

Für einen Zyklus Z gilt:

$$\begin{aligned} Z \text{ (super-)anziehend} &\quad \Rightarrow \quad Z \subset F(f) \\ Z \text{ abstoßend} &\quad \Rightarrow \quad Z \subset J(f) \\ Z \text{ parabolisch} &\quad \Rightarrow \quad Z \subset J(f) \end{aligned}$$

Satz 5.11. *Ist z_0 ein indifferenter periodischer Punkt der Periode n, d.h. $|(f^n)'(z_0)| = 1$, so gilt:* $\quad z_0 \in F(f) \iff f^n$ *ist linearisierbar nahe z_0.*
Für den indifferenten Zyklus $Z = \{z_0, \ldots, z_{n-1}\}$ gilt ebenso:
$$Z \subset F(f) \iff f^n \text{ ist linearisierbar nahe } z_0.$$

Sei z_0 ein indifferenter Punkt. Parabolische Punkte liegen in der Juliamenge.
Ist z_0 irrational indifferent und in der Juliamenge, so heißt er *Cremer-Punkt*.
Ist z_0 irrational indifferent und in der Fatoumenge, d.h. f^n linearisierbar um z_0, so wird die Fatoukomponente, die z_0 enthält, durch die lokale Konjugation konform auf eine Kreisscheibe abgebildet und f^n entspricht einer irrationalen Drehung der Kreisscheibe. Diese Fatoukomponente wird *Siegelscheibe* genannt.

Anziehende Zyklen enthalten einen kritischen Punkt in ihrem unmittelbaren Anziehungsbereich. Das gleiche gilt für parabolische Zyklen.
Hat f indifferente Zyklen, so kann man durch eine kleine Störung erreichen, daß die Hälfte der indifferenten Zyklen mit $\lambda \neq 1$ anziehend wird. Es folgt, daß f nur endlich viele nicht–abstoßende Zyklen haben kann, höchstens $6d - 6$. Die Anzahl der kritischen Punkte $2d - 2$ ist eine scharfe Grenze für die Anzahl nicht–abstoßender Zyklen, die in Fällen auch angenommen wird.

Satz 5.12 (Shishikura)**.**

$$\sharp\,\{\textit{nicht–abstoßende periodische Zyklen}\} \leq 2d-2\ .$$

f hat $d+1$ Fixpunkte in $\widehat{\mathbb{C}}$. Die n–te Iterierte hat d^n Lösungen der Gleichung $f^n(z)-z=0$. Für die Anzahl der periodischen Punkte der Periode n muß man noch die periodischen Punkte mit Perioden $m<n$ abziehen, die n teilen. Nun hat f nur endlich viele nicht–abstoßende Zyklen.
Es folgt, daß abstoßende periodische Punkte dicht liegen in der Juliamenge. Dazu sei erinnert, daß J keine isolierten Punkte besitzt. Man kann also endlich viele Punkte aus der Betrachtung ausschließen.

Satz 5.13.

$$J=\overline{\{\textit{abstoßende periodische Punkte}\}}$$

Beweis. Sei $z_0\in J$, der kein kritischer Wert von f ist, und U eine Umgebung von z_0. Angenommen U enthält keine periodischen Punkte von f, d.h. $f^n(z)\neq z$ $\forall\, n\geq 1\ \forall\, z\in U$. Weiter kann man annehmen, daß U keinen kritischen Wert enthält. Ist U klein genug, so gibt es d paarweise disjunkte Umgebungen U_j um die Urbilder $\{z_1,\ldots,z_d\}=f^{-1}(z_0)$, so daß $f|_{U_j}:U_j\to U$ bijektiv ist. Zudem sei $U_j\cap U=\emptyset$, da $f(z_0)\neq z_0$. Wegen $d\geq 2$ gibt es mindestens zwei lokale Inverse $s_1:U\to U_1$ und $s_2:U\to U_2$, $s_j\circ f|_{U_j}=\mathrm{id}_{U_j}$. Setze

$$g_n(z)=\frac{f^n(z)-s_1(z)}{f^n(z)-s_2(z)}\cdot\frac{z-s_2(z)}{z-s_1(z)}\ .$$

Da $U_1\cap U=U_2\cap U=U_1\cap U_2=\emptyset$, ist $s_2(z)\neq z$ und $s_1(z)\neq z$ in U. Ebenso ist $s_1(z)\neq s_2(z)$ und $f^{n+1}(z)\neq z$. Daher $g_n(z)\neq 0,1,\infty$ in U und $\{g_n\}$ normal in U. Damit wäre aber auch $\{f^n\}$ normal in U, d.h. $U\subset F(f)$. $\lightning$
Somit $J\subset\overline{\{\text{periodische Punkte}\}}$. Da es nur endlich viele nicht–abstoßende periodische Punkte gibt und abstoßende in J liegen, folgt die Behauptung. $\square$

Folgerung. *Ist U eine offene Menge mit $U\cap J\neq\emptyset$, so gibt es ein N mit*

$$f^N(U\cap J)=J\ .$$

Beweis. Sei $z_0\in U\cap J$ ein abstoßender Fixpunkt von $g=f^n$. Dann gibt es eine Umgebung $V\subset U$ mit $V\subset g(V)$, somit $V\subset g(V)\subset g^2(V)\subset\ldots$ Da J kompakt ist und $J\subset\bigcup g^k(V)$, gibt es ein m, so daß $J\subset\bigcup_{k=0}^m g^k(V)\subset g^m(V)$. $\square$

§ Fatoukomponenten

Sei $b_f(z)=\nu_f(z)-1$. Dann ist $b_f(z)>0 \iff z$ ist kritischer Punkt von f, und $b_f(A)=\sum_{z\in A}b_f(z)$ ist die Anzahl der kritischen Punkte von f in A.
Ist $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ rational vom Grad $d>0$, so ist $b_f(\widehat{\mathbb{C}})=2d-2$.

Trianguliert man eine kompakte Riemannsche Fläche X, so ist $E - K + F$, wobei E, K, F die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen ist, unabhängig von der Triangulierung und eine topologische Invariante, die *Euler–Charakteristik* $\chi(X)$. Es gilt $\chi(X) = E - K + F = 2 - 2g$, wobei das Geschlecht g gleich der Anzahl Henkel der geschlossenen Fläche X ist. Die Sphäre hat $g = 0$.

Sei G ein Gebiet in $\widehat{\mathbb{C}}$ und $c(G)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus G$. Definiere die Euler–Charakteristik $\chi(G) = 2 - c(G)$.

Somit ist $\chi(\widehat{\mathbb{C}}) = 2$ und für $G \neq \widehat{\mathbb{C}}$ ist $\chi(G)$ die Zusammenhangszahl von G.
$G \neq \widehat{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängend $\iff \chi(G) = 1$.
$G \neq \widehat{\mathbb{C}}$ ist m–fach zusammenhängend $\iff \widehat{\mathbb{C}} \setminus G$ besteht aus m Komponenten $\iff \partial G$ besteht aus m Komponenten.

G Gebiet $\Rightarrow \overline{G}$ zusammenhängend, und es gilt: $\overline{G}$ ist zusammenhängend $\iff$ jede Zusammenhangskomponente von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$ ist einfach zusammenhängend.

Sei $f : G \to H$ holomorph und $N_f(w) = \sum\{\nu_f(z) : z \in f^{-1}(w)\}$ die Anzahl der w–Stellen in G mit Vielfachheit. Ist $N_f \equiv k < \infty$ konstant in H, d.h. f ist surjektiv und jedes $w \in H$ hat mit Vielfachheit gezählt genau k Urbilder in G, so schreibt man $f : G \xrightarrow{k:1} H$. Ist $f : G \to H$ holomorph und stetig auf $\overline{G} \subset \widehat{\mathbb{C}}$, so gilt: $\quad f : G \xrightarrow{k:1} H \iff f(\partial G) = \partial H$ in $\widehat{\mathbb{C}}$.

Satz 5.14 (Riemann–Hurwitz)**.** *Seien G, H Gebiete und $f : G \xrightarrow{k:1} H$, so gilt*

$$\chi(G) + b_f(G) = k \cdot \chi(H) \ .$$

Rationale Funktionen vom Grad $d > 0$ sind also Abbildungen $\widehat{\mathbb{C}} \xrightarrow{d:1} \widehat{\mathbb{C}}$.
Hier war immer $d \geq 2$.

Zusammenhangskomponenten der Fatoumenge nennt man Fatoukomponenten.

Satz 5.15. *Sind F_0, F_1 Fatoukomponenten mit $f(F_0) \cap F_1 \neq \emptyset$, so gilt $f(F_0) = F_1$, und es gibt ein $k \leq d$, so daß $f : F_0 \xrightarrow{k:1} F_1$.*

Beweis. $f(F_0)$ ist zusammenhängend mit $f(F_0) \subset F$, somit $f(F_0) \subset F_1$. Weiter gilt $\partial f(F_0) \subset f(\partial F_0) \subset J$. Nun ist $f(F_0)$ offen, somit $F_1 \setminus f(F_0)$ relativ abgeschlossen in F_1. Gäbe es $z \in F_1 \setminus f(F_0)$, so wäre $\partial f(F_0) \cap F_1 \neq \emptyset$. Allerdings $\partial f(F_0) \subset J$, also $\partial f(F_0) \cap F_1 = \emptyset$.
Um $f(\partial F_0) = \partial f(F_0) = \partial F_1$ zu zeigen, bleibt noch $f(\partial F_0) \subset \partial f(F_0)$:
Ist $F_0 \ni z_n \to z_0 \in \partial F_0$, so konvergiert $f(z_n) \in f(F_0)$ gegen $f(z_0) \in \overline{f(F_0)}$.
Daher gilt $f(\partial F_0) \subset \overline{f(F_0)}$.
Da $f(F_0)$ offen ist, gilt $\partial f(F_0) = \overline{f(F_0)} \setminus f(F_0)$ und $\overline{f(F_0)} = \partial f(F_0) \dot\cup f(F_0)$.
Nun ist $f(\partial F_0) \subset J$ und $f(F_0) \subset F$, daher $f(\partial F_0) \subset \overline{f(F_0)} \setminus f(F_0) = \partial f(F_0)$. $\square$

Satz 5.16. *Sei F_0 eine vollständig invariante Fatoukomponente. Dann gilt $\partial F_0 = J$, und jede andere Fatoukomponente ist einfach zusammenhängend.*

Beweis. Es gilt $\partial F_0 \subset J$. Nun ist $\overline{F_0}$ vollständig invariant und abgeschlossen, also $J \subset \overline{F_0}$. Da $J \cap F_0 = \emptyset$, folgt $J \subset F_0$.
Da $\overline{F_0}$ zusammenhängend ist, ist jede Zusammenhangskomponente von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{F_0} = F \setminus F_0$ einfach zusammenhängend. □

Satz 5.17. *Die Fatoumenge hat höchstens zwei vollständig invariante Zusammenhangskomponenten, und sind es zwei, so sind sie einfach zusammenhängend.*

Beweis. Seien $F_1, \ldots, F_m$ vollständig invariante Fatoukomponenten, die paarweise disjunkt sind. Ist F_j vollständig invariant, d.h. $f^{-1}(F_j) = F_j$, so gilt $f : F_j \xrightarrow{d:1} F_j$ und $b_f(F_j) = (d-1)\chi(F_j)$. Ist nun $m \geq 2$, so sind $F_1, \ldots, F_{m-1}$ einfach zusammenhängend wie auch $F_2, \ldots, F_m$, also alle, und es gilt $\chi(F_j) = 1$. Es folgt $b_f(F_j) = d-1$ und

$$\sum_{j=1}^{m} b_f(F_j) = m(d-1) \leq b_f(\widehat{\mathbb{C}}) = 2d-2 \quad \rightsquigarrow \quad m \leq 2 \ .$$

□

Satz 5.18. *Die Fatoumenge hat* $0, 1, 2$ *oder unendlich viele Komponenten.*

Beweis. Besteht F aus endlich vielen Fatoukomponenten F_j, so gibt es ein n, so daß $f^n(F_j) = F_j$ und somit auch $(f^n)^{-1}(F_j) = F_j$. D.h. die F_j sind vollständig invariant unter f^n, daher gibt es dann höchstens zwei Fatoukomponenten von $F(f) = F(f^n)$. □

Definition. Eine Fatoukomponente U heißt *periodisch*, falls $f^n(U) = U$ für ein $n \geq 1$ und *präperiodisch*, falls $f^m(U)$ periodisch wird für ein $m \geq 1$.
U heißt *wanderndes Gebiet*, falls U weder periodisch noch präperiodisch ist, d.h. falls $f^j(U) \cap f^k(U) = \emptyset$ für alle $j \neq k$.

Satz 5.19 (Sullivan)**.** *Eine rationale Funktion hat keine wandernden Gebiete.*

Definition. Eine periodische Fatoukomponente U heißt

(i) *(super-)anziehend*, wenn U einen (super-)anziehenden periodischen Punkt enthält, der alle Punkte in U anzieht;

(ii) *parabolisch*, wenn es einen periodischen Punkt $z \in \partial U$ gibt mit $(f^q)'(z) = 1$ für ein $q \geq 1$, der alle Punkte in U anzieht;

(iii) *Rotationsgebiet*, wenn $f^n : U \to U$ konjugiert ist zu einer irrationalen Drehung. Dabei ist U eine *Siegelscheibe* oder ein *Hermanring*, je nachdem, ob U zu einer Kreisscheibe oder zu einen Kreisring konform äquivalent ist.

Eine Siegelscheibe enthält einen irrational indifferenten periodischen Punkt.
Bei Polynomen können Hermanringe nicht auftreten.

Ist C_f die Menge der kritischen Punkte von f, so ist $P_f = \overline{\cup_{n\geq 0} f^n(C_f)}$ die *postkritische Menge.*

Satz 5.20. *Ist U ein Rotationsgebiet, so gilt $\partial U \subset P_f$, und U ist entweder eine Siegelscheibe oder ein Hermanring.*

Satz 5.21. *Eine periodische Fatoukomponente ist entweder (super-)anziehend, parabolisch oder Rotationsgebiet. Es gilt $\sharp\{\text{periodische Komponenten}\} < \infty$.*

Super-anziehende, anziehende und parabolische Zyklen ziehen kritische Punkte an. Die Ränder von Rotationsgebieten liegen in der postkritischen Menge.
Hat die Fatoumenge F zwei Komponenten, die vollständig invariant sind, dann enthält jede $d-1$ kritische Punkte. Da jede Fatoukomponente periodisch wird, kann es keine weiteren Fatoukomponenten geben.

Sei $\lambda = e^{2\pi i\xi}$, $\xi \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$, der Multiplikator eines irrational indifferenten Fixpunktes z. Dann liegt z in einer Siegelscheibe genau dann, wenn f linearisierbar ist in der Nähe von z. f ist linearisierbar nahe z, wenn sich ξ nur schlecht approximieren läßt durch rationale Zahlen: Es gibt $c > 0$ und $\mu < \infty$, so daß

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^\mu} \quad \text{für alle } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\ .$$

Die Kettenbruchentwicklung ist

$$\xi = [a_1, a_2, a_3, \ldots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

mit natürlichen Zahlen a_j. Der goldene Schnitt $(\sqrt{5}-1)/2 = [1,1,1,\ldots]$ ist am schlechtesten approximierbar.
Zu $\xi = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$ seien $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, \ldots, a_n]$.

Satz 5.22 (Brjuno)**.** *f ist linearisierbar in einer Umgebung eines irrational indifferenten Fixpunktes, wenn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty\ .$$

Für quadratische Polynome gilt auch die Umkehrung (Yoccoz)*.*

Ist f in keiner Umgebung des irrational indifferenten Fixpunktes z linearisierbar, so ist $z \in J$ ein Cremerpunkt. Jeder Cremerpunkt ist nichtisoliert in P_f.

Satz 5.23. *Ist jeder kritische Punkt von f präperiodisch, so ist $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$.*

§ Quadratische Polynome und Mandelbrotmenge

Ein Polynom $p : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ vom Grad $d \geq 2$ hat $d-1$ kritische Punkte in $\mathbb{C}$, und der super-anziehende Fixpunkt ∞ ist ein $(d-1)$–facher kritischer Punkt. $A(\infty) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : f^n(z) \to \infty\}$ ist der Anziehungsbereich von ∞. $A(\infty)$ ist zusammenhängend, denn gäbe es eine beschränkte Komponente $U \subset A(\infty)$, dann folgte mit dem Maximumprinzip $|p^n|_U = |p^n|_{\partial U} \leq |p^n|_J$, doch die Iterierten eines Polynoms sind auf J beschränkt. Jede beschränkte Fatoukomponente ist einfach zusammenhängend, denn sonst gäbe es eine Umgebung $V \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus A(\infty)$ mit $V \cap J \neq \emptyset$, auf der die Iterierten beschränkt wären. $A(\infty)$ ist vollständig invariant, somit $J(p) = \partial A(\infty)$.
Die *ausgefüllte Juliamenge* $K(p) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus A(\infty)$ ist die Menge der Punkte, die unter Iteration beschränkt bleiben. Wiederum ist $J(p) = \partial K(p)$.

Satz 5.24. *Die Juliamenge $J(p)$ ist zusammenhängend $\iff$ $A(\infty)$ enthält keinen endlichen kritischen Punkt von p $\iff$ jeder endliche kritische Punkt bleibt unter Iteration beschränkt $\iff$ $A(\infty)$ ist einfach zusammenhängend.*

Satz 5.25. *Gilt $p^n(z_c) \to \infty$ für jeden kritischen Punkt $z_c \in C_p$, so ist die Juliamenge $J(p)$ total unzusammenhängend.*

Sei $p(z) = a_d z^d + \ldots + a_0$ Polynom vom Grad $d \geq 2$. $R > 0$ ist *Fluchtradius*, falls $p^n(z) \to \infty$ für alle $|z| \geq R$. Zum Beispiel gilt dies für

$$R = \frac{1 + |a_d| + \ldots + |a_0|}{|a_d|} \ .$$

Sei nun $p(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ ein quadratisches Polynom. Die kritischen Punkte von p sind ∞ und $z_c = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Die Juliamenge ist entweder zusammenhängend, wenn $\{p^n(z_c)\}$ beschränkt ist, oder total unzusammenhängend (Cantormenge).

Lemma 5.26. *Die Juliamenge eines quadratischen Polynoms ist symmetrisch zum kritischen Punkt z_c.*

Beweis. Sei $p(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ mit kritischen Punkt. $z_c = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p(z_c + z) &= \alpha \left(z^2 - \frac{\beta}{\alpha} z + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \right) + \beta z - \frac{\beta^2}{2\alpha} + \gamma \\ &= \alpha z^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma = p(z_c - z) \ . \end{aligned}$$

Alternativ: $w = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ hat zwei Lösungen

$$z_{1/2} = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{w-\gamma}{\alpha}} = z_c \pm \sqrt{z_c^2 + \frac{w-\gamma}{\alpha}} \ .$$

Daher hat jedes $w \in J$ zwei Urbilder, die symmetrischen sind zum kritischen Punkt. $\square$

Jedes quadratische Polynom $p(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ ist konjugiert zu einem Polynom $f_c(z) = z^2 + c$. Für $\varphi(z) = \alpha z + \frac{\beta}{2}$ ist $\varphi \circ p \circ \varphi^{-1}(z) = z^2 + c$ mit $c = \alpha\gamma + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4}$.
Der kritische Punkt von $f_c(z) = z^2 + c$ ist 0.
Die Fixpunkte sind Lösungen μ, ν von $f_c(z) - z = 0$. Es gilt $\mu + \nu = 1$ und $\mu\nu = c$.
Die Multiplikatoren sind $\lambda_\mu = f_c'(\mu)$ und $\lambda_\nu = f_c'(\nu)$ mit $\lambda_\mu + \lambda_\nu = 2(\mu + \nu) = 2$.
Mindestens einer der Fixpunkte ist entweder abstoßend oder parabolisch und somit in beiden Fällen in J. (Der parabolische Fall ist $c = 1/4$ mit $\mu = \nu = 1/2$.)

Definition. Die *Mandelbrotmenge* $\mathcal{M}$ ist die Menge der Parameter $c \in \mathbb{C}$, für die die Juliamenge $J(f_c)$ zusammenhängend ist.

Ein Fluchtradius für $f_c(z) = z^2 + c$ ist $R = \max\{2, |c|\}$. Denn für $|z| > R$ ist

$$\frac{|f_c(z)|}{|z|} = \frac{|z^2 + c|}{|z|} \geq |z| - \frac{|c|}{|z|} > |z| - 1 > 1 + \delta \quad \rightsquigarrow \quad |f_c^n(z)| \to \infty\ .$$

Somit $K(f_c) = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(z)| \leq R\}$. Es gilt $0 \in K(f_c) \iff f_c^n(0)$ beschränkt,

$$c \in \mathcal{M} \iff J(f_c) \text{ zusammenhängend } \iff f_c^n(0) \not\to \infty\ .$$

Für $c \notin \mathcal{M}$ gilt $f_c^n(0) \to \infty$ und $J(f_c) = K(f_c)$.

Satz 5.27. $\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : |f_c^n(0)| \leq 2\ \forall n\}$, $\mathcal{M} \subset \overline{D}_2$ *und* $-2 \in \mathcal{M}$.

Beweis. Zu zeigen ist, daß $z_n = f_c^n(0) \to \infty$, sobald $|z_{n_0}| > 2$ für ein n_0.
(i) Sei $|c| > 2$. Dann gilt $|f_c(0)| = |c|$ und

$$|f_c^2(0)| = |c^2 + c| \geq |c|^2 - |c| = |c|(|c| - 1)\ .$$

Zeige $|f_c^n(0)| \geq |c|(|c| - 1)^{2^{n-1}} > 2$ durch Induktion:

$$\begin{aligned} |f_c^{n+1}(0)| &= |[f_c^n(0)]^2 + c| \geq |f_c^n(0)|^2 - |c| \\ &\geq |c|^2(|c| - 1)^{2^n} - |c| \\ &\geq |c|^2(|c| - 1)^{2^n} - |c|(|c| - 1)^{2^n} \\ &= |c|(|c| - 1)^{2^n}(|c| - 1) \\ &\geq |c|(|c| - 1)^{2^n} \quad , \end{aligned}$$

somit $|f_c^n(0)| \to \infty$ für $|c| > 2$ und $c \notin \mathcal{M}$.
(ii) Sei nun $|c| \leq 2$, jedoch $|f_c^{n_0}(0)| = 2 + \delta$ mit $\delta > 0$ für ein $n_0 \geq 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f_c^{n_0+1}(0)| &= |[f_c^{n_0}(0)]^2 + c| \geq |f_c^{n_0}(0)|^2 - |c| \\ &\geq |f_c^{n_0}(0)|^2 - 2 = (2 + \delta)^2 - 2 \\ &= 2 + 4\delta + \delta^2 \geq 2 + 4\delta \quad . \end{aligned}$$

Durch Induktion folgt $|f_c^{n_0+k}(0)| \geq 2 + 4^k\delta \longrightarrow \infty$ $(k \to \infty)$, d.h. $c \notin \mathcal{M}$.
Für $c = -2$ gilt $0 \mapsto -2 \mapsto 2 \mapsto 2$, also $-2 \in \mathcal{M}$. □

Definiere $q_1(c) = c$, $q_{n+1}(c) = [q_n(c)]^2 + c$, also $q_n(c) = f_c^n(0)$.
Wegen $\mathcal{M} = \bigcap q_n^{-1}(\overline{D}_2)$ ist $\mathcal{M}$ abgeschlossen und kompakt.
$\mathcal{M}^c = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M} = \bigcup q_n^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_2)$ zeigt, daß $\mathcal{M}^c$ zusammenhängend ist, denn jede Komponente der offenen Menge $q_n^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_2)$ enthält den Punkt ∞, d.h. $q_n^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_2)$ ist zusammenhängend und alle Urbilder hängen über ∞ zusammen.
$\mathcal{M}$ ist symmetrisch zur reellen Achse. Es gilt $\mathcal{M} \cap \mathbb{R} = [-2, \frac{1}{4}]$.

Sei $g_c : \widehat{\mathbb{C}} \setminus K(f_c) \to \mathbb{R}$, $g_c(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log|f_c^n(z)|}{2^n}$. So ist g_c Greensche Funktion in $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K(f_c)$ mit Pol in ∞, und es gilt $g_c|_{J_c} = 0$ und $g_c(f_c(z)) = 2g_c(z)$.

Um ∞ gibt es eine Umgebung U, so daß $f_c : U \to U$ konjugiert ist zu $\phi_c \circ f_c \circ \phi_c^{-1} : z \mapsto z^2$, wobei $\phi_c : U \to V$ konform auf eine Umgebung von ∞ abbildet.
Es gilt $\phi_c(f_c(z)) = [\phi_c(z)]^2$ und $g_c(z) = \log|\phi_c(z)|$ in U.

Es folgt weiter, daß es eine konforme Fortsetzung $\phi_c : \Omega_c \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_{R_c}$ gibt, wobei $R_c = e^{g_c(0)}$ und $\Omega_c = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : g_c(z) > g_c(0)\}$.

Ist $f_c^n(0) \not\to \infty$ beschränkt, d.h. $J(f_c)$ zusammenhängend, so ist $\Omega_c = A(\infty)$ und $R_c = 1$, und man hat die konforme Abbildung $\phi_c : \widehat{\mathbb{C}} \setminus K(f_c) \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

Wenn $f_c^n(0) \to \infty$, so ist $g_c(0) > 0$ und wegen $g_c(c) = 2g_c(0)$ ist $c \in \Omega_c$.
Ist also $c \notin \mathcal{M}$, d.h. $J(f_c)$ nicht zusammenhängend, so kann man $\Phi_{\mathcal{M}}(c) := \phi_c(c)$ definieren und zeigen, daß $\Phi_{\mathcal{M}} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ konform ist.

Satz 5.28 (Douady/Hubbard)**.** *$\mathcal{M}$ ist kompakt und zusammenhängend, und es gibt eine konforme Abbildung $\Phi_{\mathcal{M}} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.*

Für $f_c(z) = z^2 + c$ sind die Zyklen der Länge n Lösungen von $f_c^n(z) - z = 0$. Da auch Zyklen der Länge d dies erfüllen, falls $d|n$, muß man die periodischen Punkte mit Perioden $d|n$ abziehen bzw. durch die Teiler $f_c^d(z) - z$ dividieren. Damit kann man die Anzahl der Zyklen rekursiv bestimmen, wobei für gewisse c Zyklen zusammenfallen können, wenn $(f_c^n)'(z) = 1$. f_c kann höchstens einen nicht–abstoßenden Zyklus haben.

Sei $\mathcal{H} = \{c \in \mathbb{C} : f_c \text{ hat anziehenden Zyklus}\} \subset \mathcal{M}^\circ$. $\mathcal{H}$ ist offen. Man nennt die Zusammenhangskomponenten *hyperbolische Komponenten*. Die Zyklenlänge in einer hyperbolischen Komponente W ist konstant. Für jedes $c \in W$ hat f_c einen anziehenden Zyklus der Länge n. Sei $\lambda(c)$ der zugehörige Multiplikator. Man kann zeigen, daß dadurch eine konforme Abbildung $\lambda_W : W \to \mathbb{D}$ definiert wird, die ein Homöomorphismus $\overline{W} \to \overline{\mathbb{D}}$ ist. Das Zentrum von W ist das c, für das $\lambda_W(c) = 0$ und f_c einen super-anziehenden Zyklus der Länge n hat.

Die Anzahl $\nu(n)$ der hyperbolischen Komponenten zur Periode n ermittelt man über die Anzahl der Zentren. Die Zentren zur Periode n sind Lösungen von $q_n(c) = 0$ modulo $q_d(c) = 0$ für $d|n$.

Lemma 5.29. *Das Polynom q_n hat nur einfache Nullstellen.*

Beweis. $q_n(c) = [q_{n-1}(c)]^2 + c$, $q_1(c) = c$, ist ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Die Nullstellen sind also ganzalgebraische Zahlen. Summen und Produkte sind wieder ganzalgebraisch. Zudem ist jede ganzalgebraische Zahl, die rational ist, eine ganze Zahl.
Sei $q_n(c) = 0$, somit c ganzalgebraisch. Dann ist $q'_{n-1}(c)q_{n-1}(c)$ ganzalgebraisch. Wenn jedoch auch $q'_n(c) = 0$, dann wäre $q_{n-1}(c)q'_{n-1}(c) = -1/2 \notin \mathbb{Z}$.
Man kann auch die Diskriminante $\operatorname{res}(q_n, q'_n) = 1 + 2 \cdot N \neq 0$ betrachten. $\square$

f_c kann höchstens einen anziehenden Fixpunkt ($|\lambda| < 1$) haben. Ein Fixpunkt μ von $z \mapsto z^2 + c$ ist Lösung von $z^2 - z + c = 0$, daher $c = \mu - \mu^2 = \lambda(2-\lambda)/4$, denn $\lambda = 2\mu$. Ist μ anziehender Fixpunkt, so ist $|\lambda| = 2|\mu| < 1$. Wegen

$$\left|\tfrac{f(z)-\mu}{z-\mu}\right| = \left|\tfrac{f(z)-f(\mu)}{z-\mu}\right| = \left|\tfrac{z^2-\mu^2}{z-\mu}\right| = |z+\mu| = |z-\mu+2\mu| \leq |z-\mu| + |\lambda|$$

wähle $r = 1 - |\lambda| > 0$. Für $z \in D_r(\mu)$ ist dann $|z-\mu| + |\lambda| < 1$. Somit gibt es ϱ mit $|z-\mu| + |\lambda| < \varrho < 1$. Es gilt nun $|f^n(z) - \mu| \leq \varrho^n |z-\mu| \to 0$. Der gesamte Anziehungsbereich $A(\mu)$ ist Jordangebiet, enthält $z_{\text{krit}} = 0$, und $\partial A(\mu) = J_c$.

Die hyperbolische Komponente H_0, in der f_c einen anziehenden Fixpunkt hat, wird berandet von der Kurve

$$c_0(\lambda) = \frac{\lambda(2-\lambda)}{4} \quad , \quad \text{wobei} \quad \lambda = e^{2\pi i t},\ 0 \leq t < 1 \ .$$

Die Juliamengen $J(f_c)$ für $c \in H_0$ sind Jordankurven. $H_0 = c_0(\mathbb{D})$ enthält die Kreisscheibe $D_{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{4}) = \left\{|z + \frac{1}{4}| < \frac{1}{2}\right\}$. $c_0(1) = 1/4$ ist die Wurzel der hyperbolischen Komponente H_0.

Sind p/q teilerfremd, so schließt sich bei $c_0(e^{2\pi i p/q})$ eine Komponente $H_{p/q}$ zur Länge q an. Den Übergang zur neuen Periode nennt man Bifurkation.
Bei $c_0(e^{2\pi i 1/2}) = c_0(-1) = -3/4$ schließt sich $H_{1/2}$ an H_0 an.

Ein anziehender periodischer Punkt z der Periode 2 erfüllt

$$f_c^2(z) - z = 0 \quad \& \quad f_c(z) - z \neq 0 \qquad \text{und} \qquad |(f_c^2)'(z)| < 1$$

$$\begin{aligned} 0 = f_c^2(z) - z &= (z^2 - z + c)(z^2 + z + c + 1) \\ &= (f_c(z) - z)(z-u)(z-v) \\ &= (f_c(z) - z)(z^2 - (u+v)z + uv) \end{aligned}$$

Es folgt $uv = c + 1$, und $\{u, v\}$ ist ein 2–Zyklus: $f_c(u) = v$, $f_c(v) = u$. Weiter gilt

$$(f_c^2)'(u) = f'_c(f_c(u))f'_c(u) = f'_c(v)f'_c(u) = 4uv \ .$$

Daher $|(f_c^2)'(u)| < 1 \iff |4uv| < 1 \iff 4|c+1| < 1$. Die hyperbolische Komponente $H_{1/2}$ mit anziehenden 2–Zyklen ist $\left\{c \in \mathbb{C} : |c+1| < \frac{1}{4}\right\}$.

Die Ränder der 3 hyperbolischen Komponenten zur Periode 3 werden beschrieben durch $0 = c^3 + 2c^2 + (1 - \lambda/8)c + (1 - \lambda/8)^2$, $\lambda = e^{2\pi i t}$. Der Wurzelpunkt auf der reellen Achse ist $c = -\frac{7}{4}$. Dort fallen zwei 3–Zyklen zusammen, $(f_c^3)'(z) = 1$.

$f_c(z) = z^2 + c$ und $g_\lambda(z) = \lambda z(1 - z)$ sind konjugiert mit $c = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}$. Für g_λ ist 0 ein Fixpunkt mit Multiplikator λ, und $1/2$ ist der endliche kritische Punkt. Analog zur Mandelbrotmenge ist $\mathcal{M}_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : g_\lambda^n(1/2) \not\to \infty\}$. Das gleiche $\mathcal{M}_\lambda$ erhält man für $h_\lambda(z) = z^2 + \lambda z$, das den kritischen Punkt $-\lambda/2$ hat. Die Juliamengen $J(g_c)$ und $J(h_c)$ sind zusammenhängend genau dann, wenn $J(f_c)$ zusammenhängend ist für $c = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}$.

Satz 5.30. *Sind für ein Polynom alle endlichen kritischen Punkte präperiodisch, so ist die Fatoumenge zusammenhängend und einfach zusammenhängend.*

Die Juliamenge zu einem solchen Polynom nennt man *Dendrit.* Für quadratische Polynome $z^2 + c$ nennt man ein c, für das der kritische Punkt 0 präperiodisch ist, *Misiurewiczpunkt.* Diese Punkte gehören zur Mandelbrotmenge. Beispiele: $J(z^2 - 2) = [-2, 2]$. Für $z^2 + i$ ist die Juliamenge ebenfalls ein Dendrit.

$\mathcal{M}$ ist lokal zusammenhängend $\iff$ $\Psi_\mathcal{M} = \Phi_\mathcal{M}^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ hat stetige Fortsetzung auf $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$, und es würde folgen $\mathcal{M}^\circ = \mathcal{H}$.

Literatur

[1] D.S. Alexander: *A History of Complex Dynamics.* Vieweg, 1994.

[2] A.F. Beardon: *Iteration of Rational Functions.* Springer, 1991.

[3] L. Carleson, W. Gamelin: *Complex Dynamics.* Springer, 1993.

[4] A. Douady, J.H. Hubbard: *Itération des polynômes quadratiques complexes.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. **294** (1982), 123–126.

[5] A. Douady, J.H. Hubbard: *Exploring the Mandelbrot set. The Orsay Notes.* (1983-84)

[6] P. Fatou: *Sur les équations fonctionelles.* Bull. Soc. Math. France. **47** (1919), 161–271; **48** (1920), 33–94 & 208–314.

[7] G. Julia: *Memoire sur l'iteration des fonctions rationelles.* J. Math. Pure Appl. **8** (1918), 47–245.

[8] J. Milnor: *Dynamics in One Complex Variable.* SUNY Stony Brook IMS 90-5, 1990. (Vieweg, 1999) (Princeton U. Press, 2006)

[9] H.-O. Peitgen, P. Richter: *The Beauty of Fractals.* Springer, 1986.

[10] M. Shishikura: *On the quasi-conformal surgery of rational functions.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **20** (1987), 1–29.

[11] N. Steinmetz: *Rational Iteration.* Walter de Gruyter, 1993.

[12] D. Sullivan: *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains.* Ann. of Math. **122** (1985), 401–418.