

1. Blatt zur Funktionentheorie
Abgabe: 20.–21.04.09 in den Übungen

1. Aufgabe

(2 + 2 Punkte)

- (a) Bestimme Real- und Imaginärteil von $z = \frac{i}{(1+i)^4} + \frac{i}{(1-i)^4}$.
- (b) Für $z \in \mathbb{C}$ bestimme Real- und Imaginärteil von e^{iz} und $\cos z$.
- (c) Sei $n > 1$. Zeige: $\sum_{k=1}^n e^{i2\pi k/n} = 0$.

2. Aufgabe

(2 + 2 Punkte)

- (a) Seien $p, q \in \mathbb{C}$, $p \neq q$, und $s > 0$. Beschreibe die Menge

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - p| = s|z - q| \}$$

und gebe (jeweils) eine Parameterdarstellung an.

- (b) Seien $p, q \in \mathbb{C}$ und $s > |p - q|$. Beschreibe die Menge

$$E = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - p| + |z - q| = s \}.$$

Für $p \geq 0$ und $q = -p$ zeige

$$E = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

wobei $2a = s$ und $b = \sqrt{a^2 - p^2}$. Gebe eine Parameterdarstellungen an.

3. Aufgabe

(4 Punkte)

Sei $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \quad , \quad f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

- (a) Seien $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ und $U = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Zeige:
 $f|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2]$ und $f|_U : U \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2]$ sind bijektiv.
- (b) Seien $K_n = \{|z| = 2^n\}$ und $H_k = \{re^{ik\pi/6} \mid r > 0\}$.
Bestimme die Bilder $f(K_n)$ für $n = -1, 0, 1$ und $f(H_k)$ für $k = 1, 2, 3$.

(bitte wenden)

Zusatzaufgabe**(+ 4 Punkte)**

Seien $Q, R, S \in \mathbb{C}$ die Mittelpunkte der Außenquadrate eines Dreiecks $\Delta(A, B, C)$.
Rekonstruiere die Eckpunkte $A, B, C \in \mathbb{C}$ des Dreiecks.

